P.S. ALEKSANDROV

INTRODUCTION À LA THÉORIE HOMOLOGIQUE DE LA DIMENSION ET LA TOPOLOGIE COMBINATOIRE

P. ALEXANDROV

INTRODUCTION À LA THÉORIE HOMOLOGIQUE DE LA DIMENSION ET LA TOPOLOGIE COMBINATOIRE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

Préface à l'édition russe 9

Chapitre premier

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA TOPOLOGIE COMBINATOIRE DES COMPLEXES

§ 1. Orientation de l'espace R^n; orientation d'un simplexe 13
§ 2. Coefficients d'incidence ; chaînes; opérateurs Δ et ∇; groupes de Betti; complexes cellulaires 20
§ 3. Opérateurs d'inclusion et d'intersection 30
§ 4. Groupes de Betti à groupes de coefficients divers 34
§ 5. Groupes $\Delta^0(K, \mathfrak{A})$ et $\nabla^0(K, \mathfrak{A})$ 60
§ 6. Exemples élémentaires de calcul des groupes d'homologie 64
§ 7. Pseudo-variétés 68
§ 8. Homomorphismes des groupes d'homologie et de cohomologie induits par une application simpliciale du complexe K_β dans le complexe K_α 76
§ 9. Degré d'une application simpliciale dans une pseudo-variété . . . 80
Supplément au chapitre premier. Théorie des caractères et dualité des groupes $\Delta^r K$ et $\nabla^r K$ 85

Chapitre deux

THÉORÈMES D'INVARIANCE DES GROUPES D'HOMOLOGIE D'UN POLYÈDRE; GROUPES D'HOMOLOGIE D'UN COMPACT (GROUPES DE BROUWER-VIETORIS)

§ 1. Agrandissement des triangulations 94
§ 2. Subdivision des triangulations 101
§ 3. Déplacement canonique $\sigma_\alpha^\beta : K_\beta \to K_\alpha$ d'une subdivision K_β de la triangulation K_α. 107
§ 4. Applications simpliciales combinatoirement proches; prismes 110
§ 5. Groupes d'homologie des compacts (groupes de Brouwer-Vietoris); invariance des groupes d'homologie d'un polyèdre 113
§ 6. Cycles et homologies relatives (cycles et homologies modulo F) . 121
§ 7. Cycles à coefficients variables; théorème de convergence 122
§ 8. Classification homologique et homotopique des applications d'un compact dans un autre; cycles continus 130

§ 9. Approximation simpliciale d'une application continue d'un polyèdre dans un autre; degré d'une application 133
§ 10. Applications dans une pseudo-variété à bord 138

Chapitre trois

COMPLÉMENTS SUR LA TOPOLOGIE DES POLYÈDRES ET LEURS APPLICATIONS CONTINUES (ENLACEMENTS; THÉORÈME DE HOPF)

§ 1. Intersection des chaînes 147
§ 2. Enlacement des cycles 158
§ 3. Ordre d'un point relativement à un cycle 164
§ 4. Théorèmes sur les cycles enlacés: théorèmes d'existence des cycles enlacés et « petit » théorème de dualité 171
§ 5. Théorèmes de Hopf 187
Supplément au chapitre trois 200

Chapitre quatre

INTRODUCTION À LA THÉORIE HOMOLOGIQUE DE LA DIMENSION DES COMPACTS

§ 1. Premier théorème fondamental de la théorie de la dimension homologique dans son énoncé élémentaire (pour les bicompacts quelconques) 208
§ 2. Cas des compacts 215
§ 3. Théorème d'addition et quelques conséquences 221
§ 4. Deuxième théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension: décomposition des homologies 226
§ 5. Troisième théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension: théorème des obstructions et théorèmes apparentés . . 236
§ 6. Quatrième théorème fondamental: solides de dimension p dans les compacts de même dimension; nouvelle spécification de la notion de variété cantorienne (les continuums V^p) 250
§ 7. Surfaces de Pontriaguine 260
Supplément au chapitre quatre. Théorèmes de Sitnikov sur les ceintures homologiques d'un compact dans l'espace euclidien 278
§ 1. Théorème des sacs 278
§ 2. Théorème général des ceintures 283

Chapitre cinq

GROUPES ET HOMOMORPHISMES DE SITUATION D'UN COMPLEXE DANS UN AUTRE. SUITES EXACTES ET LEURS HOMOMORPHISMES

§ 1. La figure K, A, G, ses groupes et ses homomorphismes; suites exactes $\Delta(K, A, G)$ et $\nabla(K, A, G)$ 288
§ 2. Homomorphismes des suites exactes induits par les applications simpliciales des complexes 296

Chapitre six

GROUPES D'HOMOLOGIE ET DE COHOMOLOGIE DES BICOMPACTS ET HOMOMORPHISMES INDUITS PAR LEURS APPLICATIONS CONTINUES; SUITES EXACTES ET ISOMORPHISME DE DUALITÉ DANS LA FIGURE X, Φ, Γ

§ 1. Définition des Δ- et ∇-groupes d'un bicompact 306
§ 2. Définition de l'homomorphisme $f: \Delta^r X \to \Delta^r Y$ induit par une application continue $f: X \to Y$ du bicompact X dans le bicompact Y . . 308
§ 3. L'homomorphisme $\bar{f}: \nabla^r Y \to \nabla^r X$ induit par l'application continue f du bicompact X dans le bicompact Y; dualité des homomorphismes f et $\bar{f}$. Homomorphisme d'intersection $J_X^Y: \nabla^r Y \to \nabla^r X$ 312
§ 4. Cas de deux applications homotopes 318
§ 5. Cas des compacts 320
§ 6. Définition des Δ- et ∇-groupes d'un espace localement bicompact 325
§ 7. Homomorphismes liés à la figure X, Φ, Γ 326
§ 8. Suites exactes liées à la figure X, Φ, Γ 335
§ 9. Isomorphisme de dualité; dualité générale 338
§ 10. Homomorphismes de suites exactes induits par les applications continues 340
Supplément au chapitre six. Spectres de groupes directs et inverses . . 344

Chapitre sept

THÉORÈME DE HOPF ET PREMIER THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE HOMOLOGIQUE DE LA DIMENSION POUR LES BICOMPACTS, SOUS SA FORME ALGÉBRIQUE (COHOMOLOGIQUE)

§ 1. Le cas polyédral du théorème de Hopf sur le prolongement d'une application 363
§ 2. Le cas général du théorème de Hopf 372
§ 3. Premier théorème fondamental et principales définitions de la théorie homologique de la dimension 375
§ 4. Théorème de classification de Hopf 376

Supplément

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DE LA DIMENSION

§ 1. Les invariants dimensionnels fondamentaux dim, ind, Ind 380
§ 2. Complexes géométriques et abstraits; recouvrements et nerfs . . . 382
§ 3. Applications barycentriques et canoniques; théorème d'approximation 388
§ 4. Théorèmes des ε- et ω-applications 393
§ 5. Théorème des applications essentielles 395

Bibliographie 398
Index des noms 401
Notations courantes 402
Index alphabétique des matières 407

PRÉFACE À L'ÉDITION RUSSE

Le présent ouvrage fait suite au livre, écrit conjointement par B. Pasynkov et moi-même, sous le titre *Introduction à la théorie de la dimension: introduction à la théorie des espaces topologiques et à la théorie générale de la dimension* (désigné [AP] par la suite); plus exactement, le livre porté maintenant à l'attention du lecteur se présente comme la suite des chapitres 2-4 du livre [AP]. Les chapitres indiqués exposent les notions et les propositions élémentaires de la théorie de la dimension; elles seront supposées connues par le lecteur *).

Le point de vue géométrique sur lequel se base le livre [AP], et qui y est exposé en détail aux chapitres 3 et 4, trouve son expression complète justement dans la théorie homologique de la dimension, qui permet de considérer la dimension comme l'« invariant homologique » le plus élémentaire et apporter à son étude les méthodes algébriques les plus simples de la théorie homologique générale des bicompacts **) (dans la majorité des cas, des compacts seulement). Toutefois, je me suis sciemment limité au cadre de la théorie homologique élémentaire de la dimension, telle qu'elle fut construite en 1928-1932 dans mes travaux [2], [3] et développée ensuite par L. Pontriaguine, V. Boltianski, K. Sitnikov et autres, c'est-à-dire dans le cadre imposé justement par l'approche géométrique intuitive des questions traitées. Il en résulte que le développement algébrique de la théorie, effectué dans les travaux de M. Bokstein, E. Dayer, V. Kouzminov, I. Chvédov, etc., est resté en dehors de ce livre. Un sommaire de ces travaux pourra être trouvé par le lecteur dans le mémoire fondamental de Kouzminov [1] que je cite comme une des continuations possibles du présent ouvrage.

---

*) Le livre [AP] n'ayant pas été traduit en français, nous avons ajouté un Supplément dans le but de familiariser le lecteur avec les notions éclaircies dans ces chapitres et utilisées ici.— *Note du traducteur*.

**) Un espace topologique, non nécessairement séparé, s'appelle bicompact, ou quasi-compact, si chaque recouvrement ouvert de cet espace possède un sous-recouvrement fini.

La classe des espaces étudiés ici sera toujours limitée aux bicompacts et, par conséquent, nous laissons de côté non seulement les espaces normaux généraux (voir Alexandrov [6]), mais aussi, à grand regret, l'exposé des profonds résultats de K. Sitnikov [3]-[5] qui se rapportent à la théorie homologique des espaces métriques séparables de dimension finie (dans le sens classique), i.e. des sous-ensembles quelconques d'un espace euclidien. Je recommande avec insistance à tous les lecteurs de ce livre les travaux de Sitnikov, comme étant parmi les plus importants de ceux qui se rapportent à l'objet de notre étude.

Je passe au sommaire de ce livre.

Sous l'hypothèse générale de bicompaticité de l'espace, nous démontrons seulement le premier théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension (au § 1 du chapitre 4 et — sous sa forme cohomologique — au chapitre 7). Le chapitre 7 contient, pour les bicompacts quelconques, la démonstration du théorème de classification de Hopf et son théorème sur l'extension des applications continues. Par suite, nous sommes amenés à donner au chapitre 6 les fondements de la théorie homologique des bicompacts, y compris le théorème sur la suite exacte et le théorème des propriétés homologiques de la disposition d'un ensemble fermé dans un bicompact. Les résultats qui s'y rapportent sont essentiellement contenus dans mon article [5], mais leur exposé dans le chapitre 6 (ainsi que le chapitre 5 sur lequel se fonde le chapitre 6) appartient en grande partie à B. Pasynkov, auquel j'exprime ma reconnaissance chaleureuse.

Le quatrième chapitre est le chapitre central du livre : il est consacré aux théorèmes fondamentaux de la théorie homologique de la dimension des compacts (comme nous l'avons déjà mentionné, ce n'est que dans le premier paragraphe de ce chapitre que nous donnons une démonstration du premier théorème fondamental dans le cas plus général des bicompacts quelconques). Les faits exposés dans ce chapitre sont basés, premièrement, sur la théorie homologique élémentaire des polyèdres et des compacts (exposée en détail dans les deux premiers chapitres), deuxièmement, sur la théorie élémentaire des applications continues des polyèdres (y compris le théorème de classification de Hopf) et sur les éléments de la théorie des ensembles enlacés ; tout ceci est exposé au troisième chapitre. Ainsi, les trois premiers chapitres donnent un exposé systématique des éléments de la topologie combinatoire élémentaire des polyèdres et des compacts. Il me semble que, malgré le développement ultérieur des méthodes algébriques modernes en topologie, la connaissance des méthodes de la topologie combinatoire élémentaire, telle qu'elle a été forgée dans les travaux de Brouwer, Alexander, Hopf, Lefschetz et d'autres, pour les polyèdres et les compacts, peut toujours être, même aujourd'hui, la source de nouvelles approches géométri-

ques, en particulier, des problèmes de la théorie homologique de la dimension qui ne sont pas encore résolus ; son étude ne me semble donc pas superflue. Lorsque je parle des problèmes non résolus de la théorie homologique de la dimension, je propose, par exemple, de remettre en question la condition de finitude de la dimension (dans le sens classique) des compacts considérés et, en particulier, le problème suivant : existe-t-il un compact de dimension infinie dont certaines dimensions homologiques (lesquelles?) sont finies (ou même égales à 1)?

Prenant en considération l'extrême importance des résultats du chapitre 4 et le fait que, pour la compréhension de ces résultats, il est tout à fait suffisant de n'envisager que les groupes de coefficients discrets, tout en cherchant à rendre ces résultats accessibles, nous avons, dans les quatre premiers chapitres, exclu du texte principal et regroupé dans des sous-paragraphes imprimés en petits caractères (au chapitre 1, n° 7 du § 2, n°s 4, 9 du § 4 ; n° 4 du § 8 ; au chapitre 2, n° 5 du § 7 et au chapitre 3, une partie du n° 4 du § 4) tous les renseignements qui concernent les groupes de coefficients topologiques (plus précisément, R et $\varkappa$). En même temps, dans l'énoncé du théorème de Hopf (chapitre 3) et de la majorité des théorèmes du chapitre 4, qui affirment l'existence d'un cycle de forme spéciale relativement à tel ou tel groupe de coefficients, nous avons inclus les groupes R, $\varkappa$, car ici la topologie du groupe d'homologie ne joue aucun rôle. Il est vrai que l'invariance des groupes d'homologie des polyèdres est démontrée auj chapitre 2 seulement dans le sens algébrique, i.e. pour les groupes discrets. Toutefois, nous démontrons à nouveau, au chapitre 6, l'invariance de ces groupes dans le sens plus fort.

Le Supplément au chapitre 4 contient les remarquables théorèmes de Sitnikov (avec esquisses de démonstrations seulement) concernant les « ceintures » des compacts de l'espace euclidien. Le plus simple d'entre eux est le théorème dit des « sacs » (c'est le cas particulier en dimension $n - 1$ du théorème général des ceintures ; l'autre cas extrême du même théorème général est le théorème des obstructions, présenté comme résultat principal du § 5 au quatrième chapitre).

Le lecteur aura compris, d'après les remarques précédentes, que le livre présenté à son attention ne prétend aucunement à être un exposé complet, et à plus forte raison moderne, de la question traitée ; au contraire, le livre mérite pleinement le qualificatif d'« old fashioned ».

Le livre peut être abordé par une large catégorie de lecteurs, en commençant par les étudiants en mathématiques des premières années des universités. Néanmoins, comme il a déjà été mentionné, pour comprendre et pouvoir lire avec intérêt ce livre, il faut connaître les notions fondamentales qui se rapportent à la dimension, de la manière dont elles sont exposées dans les chapitres 2, 3 et dans les sept premiers paragraphes du chapitre 4 du livre [AP] (ou, le cas échéant, dans le chapitre 5 de mon livre *Topologie combinatoire* [TC]), savoir dominer les notions telles que complexe simplicial

et application simpliciale, nerf d'un recouvrement, etc., et enfin, connaître les théorèmes tels que théorèmes des ω- (ou au moins des ε-) applications et le théorème des applications essentielles *).

En ce qui concerne l'étude ultérieure des travaux plus poussés, je ne fais que répéter ma recommandation de s'adresser, d'une part, aux travaux de Sitnikov [3] à [5] et, d'autre part, à l'article déjà cité de Kouzminov [1] qui passe en revue les résultats acquis sur la voie plutôt algébrique.

En conclusion, je voudrais remercier tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à mon travail sur ce livre.

J'ai déjà exprimé ma reconnaissance à B. Pasynkov. La démonstration du deuxième théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension (chapitre 4) est essentiellement due à R. Froum-Ketkov et à A. Maltsev ; c'est sous la plume de A. Maltsev que la démonstration a trouvé sa forme définitive. Je remercie profondément V. Zaïtsev pour son aide variée et le soutien qu'il a apporté à mon travail, en particulier aux premiers chapitres.

Le manuscrit en entier a été lu par O. Lokoutsievski et A. Maltsev ; leur lecture a contribué à l'amélioration sensible du texte. A. Maltsev a accepté d'effectuer le difficile travail de revision de ce livre ; je lui dois un grand nombre de perfectionnements, bien plus importants que ceux qu'un auteur est en droit d'attendre d'un travail usuel de rédacteur.

Je remercie chaleureusement tous mes collègues et mes élèves cités ici.

P. ALEXANDROV

Moscou, octobre 1973

---

*) Exposés dans le Supplément (p. 395).— *Note du traducteur.*

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA TOPOLOGIE COMBINATOIRE DES COMPLEXES

§ 1. Orientation de l'espace R^n; orientation d'un simplexe

1. Orientation de l'espace R^n. Tout système $\mathrm{I} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ de n vecteurs linéairement indépendants $u_1, \ldots, u_n$ d'un espace affine R^n s'appelle *base* de R^n (plus exactement, base de l'espace vectoriel associé à l'espace affine R^n). Si deux bases $\mathrm{I} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ et $\mathrm{II} = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ sont données, nous supposerons données les formules de passage de la première base à la seconde, i.e. les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} v_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n, \\ v_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \ldots + c_{2n}u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \ldots + c_{nn}u_n. \end{cases}$$

La matrice C, composée des coefficients c_{ij}, s'appelle *matrice de passage* de la base $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ à la base $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Cette matrice est non dégénérée; si son déterminant est positif, les bases $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ et $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ sont dites *équivalentes* ou *de même signe* (ou *de même orientation*); dans le cas contraire, elles sont dites *de signe contraire* (ou *d'orientation opposée*).

On voit facilement *) que cette définition de l'équivalence satisfait aux axiomes de l'égalité (réflexivité, symétrie, transitivité), de sorte que l'on obtient une partition de l'ensemble de toutes les bases en classes de bases de même signe. Ces classes sont au nombre de deux. En effet, les deux bases $\mathrm{I} = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ et $\mathrm{II} = \langle -u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ ne sont pas équivalentes puisque le déterminant de la matrice de passage de la base I à la base II est égal à -1. Ainsi on a au moins deux classes d'équivalence. Il reste à démontrer que chaque base III, non équivalente à la base I, est nécessairement équivalente à la base II.

---

*) Voir, par exemple, P. Alexandrov, *Cours de géométrie analytique, complété de notions d'algèbre nécessaires* (en russe), Moscou, éd. « Naouka », 1968, chap. 9, § 1; les raisonnements effectués pour $n = 3$ peuvent être généralisés à n quelconque.

Par hypothèse, le déterminant de la matrice de passage de la base I à la base III est négatif ; la matrice de passage de II à I a un déterminant égal à -1 ; par conséquent, la matrice de passage de II à III (étant le produit des matrices de passage de II à I et de I à III) possède un déterminant positif, donc les bases III et II sont de même signe.

Ainsi l'ensemble de toutes les bases de R^n se décompose en deux classes telles que deux bases quelconques appartenant à une même classe sont de même signe, tandis que deux bases choisies dans des classes différentes sont de signe contraire.

Remarque 1. On voit facilement (voir l'endroit cité du livre AG) que deux bases obtenues l'une de l'autre par transposition (i.e. par permutation de deux quelconques des n vecteurs qui forment la base donnée) sont de signe contraire.

Remarque 2. Il est important de noter que si l'on remplace dans une base quelconque $\mathrm{I} = \langle u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_n \rangle$ un vecteur u_i par le vecteur λu_i, $\lambda \neq 0$, on obtient une base $\mathrm{II} = \langle u_1, u_2, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_n \rangle$ de même signe que la base I si $\lambda > 0$, et de signe contraire si $\lambda < 0$. (Ceci découle du fait évident que le déterminant de la matrice de passage de la base I à la base II est égal à λ dans le cas considéré.)

On sait que le système $(o\,;\, u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs linéairement indépendants $u_1, \ldots, u_n$ de l'espace R^n, appliqués à un point o, s'appelle *repère* de l'espace R^n.

Ainsi, le repère $(o\,;\, u_1, \ldots, u_n)$ est constitué par la base $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ et l'origine o.

Deux repères $(o\,;\, u_1, \ldots, u_n)$ et $(o'\,;\, u'_1, \ldots, u'_n)$ sont dits *de même signe* (resp. *de signe contraire*), si les bases $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ et $\langle u'_1, \ldots, u'_n \rangle$ sont de même signe (resp. de signe contraire). Par conséquent, on a une partition de tous les repères de l'espace R^n en deux classes composée chacune de repères de même signe, tandis que deux repères appartenant à des classes distinctes sont toujours de signe contraire.

Chacune de ces deux classes s'appelle *orientation* de l'espace R^n. L'une d'elles (choisie arbitrairement) sera dite positive, l'autre, négative.

L'orientation de l'espace R^n est déterminée par le choix d'un repère quelconque de cet espace qui sera (de même que tous les repères de même signe) appelé positif. Il est évident que dans cette définition de l'orientation le mot « repère » aurait pu être remplacé par le mot « base ».

2. Orientation du simplexe de dimension n. Soit un simplexe T^n (géométrique ou abstrait) de dimension n, $n \geqslant 1$. Ecrivons ses

sommets dans un ordre fixe $e_0, e_1, \ldots, e_n$. On obtient un *squelette ordonné* (ensemble de sommets) $e_0, e_1, \ldots, e_n$ du simplexe T^n.

Deux squelettes ordonnés $e_0, e_1, \ldots, e_n$ et $e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ du simplexe T^n sont dits *équivalents* (ou *de même signe*), si l'on peut passer de l'un à l'autre par une permutation paire. Les axiomes d'équivalence sont satisfaits par cette définition, et l'ensemble des $(n+1)!$ squelettes ordonnés du simplexe T^n se décompose en deux classes; deux squelettes ordonnés quelconques d'une même classe sont équivalents, tandis que deux squelettes ordonnés appartenant à des classes distinctes ne le sont pas. Chacune de ces classes s'appelle *orientation du simplexe* T^n; l'une est dite *positive*, l'autre *négative*. Si l'orientation positive du simplexe T^n est désignée par t^n, l'orientation négative sera notée $-t^n$. Chaque ordre des sommets $e_0, e_1, \ldots, e_n$ du simplexe T^n définit une orientation de ce simplexe composée de tous ses squelettes ordonnés équivalents au squelette ordonné $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Cette orientation sera notée

$$t^n = (e_0 e_1 \ldots e_n).$$

Ainsi, si l'on a

$$t^n = (e_0 e_1 \ldots e_n),$$

alors

$$-t^n = (e_{i_0} e_{i_1} \ldots e_{i_n}),$$

où $e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ est une permutation impaire quelconque des sommets $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Le simplexe T^n est désigné par

$$|\, t^n \,| = |\, -t^n \,| = |\, e_0 \ldots e_n \,|.$$

Jusqu'ici le simplexe T^n était sensé être quelconque, aussi bien abstrait que géométrique. Supposons maintenant que T^n est un simplexe géométrique de dimension n de l'espace R^n de dimension n. Chaque squelette ordonné $e_0, e_1, \ldots, e_n$ du simplexe T^n détermine un certain repère de l'espace R^n, à savoir le repère d'origine au point e_0 et de base

$$(2) \qquad u_1 = \overrightarrow{e_0 e_1}, \qquad u_2 = \overrightarrow{e_0 e_2}, \quad \ldots, \quad u_n = \overrightarrow{e_0 e_n}.$$

Inversement, soit P un repère de l'espace R^n composé de l'origine, désignée par e_0, et des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ appliqués à ce point dont les extrémités seront désignées respectivement par $e_1, e_2, \ldots, e_n$, de sorte que

$$u_1 = \overrightarrow{e_0 e_1}, \qquad u_2 = \overrightarrow{e_0 e_2}, \qquad \ldots, \qquad u_n = \overrightarrow{e_0 e_n}.$$

Le simplexe $|\, e_0 e_1 \ldots e_n \,| = T^n$ s'avère alors déterminé, avec un ordre bien défini de ses sommets $e_0, e_1, \ldots, e_n$, de plus le squelette ordonné $e_0, e_1, \ldots, e_n$ du simplexe T^n détermine précisément le repère P d'après la règle indiquée ci-dessus.

Ainsi, il existe une bijection naturelle entre tous les repères de l'espace R^n et tous les squelettes ordonnés de dimension n situés dans cet espace. Montrons que cette bijection conserve les orientations, c'est-à-dire que deux squelettes ordonnés de même signe du simplexe T^n correspondent à des repères de même signe, et des squelettes de signe contraire correspondent à des repères de signe opposé.

Il suffit de démontrer que deux squelettes ordonnés I et II du simplexe T^n, obtenus l'un de l'autre par une transposition de deux sommets, déterminent des repères P_{I} et P_{II} de signe contraire.

Considérons séparément trois cas.

Premier cas: on transpose les sommets e_i et e_j (en supposant que $i < j$) tels que $i \neq 0$ et $j \neq 0$. Alors, pour les repères correspondants $P_{\mathrm{I}} = (e_0;\ u_1, \ldots, u_n)$ et $P_{\mathrm{II}} = (e_0;\ u'_1, \ldots, u'_n)$ on a

$$u'_i = u_j,\ u'_j = u_i,\ u'_s = u_s \text{ pour } s \neq i, j,$$

de sorte que les bases $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ et $\langle u'_1, \ldots, u'_n \rangle$ diffèrent d'une transposition et les repères P_{I} et P_{II} sont donc de signe contraire.

Deuxième cas: on transpose les sommets e_0 et e_1. Si $P_{\mathrm{I}} = (e_0;\ u_1, \ldots, u_n)$ et $P_{\mathrm{II}} = (e_1;\ u'_1, \ldots, u'_n)$, alors

$$u'_1 = \overrightarrow{e_1 e_0},\quad u'_2 = \overrightarrow{e_1 e_2},\quad \ldots,\quad u'_n = \overrightarrow{e_1 e_n},$$

d'où

$$u'_1 = -u_1,\quad u'_2 = u_2 - u_1,\quad \ldots,\quad u'_n = u_n - u_1.$$

La matrice de passage de la base $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ à la base $\langle u'_1, \ldots, u'_n \rangle$ sera

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est égal à -1, de sorte que les repères sont à nouveau de signe contraire.

Troisième cas. On transpose les sommets e_0 et e_i, $i > 1$. Considérons les squelettes

$$\mathrm{I} = e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n,$$
$$\mathrm{II} = e_i, e_1, \ldots, e_0, \ldots, e_n,$$

et les squelettes ordonnés auxiliaires

$$\mathrm{III} = e_1, e_i, \ldots, e_0, \ldots, e_n,$$
$$\mathrm{IV} = e_1, e_0, \ldots, e_i, \ldots, e_n.$$

On peut passer du squelette II au squelette I en passant, de proche en proche, de II à III, de III à IV et de IV à I. Chacun de ces pas-

sages appartient à un des types déjà considérés, de sorte que les repères P_{II} et P_{III} sont de signe contraire, P_{II} et P_{IV} de même signe et enfin P_{II} et P_I à nouveau de signe contraire.

Le résultat obtenu signifie que toute orientation t^n d'un simplexe quelconque $T^n = |e_0e_1 \ldots e_n|$ définit univoquement une orientation de l'espace R^n; des orientations opposées du simplexe T^n définissent des orientations opposées de l'espace R^n.

Inversement, en donnant une orientation de l'espace R^n, on donne une orientation d'un simplexe T^n de dimension n; à savoir, l'orientation $t^n = (e_0e_1 \ldots e_n)$ déterminée par la condition que le repère $(e_0; u_1, \ldots, u_n)$, où

$$u_1 = \overrightarrow{e_0e_1},\ u_2 = \overrightarrow{e_0e_2},\ \ldots,\ u_n = \overrightarrow{e_0e_n},$$

appartienne à l'orientation positive de R^n.

Jusqu'ici nous avions pu comparer les orientations (de même signe et de signe contraire) des squelettes d'un même simplexe. Ayant établi une bijection entre les squelettes ordonnés et les repères, on peut maintenant comparer l'orientation de deux simplexes géométriques quelconques, situés dans un même espace R^n; on voit qu'il y a une équivalence complète entre la notion de repère et celle de schéma ordonné de dimension n. Plus précisément, les orientations t_1^n et t_2^n des simplexes de l'espace R^n sont dites *de même signe* ou *identiques* (on dit également que les simplexes t_1^n et t_2^n ont même orientation) si elles déterminent une même orientation de l'espace R^n, et *de signe contraire* ou *opposées* si elles déterminent des orientations différentes de l'espace R^n.

Enfin, soient $t^n = (e_0e_1 \ldots e_n)$ et $t'^n = (e_0'e_1' \ldots e_n')$ deux simplexes orientés de dimension n de l'espace R^n. Il existe une transformation affine unique de l'espace R^n qui applique les points e_0, $e_1, \ldots, e_n$ respectivement sur les points $e_0', e_1', \ldots, e_n'$; pour l'obtenir, il faut faire correspondre à chaque point M de l'espace R^n le point de l'espace R^n qui possède relativement au repère

$$\mathrm{I}' = (e_0'; \overrightarrow{e_0'e_1'}, \overrightarrow{e_0'e_2'}, \ldots, \overrightarrow{e_0'e_n'})$$

les mêmes coordonnées que le point M possédait relativement au repère

$$\mathrm{I} = (e_0; \overrightarrow{e_0e_1}, \overrightarrow{e_0e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_0e_n}).$$

Puisque la matrice de cette application affine et la matrice de passage du repère I au repère II s'obtiennent l'une de l'autre par transposition et ont donc le même déterminant, on a la proposition suivante :

Théorème 1. *Deux simplexes orientés de dimension n $t^n = (e_0e_1 \ldots \ldots e_n)$ et $t'^n = (e_0'e_1' \ldots e_n')$ de R^n ont la même orientation si et*

seulement si la transformation affine de l'espace R^n qui applique les sommets $e_0, e_1, \ldots, e_n$ du simplexe t^n respectivement sur les sommets $e'_0, e'_1, \ldots, e'_n$ du simplexe t'^n possède un déterminant positif.

Nous dirons que le repère $\mathrm{I} = (o; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est appliqué sur le repère $\mathrm{II} = (o'; u'_1, \ldots, u'_n)$ par une *déformation continue* si pour tout θ, $a \leqslant \theta \leqslant b$, il existe un repère $\mathrm{I}^\theta = (o^{(\theta)}, u_1^{(\theta)}, \ldots, u_n^{(\theta)})$ tel que les coordonnées de ses éléments (i.e. du point $o^{(\theta)}$ et des vecteurs $u_1^{(\theta)}, u_2^{(\theta)}, \ldots, u_n^{(\theta)}$) relativement au repère I sont des fonctions continues de θ; en outre, le repère $\mathrm{I}^{(\theta)}$ pour $\theta = a$ coïncide avec le repère donné I et pour $\theta = b$, avec le repère II. Comme dans le cours de géométrie analytique (en dimension trois), on démontre le

Théorème 2. *Si le repère* I *est appliqué sur le repère* II *par une déformation continue, les deux repères appartiennent à une même orientation de l'espace R^n.*

On déduit immédiatement de ce théorème le

Théorème 2'. *Si le simplexe orienté $t_1^n = (e_0^{(1)} e_1^{(1)} \ldots e_n^{(1)})$ est appliqué sur le simplexe orienté $t_2^n = (e_0^{(2)} e_1^{(2)} \ldots e_n^{(2)})$ par une déformation continue (i.e. pour tout θ, $a \leqslant \theta \leqslant b$, il existe des points $e_0^{(\theta)}, e_1^{(\theta)}, \ldots, e_n^{(\theta)}$ dépendant de manière continue de θ et formant pour chaque θ un système indépendant *)), alors les orientations t_1^n et t_2^n coïncident.*

Ce théorème implique à son tour la

Remarque 3. Soient $t_1^n = (e_0 \ldots e_{n-1} e_n)$ et $t_2^n = (e_0 \ldots e_{n-1} e'_n)$ deux simplexes orientés dont seuls les derniers sommets e_n et e'_n diffèrent, tandis que les autres sommets coïncident et sont donnés dans le même ordre. Alors les simplexes t_1^n et t_2^n sont de même signe ou de signe contraire suivant que les points e_n et e'_n sont situés du même côté ou des côtés différents de l'hyperplan R^{n-1} qui contient les sommets $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$.

En effet, si e_n et e'_n sont du même côté de l'hyperplan R^{n-1}, on peut obtenir la déformation qui applique $(e_0 e_1 \ldots e_{n-1} e_n)$ sur $(e_0 e_1 \ldots e_{n-1} e'_n)$ en faisant glisser le point e_n uniformément dans le temps $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ le long du segment $e_n e'_n$, à partir de son origine e_n jusqu'à l'extrémité e'_n, et en laissant fixes les autres sommets $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Si les points e_n et e'_n sont situés de part et d'autre de l'hyperplan R^{n-1}, alors les vecteurs $\overrightarrow{e_0 e_n}$ et $\overrightarrow{e_0 e'_n}$ sont également situés de

*) Un système de points $e_0, \ldots, e_n$ de R^n sera dit indépendant ou libre s'il n'existe pas de plan de dimension $n - 1$ qui contienne tous ces points.— *Note du traducteur.*

part et d'autre de ce plan et, par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{e_0e'_n}$ et $-\overrightarrow{e_0e_n}$ sont du même côté, de sorte que les repères $(e_0;\ \overrightarrow{e_0e_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_0e_{n-1}},\ \overrightarrow{e_0e_n})$ et $(e_0;\ \overrightarrow{e_0e_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_0e_{n-1}},\ -\overrightarrow{e_0e_n})$ sont de même signe et les repères $(e_0;\ \overrightarrow{e_0e_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_0e_{n-1}},\ \overrightarrow{e_0e_n})$ et $(e_0;\ \overrightarrow{e_0e_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_0e_{n-1}},\ \overrightarrow{e_0e'_n})$ sont de signe contraire, ce qui signifie à son tour que les simplexes $(e_0e_1\ \ldots\ e_{n-1}e_n)$ et $(e_0e_1\ \ldots\ e_{n-1}e'_n)$ sont d'orientation opposée.

Par la suite nous aurons également besoin de la remarque suivante.

Remarque 4. Soit l'hyperplan R^{n-1} de l'espace R^n contenant deux simplexes de même orientation $t^{n-1} = (e_0e_1\ \ldots\ e_{n-1})$ et $t'^{n-1} = (e'_0e'_1\ \ldots\ e'_{n-1})$. Soit en outre un point e non contenu dans le plan R^{n-1}. Alors les simplexes $(et^{n-1}) = (ee_0e_1\ \ldots\ e_{n-1})$ et $(et'^{n-1}) = (ee'_0e'_1\ \ldots\ e'_{n-1})$ sont de même orientation.

Démonstration. Puisqu'une translation laisse invariante l'orientation d'un simplexe, on peut admettre sans perte de généralité que $e'_0 = e_0$.

Prenons maintenant deux repères de l'espace R^n: $\mathrm{I} = (e_0;\ u,\ u_1,\ \ldots,\ u_{n-1})$ et $\mathrm{II} = (e_0;\ u',\ u'_1,\ \ldots,\ u'_{n-1})$, où

$$u = \overrightarrow{e_0e};\quad u_1 = \overrightarrow{e_0e_1},\quad \ldots,\quad u_{n-1} = \overrightarrow{e_0e_{n-1}};$$
$$u' = \overrightarrow{e_0e};\quad u'_1 = \overrightarrow{e_0e'_1},\quad \ldots,\quad u'_{n-1} = \overrightarrow{e_0e'_{n-1}}.$$

Supposons que les bases $\mathrm{I}_0 = \langle u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}\rangle$ et $\mathrm{II}_0 = \langle u'_1,\ \ldots,\ u'_{n-1}\rangle$ de l'espace R^{n-1} sont liées par la transformation

$$\begin{aligned}
u'_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1,\,n-1}u_{n-1},\\
u'_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \ldots + c_{2,\,n-1}u_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u'_{n-1} &= c_{n-1,\,1}u_1 + c_{n-1,\,2}u_2 + \ldots + c_{n-1,\,n-1}u_{n-1}
\end{aligned}$$

de déterminant positif c. Mais alors les bases $\langle u,\ u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}\rangle$ et $\langle u',\ u'_1,\ \ldots,\ u'_{n-1}\rangle$ de l'espace R^n sont liées entre elles par la transformation

$$\begin{aligned}
u' &= u,\\
u'_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1,\,n-1}u_{n-1},\\
u'_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \ldots + c_{2,\,n-1}u_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u'_{n-1} &= c_{n-1,\,1}u_1 + c_{n-1,\,2}u_2 + \ldots + c_{n-1,\,n-1}u_{n-1},
\end{aligned}$$

de même déterminant $c > 0$. La remarque 4 est démontrée. On laisse au lecteur le soin de la généraliser au cas de deux points, e_1 et e_2, situés de part et d'autre ou du même côté de l'hyperplan R^{n-1}.

3. Orientation du simplexe de dimension nulle. La notion d'orientation du simplexe de dimension n, introduite dans ce paragraphe, n'a plus de signification lorsque $n = 0$. Néanmoins, puisque toutes les constructions ultérieures seront effectuées pour $n \geqslant 0$, il nous faudra introduire, d'une manière qui semblera de prime abord artificielle, l'orientation d'un simplexe de dimension nulle. On entendra par *orientation d'un simplexe* $t^0 = e$ le point e lui-même auquel est associé le nombre $+1$ ou le nombre -1 (le point e pris avec le signe « + » ou avec le signe « — »).

L'argument qu'on peut donner en faveur de ce concept est la notion de frontière du vecteur $\overrightarrow{AB}$ considérée comme couple de points B et A, dotés le premier du signe « + » et le second du signe « — ».

Nous verrons dans le paragraphe suivant comment la notion de frontière d'un vecteur se généralise à la notion de frontière d'un simplexe orienté, qui est fondamentale pour la topologie algébrique.

§ 2. Coefficients d'incidence ; chaînes ; opérateurs Δ et ∇; groupes de Betti ; complexes cellulaires

1. Coefficients d'incidence. Soit t^n un simplexe orienté et soit t^{n-1} une de ses faces de dimension $n - 1$ orientée de manière quelconque. Le simplexe t^n possède un seul sommet e qui n'est pas un sommet de la face $|t^{n-1}|$ (on l'appelle sommet *opposé* à cette face). Choisissons un ordre quelconque des sommets $e_1, \ldots, e_n$ de la face $|t^{n-1}|$, qui détermine son orientation t^{n-1}. Alors, en commençant le numérotage des sommets par e on obtient un ordre bien défini

$$e, e_1, \ldots, e_n$$

de tous les sommets du simplexe $|t^n|$ et cet ordre détermine soit l'orientation t^n, soit l'orientation $-t^n$ *). Dans le premier cas nous dirons que le *coefficient d'incidence* $(t^n : t^{n-1})$ de deux simplexes orientés t^n et t^{n-1} est égal à $+1$, dans le deuxième, qu'il est égal à -1.

---

*) L'orientation $(ee_1 \ldots e_n) = \pm t^n$ ne dépend que de l'orientation du simplexe $t^{n-1} = (e_1 e_2 \ldots e_n)$ et non de l'ordre des sommets $e_1, e_2, \ldots, e_n$ qui la détermine. En effet, une permutation paire des sommets $e_1, \ldots, e_n$ définit une permutation paire des sommets $e, e_1, \ldots, e_n$ (puisque e reste à sa place). En vertu de cette remarque, il est correct de désigner le simplexe orienté $(ee_1 \ldots e_n)$ par (et^{n-1}).

Autrement dit, le coefficient d'incidence $\varepsilon = (t^n : t^{n-1})$ se détermine à partir de l'équation

$$t^n = \varepsilon\,(et^{n-1}).$$

On a évidemment

$$(1) \qquad (-t^n : t^{n-1}) = (t^n : -t^{n-1}) = -(t^n : t^{n-1}).$$

Supposons en outre que $t^n = (e_0e_1 \ldots e_n)$ et $t_i^{n-1} = (e_0e_1 \ldots \ldots \hat{e}_i \ldots e_n)$, où $\hat{e}_i$ signifie que le sommet e_i a été omis. On a alors *)

$$(t^n : t_i^{n-1}) = (-1)^i,$$

de sorte qu'en particulier

$$(2) \qquad ((e_0e_1e_2\ldots e_n) : (e_1e_2\ldots e_n)) + ((e_0e_1e_2\ldots e_n) : (e_0e_2\ldots e_n)) = 0.$$

Considérons maintenant un simplexe de dimension n, ses deux faces de dimension $n-1$ et une face de dimension $n-2$, commune aux deux faces de dimension $n-1$ choisies. Choisissons des orientations tout à fait quelconques de ces quatre simplexes et désignons-les par t^n, t_0^{n-1}, t_1^{n-1}, t^{n-2}. Numérotons les sommets de telle sorte que l'on ait

$$|t^n| = |e_0e_1e_2\ldots e_n|; \quad |t_0^{n-1}| = |e_1e_2\ldots e_n|;$$
$$|t_1^{n-1}| = |e_0e_2\ldots e_n|; \quad t^{n-2} = (e_2\ldots e_n).$$

Démontrons l'égalité

$$(3) \qquad (t^n : t_0^{n-1})(t_0^{n-1} : t^{n-2}) + (t^n : t_1^{n-1})(t_1^{n-1} : t^{n-2}) = 0.$$

Sans perte de généralité, on peut admettre $(t_0^{n-1} : t^{n-2}) = +1$, $(t_1^{n-1} : t^{n-2}) = +1$. En effet, si au moins une des deux dernières égalités n'était pas satisfaite et l'on avait par exemple $(t_0^{n-1} : t^{n-2}) = -1$, alors on aurait pu remplacer dans (3) l'orientation t_0^{n-1} par $-t_0^{n-1}$ et le premier membre de l'égalité (3) n'aurait pas changé.

Ainsi, il suffit de démontrer l'égalité (3) dans le cas $(t_0^{n-1} : t^{n-2}) = (t_1^{n-1} : t^{n-2}) = 1$; mais dans ce cas, vu les notations choisies, on a

$$t_0^{n-1} = (e_1e_2\ldots e_n), \qquad t_1^{n-1} = (e_0e_2\ldots e_n)$$

et l'égalité (3) à démontrer se transforme dans l'égalité (2) déjà établie.

Posons maintenant $(t^n : t^{n-1}) = 0$ pour deux simplexes orientés t^n, t^{n-1}, lorsque le simplexe $|t^{n-1}|$ n'est pas une face du simplexe $|t^n|$. Désignant par t_i^{n-1} pour $i = 0, 1, \ldots, n$ des orientations tout à fait quelconques des faces de dimension $n-1$ du simplexe $|t^n|$, nous pouvons écrire l'égalité (3) sous la forme

$$(4) \qquad \sum_i (t^n : t_i^{n-1})(t_i^{n-1} : t^{n-2}) = 0,$$

*) Puisque la permutation $e_ie_0 \ldots \hat{e}_i \ldots e_n$ s'obtient de $e_0e_1 \ldots \ldots e_i \ldots e_n$ par i transpositions (il faut transposer e_i avec e_{i-1}, ensuite avec e_{i-2}, etc.).

puisque tous les termes de cette somme, sauf les deux termes correspondant aux faces t_0^{n-1} et t_1^{n-1} qui contiennent la face t^{n-2}, sont nuls.

L'exposé ci-dessus contient la démonstration du théorème fondamental suivant :

Théorème 3. *Si K est un complexe simplicial complet* *), *et* $|t^n|$, $|t^{n-2}|$ *ses simplexes quelconques de dimension respective n et $n-2$, alors, en choisissant pour chaque simplexe de dimension $n-1$ du complexe K une orientation t_i^{n-1} déterminée, on obtient l'égalité* (4), *où la somme s'effectue sur tous les simplexes de dimension $n-1$ de K.*

2. Chaînes; opérateur Δ; groupes d'homologie. La frontière Δt^n d'un simplexe orienté t^n s'obtient en attribuant à chaque face t_i^{n-1} d'orientation arbitraire en qualité de « poids » son coefficient d'incidence $(t^n : t_i^{n-1})$. Plus exactement, la frontière se définit comme l'expression algébrique formelle suivante :

$$\Delta t^n = \sum_{i=0}^{n} (t^n : t_i^{n-1})\, t_i^{n-1}, \tag{5}$$

où l'on prend la somme sur toutes les $n+1$ faces de dimension $n-1$ du simplexe t^n, munies d'orientations quelconques. En particulier, si $t^n = (e_0 e_1 \ldots e_n)$ et $t_i^{n-1} = (e_0 \ldots \hat{e}_i \ldots e_n)$, alors

$$\Delta t^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t_i^{n-1}.$$

La frontière d'un simplexe orienté est un cas particulier de la notion générale fondamentale de la topologie combinatoire — celle de chaîne : une chaîne de dimension r (r-chaîne) d'un complexe K se définit en affectant à chaque r-simplexe orienté t_i^r un coefficient entier, ou « poids », soumis à la condition suivante : si le simplexe t_i^r est affecté du poids a_i, alors le simplexe $-t_i^r$ doit être effectué du poids $-a_i$. Autrement dit, une *r-chaîne* est une fonction à valeurs entières définie sur l'ensemble de tous les r-simplexes orientés du complexe donné K, soumise à la seule condition : ses valeurs sur deux orientations opposées d'un même simplexe du complexe K sont égales en valeur absolue mais de signe contraire. Considérons une r-chaîne x^r du complexe K. Supposons choisie, pour chaque r-simplexe $|t_i^r|$ de ce complexe, une certaine orientation notée t_i^r ; désignons par a_i la valeur de la chaîne x^r sur le simplexe t_i^r ; en affectant cette valeur au simplexe t_i^r, on peut écrire la chaîne x^r sous la forme $x^r = \sum_i a_i t_i^r$; cette notation, qui ressemble à celle d'une forme linéaire, exprime seulement le fait que la fonction x^r prend la valeur a_i^r sur le simplexe

*) Voir Supplément.— *Note du traducteur.*

t_i^r ; on traduit ce fait en disant que le simplexe t_i^r figure dans la chaîne x^r avec le coefficient a_i. Cette notation est motivée par les considérations suivantes. Une chaîne qui prend sur le simplexe orienté t_i^r la valeur 1 et s'annule sur tous les autres simplexes s'identifie naturellement avec le simplexe orienté t_i^r ; il est naturel d'écrire $x^r = t_i^r$. Mais alors la chaîne qui prend sur t_i^r donné la valeur a_i et s'annule sur les autres simplexes doit être notée par $a_i t_i^r$, tandis que la chaîne qui prend sur chaque t_i^r la valeur a_i, par $x^r = \sum_i a_i t_i^r$.

On peut ajouter les chaînes comme des formes linéaires ; pour cette opération les r-chaînes du complexe K forment un groupe désigné par $L^r K$ et appelé *groupe des r-chaînes du complexe K*.

Nous pouvons maintenant dire que la *frontière d'un r-simplexe orienté* t^r du complexe K est une $(r-1)$-chaîne Δt^r qui prend sur chaque $(r-1)$-simplexe orienté t^{r-1} du complexe K une valeur égale au coefficient d'incidence $(t^r : t^{r-1})$, pour $r \geqslant 1$. Par définition, la frontière du simplexe de dimension zéro est nulle : $\Delta t^0 = 0$.

Pour chaque chaîne $x^r = \sum a_i t_i^r$ du complexe K, la *frontière* Δx^r se définit comme une $(r-1)$-chaîne donnée par la formule

$$\Delta x^r = \sum_i a_i \Delta t_i^r .$$

Cela signifie (selon la formule (5)) que

$$\Delta x^r = \sum_j b_j t_j^{r-1},$$

où $b_j = \sum_i (t_i^r : t_j^{r-1}) a_i$. Evidemment, pour deux chaînes x_1^r, x_2^r on a

$$\Delta (x_1^r + x_2^r) = \Delta x_1^r + \Delta x_2^r ,$$

de sorte que Δ est un opérateur linéaire qui définit un homomorphisme du groupe $L^r K$ de toutes les r-chaînes du complexe K dans le groupe $L^{r-1} K$ de toutes les $(r-1)$-chaînes du même complexe *). Le noyau de cet homomorphisme est le sous-groupe $Z^r K$ du groupe $L^r K$ consistant de toutes les chaînes de frontière nulle ; de telles chaînes s'appellent *cycles*, le groupe $Z^r K$ s'appelle *groupe des cycles du complexe K*. L'image du groupe $L^r K$ par l'homomorphisme Δ est un sous-groupe $H^{r-1} K$ (du groupe $L^{r-1} K$) consistant de toutes les $(r-1)$-chaînes z^{r-1} du complexe K qui sont les frontières de certaines r-chaînes du même complexe. De telles chaînes z^{r-1} sont dites *homologues* à *zéro* dans K ce qu'on écrit : $z^{r-1} \sim 0$ dans K. La notation $z^{r-1} \not\sim 0$ dans K signifiera naturellement que le cycle z^{r-1} n'est pas homologue à zéro dans K.

*) On peut inclure le cas $r = 0$ dans le schéma général, en supposant que le groupe $L^r K$ est défini pour tous les r entiers, même négatifs : on le suppose nul (i. e. consistant du seul élément zéro) si K ne contient pas de simplexes de dimension r. Nous nous servirons par la suite de cette remarque sans mention explicite.

Montrons que les chaînes homologues à zéro dans le complexe K sont toujours des cycles, i.e. que le groupe $H^{r-1}K$ défini comme un sous-groupe du groupe $L^{r-1}K$ est effectivement un sous-groupe du groupe $Z^{r-1}K$. Il suffit évidemment de démontrer que la frontière d'une chaîne quelconque x est un cycle, ou autrement que

$$\Delta\Delta x = 0 \tag{6}$$

quelle que soit la chaîne x. Il suffit de démontrer la formule (6) dans le cas où la chaîne consiste d'un seul simplexe orienté $x = t^r$; cela s'effectue par un calcul facile, en appliquant la formule (4):

$$\Delta\Delta t^r = \Delta \sum_i (t^r : t_i^{r-1})\, t_i^{r-1} = \sum_i (t^r : t_i^{r-1})\, \Delta t_i^{r-1} =$$
$$= \sum_i (t^r : t_i^{r-1}) \sum_j (t_i^{r-1} : t_j^{r-2})\, t_j^{r-2},$$

i.e.

$$\Delta\Delta t^r = \sum_j d_j t_j^{r-2},$$

où

$$d_j = \sum_i (t^r : t_i^{r-1})\,(t_i^{r-1} : t_j^{r-2}) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le groupe quotient $Z^rK - H^rK$ s'appelle *Δ-groupe de dimension r du complexe K*, ou *groupe d'homologie de dimension r*; nous le noterons Δ^rK. Le rang du groupe Δ^rK s'appelle *nombre de Betti de dimension r* du complexe K.

Remarque 1. Chaque chaîne de dimension zéro est un cycle, par conséquent $L^0K = Z^0K$, et le groupe Δ^0K est le groupe quotient $L^0K - H^0K$.

3. L'opérateur ∇; groupe de cohomologie. L'opérateur Δ était autrefois appelé opérateur frontière inférieur. En même temps, un rôle fondamental en topologie combinatoire est joué par l'opérateur frontière supérieur, ou opérateur ∇, découvert indépendamment par A. Kolmogorov et J. Alexander en 1934. La définition de l'opérateur ∇ est tout à fait analogue à celle de l'opérateur Δ : pour un simplexe orienté t^r du complexe K, la chaîne Δt^r avait été définie comme la chaîne de dimension $r - 1$ prenant sur chaque simplexe orienté t^{r-1} de dimension $r - 1$ du complexe K une valeur égale au coefficient d'incidence $(t^r : t^{r-1})$. D'une manière analogue, la *cofrontière ∇t^r du simplexe t^r* se définit comme la chaîne de dimension $r + 1$ qui prend sur chaque simplexe orienté t^{r+1} de dimension $r + 1$ du complexe K une valeur égale au coefficient d'incidence $(t^{r+1} : t^r)$ *).

*) Si le complexe K ne possède aucun simplexe de dimension $r + 1$, on pose ∇t^r égal à zéro comme précédemment.

Pour chaque chaîne $x^r = \sum a_i t_i^r$ la chaîne ∇x^r (« *cofrontière* » ou « *∇-frontière* » *de la chaîne* x^r) se définit comme la chaîne

$$\nabla x^r = \sum_i a_i \nabla t_i^r,$$

ce qui signifie

$$\nabla x^r = \sum_h b_h t_h^{r+1},$$

où

$$b_h = \sum_i (t_h^{r+1} : t_i^r)\, a_i.$$

La chaîne x s'appelle *cocycle* ou *∇-cycle* si $\nabla x = 0$; la chaîne x est dite cohomologue à zéro (ou *∇-homologue à zéro*) dans K, si elle est la ∇-frontière d'une chaîne (de dimension égale à celle de x diminuée de un) du complexe K ; de même que dans le cas des homologies, on écrit $x \sim 0$ pour les chaînes cohomologues à zéro. A nouveau on vérifie par un calcul facile que

$$\nabla\nabla x = 0,$$

i.e. que la ∇-frontière d'une chaîne quelconque x est un cocycle *). Ainsi, le groupe $Z_\nabla^r K$ de tous les cocycles de dimension r du complexe K contient le sous-groupe $H_\nabla^r K$ de tous les cocycles cohomologues à zéro dans K ; ce sous-groupe est l'image du groupe $L^{r-1}K$ par l'homomorphisme ∇ dont le noyau est le groupe $Z_\nabla^{r-1}K$. Le groupe quotient $Z_\nabla^r K - H_\nabla^r K$ est désigné par $\nabla^r K$ et s'appelle *∇-groupe de dimension r du complexe K* (ou *groupe de cohomologie de dimension r du complexe K*).

R e m a r q u e 2. De même que dans le cas des groupes d'homologie, où il était naturel de considérer séparément le cas $r = 0$, pour les groupes de cohomologie on considère naturellement le cas $r = n$, lorsque le complexe K possède des simplexes de dimension n et n'a pas de simplexes de plus grande dimension. Dans ce cas, toute la chaîne de dimension n dans K est un cocycle, i.e. $L^n K = Z_\Delta^r K$, et alors $\nabla^n K = L^n K - H_\nabla^n K$.

Les groupes d'homologie et de cohomologie d'un complexe constituent ce qu'on appelle *groupes de Betti*.

---

*) En effet, $\nabla\nabla t^r = \nabla \sum_i (t_i^{r+1} : t^r)\, t_i^{r+1} = \sum_i (t_i^{r+1} : t^r)\, \nabla t_i^{r+1} = \sum_i \sum_h \times$ $\times (t_i^{r+1} : t^r)(t_h^{r+2} : t_i^{r+1})\, t_h^{r+2} = \sum_h d_h t_h^{r+2}$, où $d_h = \sum_i (t_h^{r+2} : t_i^{r+1})(t_i^{r+1} : t^r) = 0$ d'après la formule (4).

4. Complexes cellulaires. Les constructions algébriques introduites ci-dessus se basent sur deux concepts: l'orientation et le coefficient d'incidence. Mais ces deux concepts peuvent être définis non seulement pour les simplexes, mais aussi par exemple pour des polyèdres convexes quelconques, ainsi que dans d'autres situations importantes (voir par exemple le § 8 du présent chapitre).

Pour inclure tous les cas particuliers possibles qui permettent la construction de théories tout à fait identiques, la notion plus générale de complexe cellulaire a été proposée par A. Kolmogorov en Union Soviétique et par A. Tucker aux Etats-Unis.

Définition. On appelle *complexe cellulaire* K un ensemble d'éléments de nature quelconque, appelés cellules *), satisfaisant aux conditions suivantes:

1. A chaque cellule correspond un entier non négatif, appelé *dimension* de cette cellule (désigné par un indice supérieur).

2. Pour chaque cellule, il existe une cellule unique de même dimension, appelée cellule opposée; le passage d'une cellule donnée à la cellule opposée s'effectue en lui attribuant le signe « — »; et l'on a $-(-t^r) = t^r$ pour toute cellule t^r.

3. A chaque couple de cellules t^r et t^{r-1} de dimensions voisines correspond un nombre désigné par $(t^r : t^{r-1})$ et appelé *coefficient d'incidence* de ces cellules; on suppose que les coefficients d'incidence sont soumis aux conditions suivantes:

(a) $$(-t^r : t^{r-1}) = (t^r : -t^{r-1}) = -(t^r : t^{r-1}).$$

(b) Soient t^r et t^{r-2} deux cellules quelconques de dimension r et $r-2$; et soit un couple de cellules opposées arbitraires de dimension $r-1$ désignées l'une par t_i^{r-1} et l'autre par $-t_i^{r-1}$; alors,

$$\sum_i (t^r : t_i^{r-1})(t_i^{r-1} : t^{r-2}) = 0.$$

5. Groupes de Betti d'un complexe cellulaire. On peut définir, dans tout complexe cellulaire, les chaînes de dimension r comme étant des fonctions (définies sur l'ensemble de toutes les cellules de dimension r du complexe cellulaire donné) impaires, i.e. prenant des valeurs opposées sur les cellules opposées de dimension r. Une chaîne est dite *entière* si (comme on le supposait jusqu'alors) ses valeurs sont des nombres entiers. Plus généralement, on peut se donner un groupe abélien $\mathfrak{A}$ quelconque (noté additivement) et appelé *groupe des coefficients*; alors les chaînes de dimension r (relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{A}$) seront des fonctions x^r à valeurs dans le

*) Les cellules sont analogues aux simplexes orientés. En topologie algébrique moderne, l'expression « complexe cellulaire » ou « CW-complexe » est employée dans un sens tout à fait différent, qui n'interviendra pas dans le présent ouvrage.

groupe $\mathfrak{A}$, définies sur l'ensemble de toutes les cellules de dimension r du complexe cellulaire donné et prenant des valeurs opposées sur les cellules opposées. Nous supposerons que dans chaque couple de cellules opposées l'une est notée t_i^r une fois pour toutes et l'autre, $-t_i^r$. Ayant désigné la valeur de la chaîne x^r sur la cellule t_i^r par a_i, nous écrirons cette chaîne sous la forme $x^r = \sum a_i t_i^r$. Relativement à l'addition, les r-chaînes d'un complexe cellulaire K forment un groupe désigné par $L^r(K, \mathfrak{A})$ (ici $\mathfrak{A}$ est le groupe des coefficients; on l'omet souvent).

On appelle Δ-frontière Δt^r (respectivement ∇-frontière ∇t^r) d'une cellule t^r la chaîne entière de dimension $r-1$ (resp. $r+1$) dont la valeur sur chaque cellule t^{r-1} de dimension $r-1$ est égale à $(t^r : t^{r-1})$ (resp. égale à $(t^{r+1} : t^r)$ sur chaque cellule t^{r+1} de dimension $r+1$):

$$\Delta t^r = \sum_j (t^r : t_j^{r-1})\, t_j^{r-1}; \quad \nabla t^r = \sum_h (t_h^{r+1} : t^r)\, t_h^{r+1}.$$

On peut ensuite définir, pour chaque chaîne $x^r = \sum a_i t_i^r$ à coefficients dans le groupe $\mathfrak{A}$, la Δ-frontière $\Delta x^r = \sum_i a_i \Delta t_i^r$ et la ∇-frontière $\nabla x^r = \sum_i a_i \nabla t_i^r$; en outre, d'après la propriété (b) des coefficients d'incidence, on a de nouveau $\Delta\Delta x^r = 0$, $\nabla\nabla x^r = 0$. Par conséquent, de même que pour les complexes simpliciaux, on obtient les groupes

$$Z_\Delta^r(K, \mathfrak{A}) \supseteq H_\Delta^r(K, \mathfrak{A}) \text{ et } Z_\nabla^r(K, \mathfrak{A}) \supseteq H_\nabla^r(K, \mathfrak{A})$$

de cycles et de cocycles, ainsi que les groupes de cycles et de cocycles homologues à zéro dans K. Les *groupes d'homologie et de cohomologie* (groupes de Betti) se définissent comme les groupes quotients

$$\Delta^r(K, \mathfrak{A}) = Z_\Delta^r(K, \mathfrak{A}) - H_\Delta^r(K, \mathfrak{A}),$$
$$\nabla^r(K, \mathfrak{A}) = Z_\nabla^r(K, \mathfrak{A}) - H_\nabla^r(K, \mathfrak{A}).\ ^{*)}$$

Remarque importante 3. Dans plusieurs situations, il est essentiel et commode d'envisager le *produit scalaire de deux chaînes* $x^r = \sum_i a_i t_i^r$ et $y^r = \sum_i b_i t_i^r$ de même dimension du complexe K, défini comme

$$(x^r, y^r) = \sum_i a_i b_i.$$

Cette formule naturelle est applicable dans les cas suivants: premièrement, si $\mathfrak{A}$ est un anneau et la chaîne x^r, ainsi que la chaîne y^r,

*) Par la suite, nous omettrons souvent les indices Δ et ∇, la notation du groupe de coefficients et même le complexe K lorsque ceci ne prête pas à confusion.

est une chaîne à coefficients dans $\mathfrak{A}$; deuxièmement, lorsque $\mathfrak{A}$ est un groupe abélien quelconque et y^r une chaîne entière (en particulier, la valeur de la chaîne $x^r \in L^r(K, \mathfrak{A})$ sur la cellule t^r peut toujours être notée sous forme de produit scalaire (x^r, t^r), notation dont nous nous servirons constamment) ; troisièmement, si le groupe des coefficients $\mathfrak{B}$ de la chaîne y^r et le groupe $\mathfrak{A}$ de la chaîne x^r sont des groupes duaux dans le sens de la théorie des caractères de Pontriaguine *) et, par conséquent, chacun des termes $a_i b_i$ est défini dans le sens de cette théorie.

On établit maintenant sans difficulté la relation

$$(x^r, \nabla y^{r-1}) = (\Delta x^r, y^{r-1}), \tag{7}$$

qui exprime la dualité **) des opérateurs Δ et ∇ (dans chacun des trois cas des groupes de coefficients envisagés).

L'identité (7) se vérifie immédiatement dans le cas particulier $x^r = t^r$, $y^{r-1} = t^{r-1}$: les deux membres de l'égalité (7) ne sont autre que le coefficient d'incidence $(t^r : t^{r-1})$. Le cas général de l'égalité (7) découle facilement du fait que les deux opérateurs Δ et ∇ sont linéaires.

6. Remarque sur les sous-complexes ouverts et fermés. Deux cellules t^r et t^{r-1} de dimensions voisines r et $r-1$ sont dites *incidentes* entre elles dans un complexe cellulaire donné si le coefficient d'incidence $(t^r : t^{r-1})$ n'est pas nul. L'ensemble $K_0 \subseteq K$ s'appelle sous-complexe *ouvert* (*fermé*) du complexe cellulaire K si pour chaque cellule $t^r \in K_0$ le sous-complexe contient, premièrement, la cellule opposée $-t^r$ et, deuxièmement, chaque cellule $t^{r+1} \in K$ (resp. chaque cellule $t^{r-1} \in K$) incidente à la cellule t^r. Il est évident que si A est un sous-complexe fermé de K, alors le sous-complexe $K \setminus A$ est ouvert et inversement. On démontre tout aussi facilement le

Théorème 4. *Chaque sous-complexe ouvert (fermé) K_0 d'un complexe cellulaire K est un complexe cellulaire (si pour tous les éléments de K_0 on prend la dimension, la relation d'opposition et les coefficients d'incidence comme dans K).*

En effet, il suffit de vérifier que dans K_0 on a l'identité

$$\sum_i (t^n : t_i^{n-1})(t_i^{n-1} : t^{n-2}) = 0$$

pour deux cellules t^n, t^{n-2} quelconques de K_0. Mais il découle de la définition du sous-complexe ouvert (fermé) que dans la somme considérée les termes non nuls seront les mêmes que l'on prenne cette

*) Voir le Supplément à ce chapitre qui peut être abordé dès maintenant.
**) Pour la définition de la dualité des opérateurs cf. § 4 de ce chapitre.

somme sur tous les *) $t_i^{n-1} \in K$ ou seulement sur tous les $t_i^{n-1} \in K_0$; mais puisque la première somme est nulle (K est un complexe cellulaire), la deuxième l'est aussi.

Une application importante de ce théorème est donnée par le fait suivant. L'ensemble de tous les simplexes orientés d'un sous-complexe ouvert quelconque d'un complexe simplicial complet est un complexe cellulaire. Nous dirons tout simplement qu'un sous-complexe ouvert d'un complexe simplicial complet est un complexe cellulaire. En particulier, toute pseudo-variété (§ 7), étant ouverte dans son adhérence combinatoire, est un complexe cellulaire.

7. Le cas des groupes de coefficients topologiques. Nous allons montrer comment on peut introduire une topologie dans le groupe de Betti à coefficients dans un groupe topologique. L'importance fondamentale de ce fait apparaît déjà au Supplément au présent chapitre où, à l'aide de la théorie de la dualité de Pontriaguine, nous établirons la dualité des groupes topologiques $\Delta^p(K, \mathfrak{A})$ et $\nabla^p(K, \mathfrak{B})$ du complexe K, lorsque les groupes des coefficients sont duaux.

Puisque dans la suite nous aurons seulement affaire à des groupes de coefficients bicompacts **) (le groupe d'homologie relativement au groupe R des réels sera envisagé, mais sans topologie), nous nous limiterons ici à ce cas.

Soit K un complexe cellulaire fini, $\mathfrak{A}$ un groupe abélien discret ou bicompact. Le groupe $L^p(K, \mathfrak{A})$ est algébriquement isomorphe à la somme directe de n exemplaires du groupe $\mathfrak{A}$, où $2n$ est le nombre de cellules de dimension p du complexe K. Il est aussi naturel, pour un groupe de coefficients bicompact, de considérer $L^p(K, \mathfrak{A})$ comme une somme directe de groupes topologiques. Autrement dit, le voisinage d'une chaîne $x^p = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^p \in L^p(K, \mathfrak{A})$ se définit par un voisinage U du zéro du groupe $\mathfrak{A}$ et se compose de toutes les chaînes $x' = \sum_{i=1}^{n} a_i' t_i^p$ telles que $a_i - a_i' \in U$ pour tout i. Le groupe $L^p(K, \mathfrak{A})$ s'avère être discret pour un groupe de coefficients discret et bicompact pour un groupe de coefficients bicompact.

Les sous-groupes $H_\Delta^p(K, \mathfrak{A}) \equiv H_\Delta^p$, $H_\nabla^p(K, \mathfrak{A}) \equiv H_\nabla^p$, $Z_\Delta^p(K, \mathfrak{A}) \equiv Z_\Delta^p$, $Z_\nabla^p(K, \mathfrak{A}) \equiv Z_\nabla^p$ héritent leur topologie de $L^p(K, \mathfrak{A}) \equiv L^p$. Pour pouvoir envisager les groupes quotients

$$\Delta^p(K, \mathfrak{A}) = Z_\Delta^p - H_\Delta^p ; \quad \nabla^p(K, \mathfrak{A}) = Z_\nabla^p - H_\nabla^p$$

il faut montrer que ces quatre sous-groupes sont fermés. Les groupes L^p, $p = 0, 1, \ldots$, étant bicompacts, il suffit pour cela de vérifier la continuité des homomorphismes

$$\Delta : L^{p+1} \to L^p,$$
$$\nabla : L^{p-1} \to L^p ;$$

---

*) Ici, comme nous l'avons déjà indiqué, une cellule quelconque, notée t_i^{n-1}, a été choisie dans chaque couple de cellules opposées de dimension $n - 1$.

**) Un espace topologique non nécessairement séparé s'appelle bicompact ou quasi-compact si chaque recouvrement de cet espace contient un sous-recouvrement fini.— *Note du traducteur.*

les groupes H^p_Δ, H^p_∇ seront alors fermés en tant qu'images continues de bicompacts, et les groupes Z^p_Δ, Z^p_∇ en tant qu'images inverses d'un point.

Remarquons également que, vu l'homogénéité des groupes topologiques, il suffit de vérifier la continuité pour l'élément zéro.

Ainsi, soient U un voisinage quelconque de zéro dans $\mathfrak{A}$ et O_U le voisinage de zéro qu'il définit dans le groupe L^p. Il faut trouver un voisinage V dans $\mathfrak{A}$ tel que le V-voisinage O_V de zéro du groupe L^{p+1} soit le voisinage O_U pour image par l'opérateur Δ. Pour cela, il suffit de prendre pour V un voisinage symétrique de zéro dans $\mathfrak{A}$ tel que $mV \subseteq U$, où $2m$ est le nombre de cellules de dimension $p+1$ du complexe K. En effet, pour $x^{p+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j t_j^{p+1} \in O_V$ on a

$$\Delta x^{p+1} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} b_j (t_j^{p+1} : t_i^p) \right] t_i^p \in O_U,$$

puisque

$$\sum_{j=1}^{m} b_j (t_j^{p+1} : t_i^p) \in mV \subseteq U.$$

La continuité de l'homomorphisme ∇ se vérifie d'une manière analogue.

§ 3. Opérateurs d'inclusion et d'intersection *)

Soient K un complexe cellulaire et $C \subseteq K$ son sous-complexe. Nous dirons que la chaîne $x^r \in L^r(K, \mathfrak{A})$ *est contenue ou située dans le sous-complexe* C si elle s'annule sur chaque cellule $t^r \in K \setminus C$. Ainsi, soit $C \subseteq K$. Définissons l'opérateur d'intersection J^K_C et l'opérateur d'inclusion E^C_K. L'*opérateur d'intersection* J^K_C fait correspondre à chaque chaîne $x^r \in L^r(K, \mathfrak{A})$ une chaîne $J^K_C x^r \in L^r(C, \mathfrak{A})$ du complexe C, qui prend sur chaque cellule de C la même valeur que la chaîne x^r ; si la chaîne x^r est écrite comme une forme linéaire $x^r = \sum a_i t_i^r$, il faut, pour obtenir la chaîne $J^K_C x^r$, conserver dans cette forme linéaire seulement les termes qui correspondent aux éléments du sous-complexe C. La chaîne $J^K_C x^r$ sera appelée *morceau de la chaîne* x^r *contenu dans* C. Il est évident que l'opérateur J^K_C pour chaque r est un homomorphisme du groupe $L^r(K, \mathfrak{A})$ dans le groupe $L^r(C, \mathfrak{A})$.

L'*opérateur d'inclusion* E^C_K fait correspondre, par définition, à chaque chaîne $x^r_C \in L^r(C, \mathfrak{A})$ du complexe C une chaîne $E^C_K x^r_C = x^r$ du complexe K, égale à la chaîne x^r_C sur tous les éléments

*) Ces opérateurs ont été introduits par P. Alexandrov dans la *Théorie générale de l'homologie*, Notes sci. de l'Université de Moscou, 1940 (traduction anglaise dans Trans. Amer. Math. Soc. 49, 1, Jan. 1941, p. 41-105, sous le titre *General Combinatorial Topology*, p. 65). Ces opérateurs, sous le nom d'homomorphismes naturels, sont également considérés dans le livre de W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, paru à la fin de l'année 1941.

$t^r \in C$ et nulle sur tous les éléments du complexe $K \setminus C$. Autrement dit, la chaîne $E_K^C x_C^r$ est une chaîne du complexe K contenue dans C, qui coïncide sur C avec la chaîne x_C^r. Il est évident que l'opérateur E_K^C est un monomorphisme du groupe $L^r(C, \mathfrak{A})$ dans le groupe $L^r(K, \mathfrak{A})$.

Pour chaque chaîne x_C du complexe C on a évidemment $J_C^K E_K^C x_C = x_C$, alors que pour une chaîne x du complexe K l'égalité $E_K^C J_C^K x = x$ est satisfaite si et seulement si la chaîne x est contenue dans C.

Pour tout sous-complexe $C \subseteq K$, les opérateurs E_K^C et J_C^K sont duaux en ce sens que

$$(*) \qquad (E_K^C x_C^r, y_K^r) = (x_C^r, J_C^K y_K^r)$$

pour des chaînes quelconques x_C^r du complexe C et y_K^r du complexe K (sous l'hypothèse que les groupes des coefficients admettent un produit scalaire).

Il suffit de vérifier la formule (*) dans le cas particulier où $x_C^r = t_C^r$ est une cellule du complexe C (le cas général se réduit à ce cas particulier, puisque les opérateurs E_K^C et J_C^K sont linéaires). Mais dans notre cas particulier $(E_K^C t_C^r, y_K^r)$ et $(t_C^r, J_C^K y_K^r)$ sont égaux à la valeur de la chaîne y_K^r sur la cellule t_C^r.

Théorème 5. *Pour tout sous-complexe $A \subseteq K$ fermé, l'opérateur E_K^A commute avec l'opérateur Δ, i.e. on a*

$$(1_{A\Delta}) \qquad \Delta E_K^A x_A^r = E_K^A \Delta_A x_A^r \text{ *)}$$

pour chaque chaîne $x_A^r \in L^r(K, \mathfrak{A})$, et l'opérateur J_A^K commute avec ∇, i.e. on a

$$(1_{A\nabla}) \qquad \nabla_A J_A^K x^r = J_A^K \nabla x^r$$

pour chaque chaîne $x^r \in L^r(K, \mathfrak{A})$. Pour tout sous-complexe ouvert $G \subseteq K$, l'opérateur J_G^K commute avec l'opérateur Δ, i.e.

$$(1_{G\Delta}) \qquad \Delta_G J_G^K x^r = J_G^K \Delta x^r$$

pour chaque chaîne $x^r \in L^r(K, \mathfrak{A})$, et l'opérateur E_K^G commute avec ∇, i.e.

$$(1_{G\nabla}) \qquad \nabla E_K^G x_G^r = E_K^G \nabla_G x_G^r$$

pour chaque chaîne $x_G^r \in L^r(G, \mathfrak{A})$.

Démontrons, par exemple, les égalités $(1_{A\Delta})$ et $(1_{A\nabla})$.

Pour cela il faut démontrer que les chaînes formant les deux membres de ces égalités prennent la même valeur sur chaque cellule (de dimension appropriée) du complexe K (resp. du complexe A).

Démontrons-le dans le cas $(1_{A\Delta})$. Notons tout d'abord que chacune des chaînes $\Delta E_K^A x_A^r$ et $E_K^A \Delta_A x_A^r$ est contenue dans A. Ceci est

*) Nous désignons naturellement par Δ_A la restriction à $L^r(A, \mathfrak{A}) \subseteq L^r(K, \mathfrak{A})$ de l'opérateur Δ, défini sur $L^r(K, \mathfrak{A})$. L'opérateur ∇_A est défini d'une manière analogue.

évident pour la chaîne $E_K^A \Delta_A x_A^r$; la chaîne $\Delta E_K^A x_A^r$ est contenue dans A, puisque ce sous-complexe est fermé *). Il reste à démontrer que pour toute cellule $t_A^{r-1} \in A$ on a

$$(2) \qquad (\Delta E_K^A x_A^r,\ t_A^{r-1}) = (E_K^A \Delta_A x_A^r,\ t_A^{r-1}).$$

Mais cette égalité se déduit du fait que ses deux membres sont égaux à la somme $\sum (t^r : t_A^{r-1})\ (x^r,\ t^r)$ calculée sur tous les $t^r \in A$.

La formule $(1_{A\nabla})$ se démontre comme précédemment : on montre que les deux chaînes sont contenues dans A et prennent sur chaque élément $t_A^{r+1} \in A$ une même valeur, à savoir $\sum_i (t_A^{r+1} : t^r)\ (x^r,\ t^r)$, où l'on calcule la somme sur tous les t^r incidents à la cellule t_A^{r+1} (toutes ces cellules appartiennent au sous-complexe A puisqu'il est fermé).

Les formules $(1_{G\Delta})$ et $(1_{G\nabla})$ se démontrent à l'aide de raisonnements analogues.

Remarque 1. Des exemples simples montrent que pour un sous-complexe fermé $A \subseteq K$ et un sous-complexe ouvert $G \subseteq K$ l'opérateur J_A^K ne commute généralement pas avec Δ ni l'opérateur J_G^K avec ∇. Nous avons néanmoins le fait suivant, qui nous servira par la suite :

Soit une chaîne $x^r \in L^r K$ contenue dans le sous-complexe fermé $A \subseteq K$ (resp. dans le sous-complexe ouvert $G \subseteq K$). Alors $J_A^K \Delta x^r = \Delta_A J_A^K x^r$ (resp. $J_G^K \nabla x^r = \nabla_G J_G^K x^r$).

La démonstration peut être laissée au lecteur.

Remarque 2. Soit G un sous-complexe ouvert du complexe A et x une chaîne du complexe K dont la frontière est contenue dans $A = K \setminus G$. Alors la chaîne $J_G^K x$ est un cycle du complexe G. En effet,

$$\Delta_G J_G^K x = J_G^K \Delta x = 0.$$

Remarque 3. Soit A un sous-complexe fermé du complexe K et supposons que, pour un certain $r \geqslant 1$, les groupes $\Delta^r K$ et $\Delta^{r-1} A$ s'annulent. Alors, pour $G = K \setminus A$, le groupe $\Delta^r G$ est également nul.

---

*) En effet, $(\Delta E_K^A x_A^r,\ t^{r-1}) = \sum_{t^r \in K} (t^r : t^{r-1})\,(E_K^A x_A^r,\ t^r)$; mais chaque terme de cette dernière somme s'annule lorsque $t^{r-1} \in K \setminus A$, de sorte que pour $(t^r : t^{r-1}) \neq 0$ et $t^{r-1} \in K \setminus A$ on a la relation $t^r \in K \setminus A$ (le complexe $K \setminus A$ étant ouvert) et donc $(E_K^A x_A^r,\ t^r) = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit z_G^r un cycle du complexe G. Alors on déduit du théorème 5 les égalités

$$J_G^K \Delta E_K^G z_G^r = \Delta_G J_G^K E_K^G z_G^r = \Delta_G z_G^r = 0,$$

qui signifient que le cycle $v^{r-1} = \Delta E_K^G z_G^r$ est contenu dans A. D'après notre hypothèse $\Delta^{r-1} A = 0$, il existe une chaîne $y_A^r \in L^r A$ de frontière v^{r-1} telle que

$$v^{r-1} = E_K^A J_A^K v^{r-1} = E_K^A \Delta_A y_A^r = \Delta E_K^A y_A^r.$$

La chaîne $u^r = E_K^G z_G^r - E_K^A y_A^r$ du complexe K est un cycle, car

$$\Delta u^r = v^{r-1} - v^{r-1} = 0.$$

Mais, par hypothèse, $\Delta^r K = 0$, donc il existe une chaîne $x^{r+1} \in L^{r+1} K$ ayant pour frontière u^r. Appliquant à nouveau le théorème 5 on obtient

$$z_G^r = J_G^K u^r = J_G^K \Delta x^{r+1} = \Delta_G J_G^K x^{r+1},$$

i.e. $z_G^r \sim 0$ dans G, ce qu'il fallait démontrer.

Cette remarque est un cas très particulier d'un théorème général important qui sera démontré dans le chapitre 3. Nous avons considéré ici ce cas particulier puisque nous en aurons besoin pour l'étude d'un exemple élémentaire du § 6.

R e m a r q u e 4. Soit un sous-complexe ouvert G (un sous-complexe fermé A) du complexe K. Alors, pour toute chaîne $x_G^r \in L^r G$ (resp. $x_A^r \in L^r A$) on a

$$J_G^K \Delta E_K^G x_G^r = \Delta_G x_G^r \; (J_A^K \nabla E_K^A x_A^r = \nabla_A x_A^r). \tag{3}$$

Il suffit de démontrer la première formule (3) ; la seconde se démontre d'une manière analogue. Il est évident que l'on peut se restreindre au cas $x_G^r = t_G^r$:

$$\Delta t_G^r = \sum_{|t^{r-1}| \in G} (t_G^r : t^{r-1})\, t^{r-1} + \sum_{|t^{r-1}| \in K \setminus G} (t_G^r : t^{r-1})\, t^{r-1},$$

$$J_G^K \Delta t_G^r = \sum_{|t^{r-1}| \in G} (t_G^r : t^{r-1})\, t^{r-1} = \Delta_G t_G^r,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Des faits particuliers que nous venons de démontrer, à savoir $\Delta_G x_G^r = 0$ (resp. $\nabla_A x_A^r = 0$) nous pouvons déduire la

R e m a r q u e 5. Si z_G^r est un cycle du sous-complexe ouvert $G \subseteq K$ (resp. si z_A^r est un cocycle du sous-complexe fermé $A \subseteq K$) et $G = K \setminus A$, alors

$$J_G^K \Delta E_K^G z_G^r = 0, \quad J_A^K \nabla E_K^A z_A^r = 0,$$

i.e. le cycle $\Delta E_K^G z_G^r$ est contenu dans A (le cocycle $\nabla E_K^A z_A^r$ est contenu dans G).

§ 4. Groupes de Betti à groupes de coefficients divers

1. Groupes de coefficients importants. Il s'agit des groupes suivants:

(a) Le groupe additif des nombres entiers *). Il sera toujours désigné par I. C'est un anneau. Les chaînes, cycles, homologies, etc., relativement au groupe I sont dits *entiers*.

(b) Le groupe I_m, i.e. le groupe quotient du groupe I par le sous-groupe mI de tous les entiers multiples du nombre naturel donné $m \geqslant 2$:

$$I_m = I - mI.$$

Le groupe I_m est évidemment un groupe cyclique fini d'ordre m. Par définition du groupe I_m, ses éléments sont des classes de nombres entiers identiques modulo m **); ces classes s'appellent résidus modulo m. L'homomorphisme naturel $I \to I_m$ est désigné par τ_m; pour chaque k entier $\tau_m k$ désigne donc le résidu de k modulo m.

Parfois on appelle résidu modulo m non pas la classe elle-même, mais le plus petit nombre non négatif qu'elle contient.

On appelle, par souci de brièveté, les chaînes relativement au groupe I_m du complexe K, *chaînes modulo m*.

Il existe deux classes modulo 2: la première contient le chiffre 0 et tous les nombres pairs, l'autre contient le chiffre 1 et tous les nombres impairs. On a $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ (modulo 2).

Le groupe I_m pour chaque $m \geqslant 2$ est un anneau. I_m hérite de I la loi de multiplication: pour multiplier deux éléments $\xi_1 \in I_m$, $\xi_2 \in I_m$ il faut choisir, dans chacune des classes ξ_1, ξ_2 des éléments quelconques $x_1 \in \xi_1$, $x_2 \in \xi_2$ et définir la classe ξ qui contient le nombre $x_1 \cdot x_2$ comme étant le produit $\xi_1 \cdot \xi_2$. Si m est un nombre premier, alors l'anneau I_m est de surcroît un corps.

(c) Le groupe additif $\mathfrak{R}$ de tous les nombres rationnels; c'est évidemment un anneau et même un corps. Les chaînes et les homologies relativement au groupe $\mathfrak{R}$ sont dites *rationnelles*.

(d) Le groupe additif (corps) R de tous les nombres réels; les homologies correspondantes sont dites *réelles*.

(e) Le groupe quotient $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} - I$ du groupe de tous les nombres rationnels par le sous-groupe I des entiers.

---

*) Ici et dans les cas analogues le mot « additif » signifie qu'il s'agit de l'opération arithmétique d'addition usuelle.

**) Deux nombres entiers h et k sont identiques modulo m si leur différence est un multiple de m; on écrit alors $h \equiv k \pmod{m}$ ou $h - k \equiv 0 \pmod{m}$. L'élément zéro du groupe I_m est la classe de tous les entiers h divisibles par m ou « identiques à 0 modulo m »:

$$h \equiv 0 \pmod{m}.$$

Les éléments du groupe $\mathfrak{R}_1$ sont parfois appelés *classes rationnelles modulo* 1. Les chaînes, les cycles et les homologies relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$ dans un complexe donné K s'appellent *chaînes*, *cycles* et *homologies modulo* 1.

Pour chaque m, nous avons un monomorphisme naturel $\mathfrak{r}_1^{(m)}$ du groupe I_m dans le groupe $\mathfrak{R}_1$. Pour le définir, prenons dans une classe (arbitraire) $\xi^{(m)} \in I_m$, $\xi^{(m)} \neq 0$, le plus petit nombre positif x qu'elle contient (le résidu modulo m), et désignons par $\mathfrak{r}_1^{(m)}\xi^{(m)}$ la classe modulo 1 qui contient le nombre x/m. Posons en même temps $\mathfrak{r}_1^{(m)}(0) = 0$. Alors

$$\xi^{(m)} \longmapsto \mathfrak{r}_1^{(m)}\xi^{(m)}$$

sera le monomorphisme cherché du groupe I_m dans le groupe $\mathfrak{R}_1$.

En vertu de cette remarque, nous pouvons considérer I_m comme étant un sous-groupe du groupe $\mathfrak{R}_1$.

D'autre part, par la définition même du groupe $\mathfrak{R}_1$ (comme groupe quotient de $\mathfrak{R}$), il existe un homomorphisme naturel unique $\mathfrak{r}_1$: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$ (du groupe $\mathfrak{R}$ dans le groupe $\mathfrak{R}_1$) qui fait correspondre à chaque nombre rationnel x la classe modulo 1 qui le contient.

(f) Le groupe quotient $\varkappa = R - I$ du groupe des réels par le sous-groupe des entiers. Les éléments du groupe $\varkappa$ peuvent être appelés *classes réelles modulo* 1. Puisque chaque classe rationnelle modulo 1 est évidemment contenue dans une certaine classe réelle modulo 1, le groupe $\mathfrak{R}_1$ est un sous-groupe du groupe $\varkappa$, et l'on a aussi $I_m \subseteq \varkappa$.

R e m a r q u e 1. Désignons par $2\pi I$ le sous-groupe du groupe R qui consiste de tous les nombres réels de la forme $x = 2\pi k$, où k est entier; ce sous-groupe est évidemment isomorphe au groupe I. Le groupe quotient $R - 2\pi I$ est isomorphe au groupe $\varkappa$.

Pour le vérifier il suffit de considérer l'application linéaire $f: X_1 \to X_{2\pi}$ du segment $X_1 = [0, 1]$ de la droite réelle sur le segment $X_{2\pi} = [0, 2\pi]$ et faire correspondre à la classe $\xi \in R - I$, qui contient le point $x \in X_1$, la classe $\eta \in R - 2\pi I$ qui contient le point $f(x)$.

A chaque élément η du groupe $R - 2\pi I$ correspond une rotation d'angle φ du plan, où φ est un nombre quelconque, appartenant à la classe η. Tous ces angles diffèrent entre eux par des multiples entiers de 2π et définissent donc une même rotation du plan. Il en découle que le groupe $R - 2\pi I$, et, par conséquent, le groupe $\varkappa = R - I$ qui lui est isomorphe, est isomorphe au groupe de toutes les rotations du plan (autour d'un point fixe o) ou, ce qui revient au même, au groupe de toutes les rotations du cercle autour de son centre, ou, enfin, au groupe additif de tous les angles *).

*) Les angles qui diffèrent d'un multiple entier de 2π sont alors considérés comme identiques.

Le groupe $\varkappa$ (ainsi que tout groupe qui lui est isomorphe) s'appelle *groupe cyclique continu*.

On introduit de manière naturelle une topologie dans le groupe $\varkappa$. En effet, on a un homomorphisme naturel f du groupe R des réels sur le groupe $\varkappa$, qui fait correspondre à chaque élément $x \in R$ la classe $\xi \in \varkappa$ qui le contient; l'image inverse de chaque élément $\xi \in \varkappa$ par l'application f est un ensemble fermé de la droite réelle R^1, de sorte que $\varkappa$ n'est pas seulement un groupe quotient du groupe R, mais également un espace quotient de l'espace topologique R^1. Par conséquent, $\varkappa$ est muni d'une topologie quotient. Celle-ci a une signification géométrique naturelle: les angles dont la différence avec φ_0 est inférieure en valeur absolue à un nombre donné $\varepsilon > 0$ forment le ε-voisinage de l'angle φ_0. Le groupe $\varkappa$ muni de cette topologie est homéomorphe au cercle.

2. Rappel de certains faits de la théorie des groupes abéliens. Les notions élémentaires qui se rapportent aux groupes abéliens sont supposées connues. Néanmoins, pour rendre notre exposé indépendant, nous rappelons ici, sans démonstration, les définitions et les théorèmes les plus importants pour nous. Un exposé complet se trouve par exemple dans le livre [TC], Supplément I.

Le groupe abélien G s'appelle *groupe à nombre fini de générateurs* s'il contient un ensemble fini d'éléments $g_1, \ldots, g_s$ tels que chaque élément $g \in G$ est leur combinaison linéaire, i.e.

$$(*) \qquad g = c_1 g_1 + \ldots + c_s g_s,$$

où tous les coefficients c_i sont des entiers et, comme d'habitude, le symbole $c_i g_i$ désigne la somme $g_i + \ldots + g_i$ de c_i éléments identiques g_i. Puisque l'indépendance linéaire *) du système des générateurs $g_1, \ldots, g_s$ n'est pas requise, la représentation de l'élément g sous la forme $(*)$ n'est pas nécessairement unique.

On sait que le nombre maximal d'éléments linéairement indépendants d'un groupe abélien s'appelle *rang*. Si un groupe abélien possède un système de n générateurs, le rang de ce groupe est $\leqslant n$. Si le groupe G possède un nombre fini, mettons n, de générateurs *linéairement indépendants*, le groupe G est de rang n, et ce groupe s'appelle *groupe abélien libre de rang n*. On voit facilement que tout groupe abélien libre de rang n est isomorphe au sous-groupe des vecteurs de l'espace affine de dimension n dont les coordonnées sont entières relativement à une base $e_1, \ldots, e_n$.

Un système de générateurs linéairement indépendants d'un groupe abélien libre s'appelle *base*.

On appelle *ordre de l'élément $g \in G$ relativement au sous-groupe $U \subseteq G$* du groupe G le plus petit nombre naturel n tel que $ng \in U$. S'il n'existe pas de tels n entiers, on considère que l'ordre de l'élément g relativement à U est *infini*. On appelle *adhérence par division* $\hat{U}$ du sous-groupe U de G son sous-groupe consistant de tous les éléments d'ordre fini relativement à U.

Théorème A. *Soient X^n un groupe abélien libre de rang n, U son sous-groupe et $\hat{U}$ l'adhérence par division du sous-groupe U dans X^n. Il existe alors une base $z_1, z_2, \ldots, z_p$; $u_1, u_2, \ldots, u_\tau$; $v_1, v_2, \ldots, v_\sigma$; $p + \tau + \sigma = n$ du groupe X^n telle que*

---

*) Dans le sens usuel : $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_s g_s = 0$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$.

(a) *Les éléments* $z_1, \ldots, z_p$ *sont d'ordre infini relativement au sous-groupe* U *et, par conséquent, ces éléments n'appartiennent pas à* $\hat{U}$.

(b) *Les éléments* $u_1, \ldots, u_\tau$ *sont d'ordres* $\theta_1, \ldots, \theta_\tau$ *finis et* > 1 *relativement au sous-groupe* U, *de plus* $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_\tau > 1$, *et* θ_{i+1} *divise* θ_i *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, \tau - 1$.

(c) *Les éléments* $\theta_1 u_1, \ldots, \theta_\tau u_\tau, v_1, \ldots, v_\sigma$ *forment une base du groupe* U *et les éléments* $u_1, \ldots, u_\tau, v_1, \ldots, v_\sigma$ *forment une base du groupe* $\hat{U}$.

Théorème B. *Soit*

$$X = X_1 + \ldots + X_m$$

une somme directe de sous-groupes X_i *de* X *dont chacun contient à son tour un sous-groupe* $X'_i \subseteq X_i$ *(éventuellement nul). Si* $X' = X'_1 + \ldots + X'_m$, *alors le groupe quotient* $X - X'$ *est la somme directe de ses sous-groupes, respectivement isomorphes aux groupes* $X_1 - X'_1, \ldots, X_m - X'_m$.

Revenons au théorème A et servons-nous des notations correspondantes. Soient Z_i, U_i, V_i les groupes cycliques infinis dans X^n, engendrés respectivement par les éléments z_i, u_i, v_i; on a les décompositions suivantes en sommes directes:

$$X^n = \sum_{i=1}^{p} Z_i + \sum_{i=1}^{\tau} U_i + \sum_{i=1}^{\sigma} V_i,$$

$$U = \sum_{i=1}^{\tau} \theta_i U_i + \sum_{i=1}^{\sigma} V_i.$$

A partir des théorèmes A et B nous obtenons le

Corollaire du théorème A. *Le groupe quotient* $X^n - U$ *est isomorphe à la somme directe de* p *groupes cycliques infinis et de groupes cycliques finis d'ordres* θ_i, $i = 1, 2, \ldots, \tau$. *On voit facilement que* p *est alors égal au rang du groupe* $X^n - U$.

Remarque 2. Chaque groupe abélien G à n générateurs est l'image par un homomorphisme d'un groupe abélien libre X^n de rang n.

En effet, si $g_1, \ldots, g_n$ sont des générateurs quelconques du groupe G et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base du groupe libre X^n, l'application $e_i \to g_i$, $i = 1, 2, \ldots$, définit évidemment un homomorphisme du groupe X^n sur G.

Mais alors on déduit de ce fait que chaque groupe abélien G à nombre fini de générateurs est isomorphe au groupe quotient d'un groupe abélien libre X par son sous-groupe U; donc en appliquant le corollaire du théorème A, on obtient le résultat principal suivant.

Théorème C. *Chaque groupe abélien* G *à nombre fini de générateurs est la somme directe de* p *groupes cycliques infinis* $(p \geqslant 0)$ *et d'un certain nombre* $\tau \geqslant 0$ *de groupes cycliques finis* $\Theta_1, \ldots, \Theta_\tau$ *d'ordres* $\theta_1, \ldots, \theta_\tau$. *On peut en plus demander que* θ_{i+1} *divise* θ_i, $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_\tau > 1$, *cette condition déterminant univoquement* *) *aussi bien le nombre* τ *de termes cycliques finis que les ordres correspondants. Le nombre* p *s'avère égal au rang du groupe* G *et la somme directe* $\Theta_1 + \ldots + \Theta_\tau$ *est le sous-groupe du groupe* G *consistant de tous ses éléments d'ordre fini.*

3. Groupes de coefficients I **et** $\mathfrak{R}$. Le groupe $L^r \equiv L^r(K, I)$ est, pour un complexe cellulaire fini K, un groupe abélien libre à nombre fini de générateurs (ce nombre est égal à la moitié du nombre de cellules de dimension r dans le complexe K). Par conséquent, on peut

*) Cette propriété d'unicité ne sera pas utilisée par la suite.

appliquer les théorèmes énoncés ci-dessus à ce groupe ainsi qu'à ses sous-groupes $Z^r \equiv Z^r(K, I)$ et $H^r \equiv H^r(K, I)$. Il est alors commode de considérer parallèlement les chaînes et les homologies rationnelles, puisque l'adhérence par division des sous-groupes de $L^r(K, I)$ est naturellement contenue dans $L^r(K, \mathfrak{R})$.

Avant tout, reformulons les théorèmes A et C pour le cas particulier $X^n = Z^r$, $U = H^r$. On voit facilement que l'adhérence par division $\hat{H}^r$ du sous-groupe H^r est l'intersection $H^r(K, \mathfrak{R}) \cap Z^r$. Ainsi :

Théorème 6. *Le groupe $Z^r \equiv Z^r(K, I)$ possède une base*

$$(1) \qquad z_1^r, \ldots, z_p^r; \; u_1^r, \ldots, u_\tau^r; \; v_1^r, \ldots, v_\sigma^r$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) *Les ordres des cycles z_i^r relativement au sous-groupe $H^r \equiv H^r(K, I)$ sont infinis (i.e. le cycle θz_i^r n'est jamais homologue à zéro dans K, quel que soit $\theta \neq 0$).*

(b) *L'ordre du cycle u_j^r relativement à H^r est un nombre naturel $\theta_j > 1$ (de sorte que l'on a en particulier $\theta_j u_j^r \sim 0$ dans K) et θ_{j+1} divise θ_j pour tout $j = 1, 2, \ldots, \tau - 1$.*

(c) *Les cycles $\theta_1 u_1^r, \ldots, \theta_\tau u_\tau^r; v_1, \ldots, v_\sigma$ forment une base du groupe H^r, tandis que les cycles $u_1^r, \ldots, u_\tau^r; v_1^r, \ldots, v_\sigma^r$ forment une base du groupe $\hat{H}^r$.*

Une base du groupe $Z^r(K, I)$ qui satisfait à ces conditions s'appelle *base canonique* du groupe $Z^r(K, I)$.

Théorème 7. *Le groupe $\Delta^r(K, I) = Z^r(K, I) - H^r(K, I)$ est la somme directe de p groupes cycliques infinis (le nombre p est égal au rang du groupe $\Delta^r(K, I)$ et s'appelle nombre de Betti de dimension r du complexe K ; il sera désigné par π^r par la suite) et d'un certain nombre $\tau = \tau^r$ de groupes cycliques finis $\Theta_1^r, \ldots, \Theta_\tau^r$, en outre, la somme directe $\Theta_1^r + \ldots + \Theta_\tau^r$ est le sous-groupe $\Theta = \Theta^r K$ (du groupe $\Delta^r(K, I)$ qui consiste de tous les éléments d'ordre fini du groupe $\Delta^r(K, I)$. Le groupe $\Theta^r K$ s'appelle groupe de torsion de dimension r du complexe K.*

On peut en même temps admettre que θ_{i+1} divise θ_i pour $i = 1, 2, \ldots, \tau - 1$.

*La somme directe $B^r K$ des termes d'ordre infini dans la décomposition du groupe $\Delta^r(K, I)$ est un groupe abélien libre de rang π^r ; elle est donc isomorphe au groupe quotient $Z^r K - \hat{H}^r K$ que l'on appelle parfois groupe de Betti libre de dimension r du complexe K *). Le*

* En général, soit $\mathfrak{A}$ un sous-groupe de $\mathfrak{A}'$. On peut alors définir le groupe $H^r(K, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ comme étant le sous-groupe (du groupe $Z^r(K, \mathfrak{A})$) qui consiste de tous les cycles en $\mathfrak{A}$ homologues à zéro pour $\mathfrak{A}'$, et considérer le groupe

$$\Delta^r(K, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = Z^r(K, \mathfrak{A}) - H^r(K, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}').$$

groupe B^rK est le groupe quotient du groupe des cycles entiers de dimension r par le sous-groupe des cycles entiers rationnellement homologues à zéro.

On déduit du théorème 6 les corollaires suivants:

Corollaire 1 du théorème 6. *Si* (1) *est une base canonique du groupe $Z^r(K, I)$, alors chaque cycle entier z^r se met uniquement sous la forme*

$$z^r = \sum_i a_i z_i^r + \sum_j b_j u_j^r + \sum_h c_h v_h^r$$

et l'on a $z^r \sim 0$ dans K relativement à $\mathfrak{R}$ si et seulement si tous les coefficients a_i sont nuls et $z^r \sim 0$ dans K relativement à I et lorsqu'en plus tous les coefficients b_j sont divisibles par θ_j.

Corollaire 2 du théorème 6. *Chaque cycle entier z^r du complexe est homologue, relativement à I, à un cycle de la forme $\sum a_i z_i^r + \sum b_j u_j^r$, les coefficients a_i étant déterminés uniquement, tandis que les coefficients b_j se déterminent modulo θ_j (c'est-à-dire à un terme additif près, multiple de θ_j); d'autre part, chaque cycle entier z^r est homologue dans K, relativement à $\mathfrak{R}$, à un cycle de la forme $\sum a_i z_i^r$ avec des entiers a_i uniquement déterminés.*

Remarque 3. Supposons que pour des cycles rationnels donnés $z_1^r, \ldots, z_\nu^r$ du complexe K, il existe des nombres rationnels $c_1, \ldots, c_\nu$ (non tous nuls) tels que $c_1 z_1^r + \ldots + c_\nu z_\nu^r \in H^r(K, \mathfrak{R})$. Nous dirons dans ce cas que ces cycles sont *homologiquement dépendants* entre eux et nous démontrerons qu'il existe alors des nombres entiers $k_1, \ldots, k_\nu$, non tous nuls, tels que $\sum_i k_i z_i^r \in H^r(K, I)$. Autrement dit, les notions de dépendance (d'indépendance) homologique « entière » et « rationnelle » des cycles rationnels (en particulier, entiers) sont équivalentes entre elles.

En effet, on peut déduire de nos hypothèses l'existence d'une chaîne $x^{r+1} \in L^{r+1}(K, \mathfrak{R})$ telle que $\Delta x^{r+1} = \sum c_i z_i^r$. Multiplions les deux membres de cette égalité par le dénominateur commun μ de tous les c_i et de tous les coefficients de la chaîne x^{r+1}. Nous obtiendrons $\Delta \mu x^{r+1} = \sum d_i z_i^r$, où $d_i = \mu c_i$. Alors μx^{r+1} est une chaîne entière et tous les d_i sont entiers. L'assertion est démontrée.

Il est évident que l'on aurait pu également dire: les cycles z_i^r rationnels (en particulier, entiers) sont homologiquement indépendants entre eux dans le complexe K si leurs classes d'homologies sont

---

Nous avons vu que $\hat{H}^r(K, I) = H^r(K, I, R)$, donc il est facile de voir que $\hat{H}^r(K, I) - H^r(K, I) \approx \Theta^r K$. On trouvera un exposé détaillé de toutes les questions de ce genre dans le livre de P. Alexandrov, H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Verlag von J. Springer, 1935, chap. 5, § 1. Ce livre sera désigné par [AH] par la suite.

des éléments indépendants du groupe $\Delta^r(K, \mathfrak{R})$; dans le cas des cycles entiers z_i^r on peut prendre le groupe $\Delta^r(K, I)$ à la place du groupe $\Delta^r(K, \mathfrak{R})$. Le résultat sera le même.

Construisons pour chaque r une base canonique (1) du groupe $Z^r(K, I)$. Par l'isomorphisme Δ entre les groupes $L^r(K, I) - Z^r(K, I)$ et $H^{r-1}(K, I)$ la base

$$\theta_1^{r-1}u_1^{r-1}, \ldots, \theta_{\tau^{r-1}}^{r-1}u^{r-1}; \; v_1^{r-1}, \ldots, v_{\sigma^{r-1}}^{r-1}$$

du groupe $H^{r-1}(K, I)$ correspond à la base $\xi_1^r, \ldots, \xi_{\tau^{r-1}}^r; \eta_1^r, \ldots, \eta_{\sigma^{r-1}}^r$ du groupe $L^r(K, I) - Z^r(K, I)$. Choisissons une fois pour toutes les chaînes $x_i^r \in \xi_i^r$, $y_j^r \in \eta_j^r$. On voit facilement que le système de chaînes

$$(2) \qquad \begin{array}{l} x_1^r, \ldots, x_{\tau^{r-1}}^r; \; y_1^r, \ldots, y_{\sigma^{r-1}}^r; \\ z_1^r, \ldots, z_{\pi^r}^r; \quad u_1^r, \ldots, u_{\tau^r}^r; \; v_1^r, \ldots, v_{\sigma^r}^r \end{array}$$

forme une base du groupe $L^r(K, I)$. Les bases ainsi construites des groupes $L^r(K, I)$, $r = 0, 1, \ldots, n$, s'appellent *bases canoniques des groupes* $L^r(K, I)$.

Chaque système de cycles rationnels, en particulier entiers, de dimension r et homologiquement indépendants

$$z_1^r, \ldots, z_\nu^r$$

peut être complété de manière à obtenir un système homologiquement indépendant maximal

$$z_1^r, \ldots, z_\nu^r, \ldots, z_p^r.$$

Chaque tel système maximal de cycles rationnels homologiquement indépendants de dimension r du complexe K s'appelle $\mathfrak{R}$-*base* du complexe K (ou base homologique) *); on peut la définir comme étant un système de cycles rationnels de dimension r du complexe K tel que chaque cycle rationnel de ce complexe est rationnellement homologique à un cycle unique de la forme

$$(3) \qquad c_1 z_1^r + \ldots + c_p z_p^r,$$

où $c_1, \ldots, c_p$ sont des nombres rationnels.

Si une $\mathfrak{R}$-base est constituée de cycles entiers, alors on l'appelle $(I, \mathfrak{R})$-base.

Remarque 4. Les groupes $L^r(K, \mathfrak{R})$ et $Z^r(K, \mathfrak{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des rationnels. Les bases de ces espaces s'appellent *bases rationnelles des groupes respectifs* $L^r(K, \mathfrak{R})$ et $Z^r(K, \mathfrak{R})$.

---

*) En dimension r, bien entendu.

Démontrons qu'une base canonique (2) du groupe $L^r(K, I)$ est en même temps une base rationnelle du groupe $L^r(K, \mathfrak{R})$. En effet, chaque chaîne entière de dimension r, et, donc, chaque simplexe orienté t^r du complexe K, peut être représentée de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de la base (2). On en déduit immédiatement que chaque chaîne rationnelle peut être représentée comme une combinaison à coefficients rationnels des éléments de la base (2). Si, pour une certaine chaîne x^r, il existait deux telles représentations, alors une certaine combinaison linéaire rationnelle des chaînes (2), et, par conséquent, une combinaison linéaire entière, s'annulerait, ce qui contredit l'indépendance linéaire des chaînes (2).

Remarque 5. Les cycles

$$z_1^r, \ldots, z_{\pi^r}^r; \; u_1^r, \ldots, u_{\tau^r}^r; \; v_1^r, \ldots, v_{\sigma^r}^r \tag{4}$$

forment une base rationnelle du groupe $Z^r(K, \mathfrak{R})$. En effet, soit $z^r \in L^r(K, \mathfrak{R})$. Alors

$$z^r = \sum a_i x_i^r + \sum b_j y_j^r + \sum c_h z_h^r + \sum d_k u_k^r + \sum e_l v_l^r, \tag{5}$$

où tous les coefficients sont rationnels. Démontrons que les coefficients a_i, b_j sont nuls. En effet, en multipliant les deux membres de l'identité (5) par le dénominateur commun d de tous les coefficients du cycle z^r et de tous les coefficients a_i, b_j, c_h, d_k, e_l, on obtient une représentation du cycle entier dz^r sous forme de combinaison linéaire entière

$$dz^r = \sum da_i x_i^r + \sum db_j y_j^r + \sum dc_h z_h^r + \sum dd_k z_k^r + \sum e_l v_l^r,$$

d'où il découle que tous les da_i, db_j et donc tous les a_i, b_j sont nuls.

Ainsi nous avons la relation

$$z^r = \sum c_h z_h^r + \sum d_k u_k^r + \sum e_l v_l^r.$$

Son unicité découle de l'indépendance linéaire des cycles z_h^r, u_k^r, v_l^r.

On démontre d'une manière analogue que les cycles u_k^r, v_l^r forment une base rationnelle du sous-groupe $H^r(K, \mathfrak{R})$ du groupe $L^r(K, \mathfrak{R})$.

Nous aurons besoin par la suite de l'assertion suivante:

Remarque 6. Tout système homologiquement indépendant de cycles rationnels

$$z_1^r, \ldots, z_p^r \tag{6}$$

peut être complété de manière à obtenir une base rationnelle du groupe $L^r(K, \mathfrak{R})$, telle que les cycles de cette base forment une base rationnelle du groupe $Z^r(K, R)$.

D é m o n s t r a t i o n. Puisque ni l'indépendance homologique des cycles, ni la propriété des chaînes de former une base rationnelle ne changent par multiplication par un nombre rationnel non nul, on peut toujours supposer que les cycles (6) sont entiers. D'autre part, puisque tout système linéairement indépendant (6) peut être complété de manière à obtenir un système maximal, on peut dès le début supposer le système (6) maximal. Prenons maintenant une base canonique quelconque

$$\mathfrak{B} = \{x_i^r, y_j^r, z_h^r, u_k^r, v_l^r\} \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, \tau^{r-1}, \\ j = 1, \ldots, \sigma^{r-1}, \\ h = 1, \ldots, \pi^r, \\ k = 1, \ldots, \tau^r, \\ l = 1, \ldots, \sigma^r \end{array}$$

du groupe $L^r(K, I)$. Montrons que

$$\mathfrak{A} = \{x_i^r, y_j^r, z_h^r, u_k^r, v_l^r\} \tag{7}$$

est une base rationnelle du groupe $L^r(K, \mathfrak{R})$. En effet, soit x^r une chaîne rationnelle quelconque. Alors

$$x^r = \sum a_i x_i^r + \sum b_j y_j^r + \sum c_h z_h'^r + \sum d_k u_k^r + \sum e_l v_l^r.$$

Le système (6) étant maximal, le cycle $z'^r = \sum c_h z_h'^r$ peut être mis sous la forme

$$z'^r = \sum c_h' z_h^r + w^r, \tag{8}$$

où $w^r \in H^r(K, \mathfrak{R})$. Désignons par d le dénominateur commun de tous les coefficients rationnels du cycle w^r. Alors dw^r est un cycle entier rationnellement homologique à 0 dans K. D'après le corollaire 1 du théorème (6) on a $dw^r = \sum \beta_\mu u_\mu^r + \sum \gamma_\nu v_\nu^r$, de sorte que

$$z'^r = \sum c_h' z_h^r + \sum \frac{\beta_\mu}{d} u_\mu^r + \sum \frac{\gamma_\nu}{d} v_\nu^r$$

et donc

$$x^r = \sum a_i x_i^r + \sum b_j y_j^r + \sum c_h' z_h^r + \sum d_k' u_k^r + \sum e_l' v_l^r. \tag{9}$$

Pour démontrer que $\mathfrak{A}$ est une base rationnelle du groupe $L^r(K, \mathfrak{R})$ il nous reste à établir que les coefficients dans la représentation (9) sont univoquement déterminés. Pour cela il suffit à son tour de montrer que l'identité

$$\sum a_i x_i^r + \sum b_j y_j^r + \sum c_h z_h^r + \sum d_k u_k^r + \sum e_l v_l^r = 0 \tag{10}$$

ne peut être vérifiée que lorsque tous ses coefficients s'annulent. En multipliant les deux membres de l'identité (10) par un nombre

naturel approprié, on peut admettre que tous ses coefficients sont entiers. Démontrons tout d'abord que tous les c_h sont nuls. Dans le cas contraire, le cycle entier $z^r = -\sum c_h z_h^r$ serait une combinaison linéaire

$$\sum a_i x_i^r + \sum b_j y_j^r + \sum d_k u_k^r + \sum e_l v_l^r$$

d'éléments de la base canonique $\mathfrak{B}$ du groupe $L^r(K, I)$. Mais chaque cycle z^r se met de manière unique sous la forme de combinaison linéaire des éléments z_h^r, u_k^r, v_l^r de la base canonique, donc tous les coefficients a_i et b_j dans l'expression (10) doivent être nuls et le cycle $-\sum c_h z_h^r$ est une combinaison linéaire des u_k^r et des v_l^r. Mais ceci est impossible, puisque d'après l'indépendance homologique des cycles z_h^r, le cycle z^r n'est pas homologue à zéro dans K relativement à $\mathfrak{R}$ tandis que tous les u_k^r et tous les v_l^r sont contenus dans le groupe $H^r(K, \mathfrak{R})$.

Nous avons donc démontré que tous les coefficients c_h sont nuls. Mais alors les coefficients a_i, b_j, d_k et e_l sont nuls aussi, car dans le cas contraire il y aurait contradiction avec l'indépendance linéaire des éléments x_i^r, y_j^r, u_k^r, v_l^r de la base canonique $\mathfrak{B}$.

Ainsi le système $\mathfrak{A}$ est une base rationnelle du groupe $L^r(K, \mathfrak{R})$.

Il reste à démontrer que les cycles

$$(11) \qquad z_h^r,\ u_k^r,\ v_l^r \begin{cases} h = 1, \ldots, \pi^r, \\ k = 1, \ldots, \tau^r, \\ l = 1, \ldots, \sigma^r \end{cases}$$

forment une base rationnelle du groupe $Z^r(K, \mathfrak{R})$. Puisque l'indépendance linéaire des éléments z_h^r, u_k^r, v_l^r de la base (7) est déjà démontrée, il reste à établir que chaque cycle rationnel z^r peut être mis sous forme de combinaison linéaire rationnelle des cycles (11). Mais les cycles z_h^r forment un système indépendant maximal, par conséquent le cycle z^r peut être représenté sous la forme

$$z^r = \sum a_i z_i^r + w^r, \text{ où } w^r \in H^r(K, \mathfrak{R}).$$

Si d est le dénominateur commun de tous les coefficients du cycle rationnel w^r, on a pour le cycle entier dw^r

$$dw^r = \sum b_k u_k^r + \sum e_l v_l^r$$

et donc

$$z^r = \sum a_i z_i^r + \sum \frac{b_k}{d} u_k^r + \sum \frac{e_l}{d} v_l^r,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Démontrons maintenant le théorème fondamental concernant les groupes $\Delta^r(K, \mathfrak{R})$.

Théorème $8_{\mathfrak{R}}$. *Le groupe $\Delta^r(K, \mathfrak{R})$ est la somme directe de p exemplaires d'un groupe isomorphe au groupe $\mathfrak{R}$, et leur nombre est le nombre de Betti $p = \pi^r$ de dimension r du complexe K.*

Démonstration. Il suffit de construire une $(I, \mathfrak{R})$-base de K constituée exactement de π^r cycles. Montrons qu'une telle base est fournie par le système

$$z_1^r, \ldots, z_{\pi^r}^r$$

obtenu à partir de la base (2).

En effet, si les cycles indiqués seraient homologiquement dépendants, le système (2) serait linéairement dépendant. Supposons maintenant que z^r est un cycle quelconque de $Z^r(K, \mathfrak{R})$. Il nous faut montrer qu'il est homologue (à coefficients rationnels) à une combinaison linéaire des cycles $z_1^r, \ldots, z_{\pi^r}^r$. Mais cette dernière assertion se déduit immédiatement de la remarque 5: la représentation

$$z^r = \sum_h c_h z_h^r + \sum_k d_k u_k^r + \sum_l e_l v_l^r$$

est unique, de plus u_k^r, v_l^r forment une base rationnelle du groupe $H^r(K, \mathfrak{R})$ de sorte que $z^r - \sum_h c_h z_h^r \in H^r(K, \mathfrak{R})$.

4. Groupe de coefficients R. Ce numéro est consacré à la démonstration du théorème suivant:

Théorème 8_R. *Le groupe $\Delta^r(K, R)$ est la somme directe algébrique de p copies du groupe R, où $p = \pi^r$ est le nombre de Betti de dimension r du complexe K.*

La chaîne $x^r = \sum_{j=1}^{m} x_j t_j^r$ est un cycle si et seulement si l'on a $\Delta x^r = \sum_{i=1}^{h} \left(\sum_{j=1}^{m} x_j (t_j^r : t_i^{r-1}) \right) t_i^{r-1} = 0$, i.e.

$$\sum_{j=1}^{m} x_j (t_j^r : t_i^{r-1}) = 0; \quad i = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

En considérant (3) comme un système d'équations linéaires en x_j à coefficients entiers $(t_j^r : t_i^{r-1})$, on constate que tous les cycles sont engendrés par les solutions du système (3). Il est évident qu'un système fondamental de solutions de (3) peut être choisi rationnel; supposons que c'est

$$z_1', z_2', \ldots, z_s'. \tag{2}$$

Par conséquent, chaque cycle de $Z(K, R)$ se représente de manière unique sous la forme

$$z = c_1 z_1' + \ldots + c_s z_s', \tag{3}$$

où les c_i sont des nombres réels quelconques; chaque cycle rationnel z est en même temps représenté sous la même forme avec des coefficients rationnels c_i.

Supposons maintenant que

(4) $$z_1, z_2, \ldots, z_p$$

est une $(I, \mathfrak{R})$-base quelconque dans K. Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier: 1) que chaque cycle réel z^r est homologue relativement à R à une certaine combinaison linéaire des cycles (4) à coefficients réels et 2) que ces derniers coefficients sont uniquement déterminés.

Démontrons (1). Par définition d'une $(I, \mathfrak{R})$-base, il existe de telles chaînes rationnelles x_j^{r+1} et de tels nombres rationnels α_{ij}, $i=1, \ldots, p$; $j=1, \ldots, s$ que $z_j' - \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} z_i = \Delta x_j^{r+1}$. D'après (3), on a $z^r = \sum_{j=1}^{s} c_j z_j'$ pour certains nombres réels c_j, d'où l'on tire

$$z^r = \sum_{j=1}^{s} c_j \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} z_i + \Delta x_j^{r+1} \Big) = \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{s} c_j \alpha_{ij} \Big) z_i + \Delta \Big(\sum_{j=1}^{s} c_j x_j^{r+1} \Big).$$

Démontrons (2). Si le cycle $z^r \in Z^r(K, R)$ est homologue relativement à R à deux combinaisons linéaires des cycles (4), alors une combinaison linéaire des cycles (4) est homologue à zéro:

(5) $$\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_p z_p = \Delta x^{r+1},$$

où α_i sont des nombres réels et $x^{r+1} \in L^{r+1}(K, R)$. Montrons qu'il existe alors également des nombres rationnels α_i et une chaîne x^{r+1} pour lesquels (5) est vérifié, ce qui est impossible.

Soient $z_i = \sum_{h=1}^{q} c_{ih} t_h^r$, $i = 1, \ldots, p$, et $x^{r+1} = \sum_{l=1}^{q'} \beta_l t_l^{r+1}$, où $2q$ et $2q'$ sont respectivement le nombre de cellules du complexe K de dimension r et $r+1$. En substituant dans (5) et en appliquant Δ, on obtient

(6) $$\sum_{h=1}^{q} \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_{ih} \Big) r_h^r = \sum_{h=1}^{q} \Big(\sum_{l=1}^{q'} \beta_l (t_l^{r+1} : t_h^r) \Big) t_h^r$$

ou

(7) $$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_{ih} = \sum_{l=1}^{q'} \beta_l \varepsilon_{lh}, \quad h=1, \ldots, q,$$

où $\varepsilon_{lh} = (t_l^{r+1} : t_h^r)$. En considérant (6) comme un système d'équations linéaires à coefficients rationnels (même entiers) c_{ih}, ε_{lh}, nous voyons qu'il admet d'après (7) des solutions réelles et donc rationnelles.

R e m a r q u e. Chaque chaîne rationnelle du complexe K peut être évidemment considérée comme une chaîne réelle; dans ce cas tout cycle rationnel sera à la fois un cycle relativement à R, tandis qu'un cycle rationnel homologue à zéro pour $\mathfrak{R}$ sera également homologue à zéro pour R. Autrement dit, on a un homomorphisme naturel (algébrique)

(8) $$\iota : \Delta^r(K, \mathfrak{R}) \to \Delta^r(K, R).$$

De nos raisonnements découle en particulier que cet homomorphisme est en fait un isomorphisme.

5. Treillis (compléments sur la théorie des groupes abéliens libres). Un groupe abélien libre de rang n, muni d'une base fixe $e_1, \ldots, e_n$, s'appelle *treillis* *) de rang n et sera désigné par $[e_1, \ldots, e_n]$. Une base fixée dans un

*) Ne pas confondre avec le mot «treillis» dans le sens de Bourbaki.

treillis sera appelée *base initiale*. Les éléments d'un treillis $[e_1, \ldots, e_n]$ seront généralement notés sous forme de sommes $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ à coefficients entiers. Introduisons dans le groupe $[e_1, \ldots, e_n]$ le produit scalaire (x, y) des éléments $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ en posant

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Soit $u_1, \ldots, u_n$ une autre base quelconque du treillis $[e_1, \ldots, e_n]$. Chaque élément x du treillis se représente de manière unique sous la forme

$$x = x_1'u_1 + \ldots + x_n'u_n,$$

et les coefficients x_k' peuvent naturellement être appelés composantes *contravariantes* de l'élément x dans la base $u_1, \ldots, u_n$. Il est évident que chaque élément du treillis $[e_1, \ldots, e_n]$ est bien défini par ses composantes contravariantes relativement à une base quelconque.

Les nombres

$$a_1 = (x, u_1), \ldots, a_n = (x, u_n)$$

s'appellent composantes *covariantes* de l'élément x dans la base $u_1, \ldots, u_n$. Il est évident que relativement à la base initiale les composantes covariantes d'un élément quelconque coïncident avec ses composantes contravariantes.

Lemme 1. *Chaque élément du treillis est uniquement déterminé par ses composantes covariantes relativement à une base quelconque du treillis.*

Démonstration. Soit $u_i = a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, la base donnée et supposons données $(x, u_i) = a_i$. Il s'agit de trouver les coefficients x_i dans la représentation $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Remarquons tout d'abord: puisque $u_1, \ldots, u_n$ forment une base, alors $e_1, \ldots, e_n$ s'expriment en termes de $u_1, \ldots, u_n$:

$$e_i = b_{i1}u_1 + \ldots + b_{in}u_n$$

et $\det \| a_{ij} \| \cdot \det \| b_{ij} \| = 1$. Comme les nombres $\det \| a_{ij} \|$ et $\det \| b_{ij} \|$ sont entiers, ils sont égaux à ± 1.

Pour déterminer les x_i, nous avons le système d'équations

$$(x, u_i) = (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n, u_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Puisque $u_i = a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n$, ce système peut être mis sous la forme

$$x_1a_{i1} + \ldots + x_na_{in} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

et se résout relativement à x_i à l'aide de la règle de Cramer et, en vertu de la relation $\det \| a_{ij} \| = \pm 1$, les solutions seront entières. Le lemme est démontré.

Deux bases $U = u_1, \ldots, u_n$ et $\bar{U} = \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ sont dites *duales* si

$$(u_i, \bar{u}_j) = \delta_{ij}$$

quels que soient $i, j = 1, \ldots, n$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les éléments u_i et $\bar{u}_i$ s'appellent *éléments correspondants* des deux bases duales.

Lemme 2. *Pour chaque base d'un treillis, il existe une base duale et une seule.*

En effet, si

$$u_i = a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

sont les éléments d'une base donnée U et

$$e_h = b_{h1}u_1 + \ldots + b_{hn}u_n, \quad h = 1, \ldots, n,$$

les éléments $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ sont directement définis par les conditions

$$(\bar{u}_i, e_h) = (\bar{u}_i, b_{h1}u_1 + \ldots + b_{hn}u_n) = b_{h1}(\bar{u}_i, u_1) + \ldots + \\ + b_{hn}(\bar{u}_i, u_n) = b_{hi}.$$

Puisque la matrice des coefficients $\| b_{hi} \|$ est unimodulaire (étant la matrice inverse à la matrice $\| a_{ij} \|$), les éléments $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ forment une base d'après le lemme 1, ce qu'il fallait démontrer.

Soient deux treillis

$$A = [e_1, \ldots, e_p], \quad B = [\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_q].$$

Les homomorphismes f du treillis A dans le treillis B et g du treillis B dans le treillis A sont dits *duaux* si pour des éléments quelconques $x \in A$ et $y \in B$ on a $(f(x), y) = (x, g(y))$.

Lemme 3. *Soient $U = u_1, \ldots, u_p$ et $\bar{U} = \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ des bases duales du treillis A et $V = v_1, \ldots, v_q$ et $\bar{V} = \bar{v}_1 + \ldots + \bar{v}_q$ des bases duales du treillis B, f et g des homomorphismes duaux (respectivement de A dans B et de B dans A). Soit enfin*

$$f(u_i) = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{iq}v_q.$$

Alors

$$g(\bar{v}_j) = a_{1j}\bar{u}_1 + \ldots + a_{pj}\bar{u}_p.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit, d'après le lemme 1, d'établir que pour tout $j = 1, \ldots, q$ les éléments $g(\bar{v}_j) \in A$ et $a_{1j}\bar{u}_1 + \ldots + a_{pj}\bar{u}_p$ ont les mêmes composantes covariantes dans la base U. Calculons donc ces composantes :

$$(g(\bar{v}_j), u_h) = (u_h, g(\bar{v}_j)) = (f(u_h), \bar{v}_j) = (a_{h1}v_1 + \ldots + a_{hq}v_q, \bar{v}_j) = \\ = (a_{h1}v_1, \bar{v}_j) + \ldots + (a_{hq}v_q, \bar{v}_j) = a_{hj}$$

et

$$(a_{1j}\bar{u}_1 + \ldots + a_{pj}\bar{u}_p, u_h) = a_{1j}(\bar{u}_1, u_h) + \ldots + a_{pj}(\bar{u}_p, u_h) = a_{hj}.$$

Le lemme est démontré.

R e m a r q u e 7. Il découle de la formule $(g(\bar{v}_j), u_h) = a_{hj}$ que nous venons d'obtenir que a_{ij}, qui est la j-ième composante contravariante de l'élément $f(u_i)$ dans la base V, est en même temps la i-ième composante covariante de l'élément $g(\bar{v}_j)$ dans la base U.

Définissons enfin les treillis modulo m, pour un nombre premier m. Désignons par ${}^m[e_1, \ldots, e_n]$ le groupe dont les éléments sont toutes les formes linéaires $\sum a_i e_i$ où les e_i sont les variables données et les coefficients sont des résidus modulo m ; le groupe ${}^m[e_1, \ldots, e_n]$ s'appelle *treillis de rang n modulo m*. Les variables $e_1, \ldots, e_n$ forment la base initiale du treillis (on identifie e_i avec la forme linéaire $1 \cdot e_i$ où 1 est l'élément unité du corps I_m).

Les définitions du produit scalaire, des composantes covariantes et contravariantes, des bases duales et des homomorphismes duaux, ainsi que les lemmes 2 et 3 se rapportent automatiquement à ce cas.

Citons en guise d'un premier exemple d'un treillis le groupe $L^r(K, I)$ des chaînes entières d'un complexe fini simplicial (ou cellulaire) K. Le rang de ce treillis est égal au nombre de simplexes (de cellules) de dimension r du complexe K (l'orientation n'étant pas considérée), tandis que la base initiale se compose de ces simplexes (cellules), numérotés et munis d'une orientation fixe.

	$x_1^{r-1}, \ldots, x_{\tau^{r-2}}^{r-1}$	$y_1^{r-1}, \ldots, y_{\sigma^{r-2}}^{r-1}$	$z_1^{r-1}, \ldots, z_{\pi^{r-1}}^{r-1}$	$u_1^{r-1}, \ldots, u_{\tau^{r-1}}^{r-1}$	$v_1^{r-1}, \ldots, v_{\sigma^{r-1}}^{r-1}$
x_1^r $\vdots$ $x_{\tau^{r-1}}^r$	0	0	0	0_1^{r-1} $\ddots$ $0_{\tau^{r-1}}^{r-1}$	0
y_1^r $\vdots$ $y_{\sigma^{r-1}}^r$	0	0	0	0	1 $\ddots$ 1
z_1^r $\vdots$ $z_{\pi^r}^r$	0	0	0	0	0
u_1^r $\vdots$ $u_{\tau^r}^r$	0	0	0	0	0
v_1^r $\vdots$ $v_{\sigma^r}^r$	0	0	0	0	0

Nous avons déjà rencontré un exemple d'homomorphismes duaux au § 2, n° 5. A savoir, sont duaux l'opérateur de frontière Δ du treillis $L^r(K, I)$ dans le treillis $L^{r-1}(K, I)$ et l'opérateur de cofrontière ∇ du treillis $L^{r-1}(K, I)$ dans le treillis $L^r(K, I)$.

6. Matrices des opérateurs Δ et ∇ par rapport à des bases canoniques. Théorème fondamental des groupes $\nabla^r(K, I)$. Soit dans un complexe K de dimension n un système de bases canoniques (p. 40)

$$W^r = \{x_1^r, \ldots, x_{\tau^{r-1}}^r;\ \ y_1^r, \ldots, y_{\sigma^{r-1}}^r;\ \ z_1^r, \ldots, z_{\pi^r}^r;\ \ u_1^r, \ldots, u_{\tau^r}^r;\ \ v_1^r, \ldots, v_{\sigma^r}^r\}$$

pour chaque $r = 0, 1, \ldots, n$.

Il est évident que l'homomorphisme Δ (du groupe L^rK dans $L^{r-1}K$) possède relativement à ces bases la matrice (à la page 48) dans laquelle chaque rangée exprime la frontière de l'élément disposé à sa gauche.

Considérons maintenant les bases $\overline{W}^r$ duales aux bases W^r (voir n° 5); les éléments de ces bases qui correspondent aux éléments

$$x_1^r, \ldots, x_{\tau^{r-1}}^r;\ \ y_1^r, \ldots, y_{\sigma^{r-1}}^r;\ \ z_1^r, \ldots, z_{\pi^r}^r;\ \ u_1^r, \ldots, u_{\tau^r}^r;\ \ v_1^r, \ldots, v_{\sigma^r}^r$$

seront désignés par

$$\bar{u}_1^r, \ldots, \bar{u}_{\tau^{r-1}}^r;\ \ \bar{v}_1^r, \ldots, \bar{v}_{\sigma^{r-1}}^r;\ \ \bar{z}_1^r, \ldots, \bar{z}_{\pi^r}^r;\ \ \bar{x}_1^r, \ldots, \bar{x}_{\tau^r}^r;\ \ \bar{y}_1^r, \ldots, \bar{y}_{\sigma^r}^r.$$

Puisque les homomorphismes Δ et ∇ sont duaux, le lemme 3 du § 4, n° 5, permet de trouver facilement la matrice de l'homomorphisme ∇ (voir tableau à la page 50, où chaque colonne exprime la ∇-frontière de son élément en tête).

Nous pouvons maintenant exprimer les ∇-groupes du complexe K en termes des Δ-groupes de ce complexe, ce qui est le but principal de ce numéro. A savoir, nous démontrerons l'assertion suivante.

Théorème 9. *Pour tout complexe cellulaire K le groupe $\nabla^r(K, I) \equiv \nabla^r K$ est isomorphe à la somme directe du groupe de torsion $\Theta^{r-1}K$ de dimension $(r-1)$ du complexe K et du groupe abélien libre de rang $\pi^r = \pi^r K$.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque $\overline{W}^r$ est une base du groupe L^rK, chaque chaîne x^r se met de manière unique sous la forme

$$x^r = \sum a_i \bar{u}_i^r + \sum b_j \bar{v}_j^r + \sum c_h \bar{z}_h^r + \sum d_k \bar{x}_k^r + \sum e_l \bar{y}_l^r$$

avec

$$\nabla x^r = \sum d_k \nabla \bar{x}_k^r + \sum e_l \nabla \bar{y}_l^r = \sum d_k \theta_k^r \bar{u}_k^{r+1} + \sum e_l \bar{v}_l^{r+1}. \tag{12}$$

	$\bar{u}_1^{r-1}, \ldots, \bar{u}_{\tau^{r-2}}^{r-1}$	$\bar{v}_1^{r-1}, \ldots, \bar{v}_{\sigma^{r-2}}^{r-1}$	$\bar{z}_1^{r-1}, \ldots, \bar{z}_{\pi^{r-1}}^{r-1}$	$\bar{x}_1^{r-1}, \ldots, \bar{x}_{\tau^{r-1}}^{r-1}$	$\bar{y}_1^{r-1}, \ldots, \bar{y}_{\sigma^{r-1}}^{r-1}$
$\bar{u}_1^r$ $\vdots$ $\bar{u}_{\tau^{r-1}}^r$	0	0	0	θ_1^{r-1} $\ddots$ $\theta_{\tau^{r-1}}^{r-1}$	0
$\bar{v}_1^r$ $\vdots$ $\bar{v}_{\sigma^{r-1}}^r$	0	0	0	0	1 $\ddots$ 1
$\bar{z}_1^r$ $\vdots$ $\bar{z}_{\pi^r}^r$	0	0	0	0	0
$\bar{x}_1^r$ $\vdots$ $\bar{x}_{\tau^r}^r$	0	0	0	0	0
$\bar{y}_1^r$ $\vdots$ $\bar{y}_{\sigma^r}^r$	0	0	0	0	0

Par conséquent, la chaîne x^r est un ∇-cycle si et seulement si dans la représentation (12) on a

$$d_k = 0, \quad e_l = 0 \quad \begin{cases} k = 1, \ldots, \tau^r, \\ l = 1, \ldots, \sigma^r. \end{cases}$$

Autrement dit, les ∇-cycles $\bar{u}_i^r, \bar{v}_j^r, \bar{z}_h^r$ forment une base du groupe Z_∇^r.

D'autre part, puisque $\overline{W}^r$ et $\overline{W}^{r-1}$ sont respectivement les bases des groupes L^rK et $L^{r-1}K$, chaque égalité de la forme $\nabla x^{r-1} = x^r$ est une combinaison linéaire d'égalités de la forme

$$\nabla \bar{x}_i^{r-1} = \theta_i^{r-1} \bar{u}_i^r, \quad \nabla \bar{y}_j^{r-1} = \bar{v}_j^r.$$

Cela signifie que le cocycle

$$x^r = \sum a_i \bar{u}_i^r + \sum b_j \bar{v}_j^r + \sum c_h \bar{z}_h^r$$

est contenu dans le groupe $H_\nabla^r \equiv H_\nabla^r(K, I)$ si et seulement si tous les c_h sont nuls et tous les a_i sont divisibles par θ_i^{r-1}. Autrement dit, les ∇-cycles

$$\theta_i^{r-1} \bar{u}_1^r, \ldots, \theta_{\tau^{r-1}}^{r-1} \bar{u}_{\tau^{r-1}}^r; \quad \bar{v}_1^r, \ldots, \bar{v}_{\sigma^{r-1}}$$

forment une base du groupe H_∇^r. Ainsi, si l'on désigne les sous-groupes cycliques des groupes L^rK engendrés par les éléments $\bar{x}_k^r$, $\bar{y}_l^r$, $\bar{z}_h^r$, $\bar{u}_i^r$, $\bar{v}_j^r$ respectivement par $\bar{X}_k^r$, $\bar{Y}_l^r$, $\bar{Z}_h^r$, $\bar{U}_i^r$, $\bar{V}_j^r$, on obtient les décompositions en sommes directes:

$$L^r = \sum_1^{\tau^r} \bar{X}_k^r + \sum_1^{\sigma^r} \bar{Y}_l^r + \sum_1^{\pi^r} \bar{Z}_h^r + \sum_1^{\tau^{r-1}} \bar{U}_i^r + \sum_1^{\delta^{r-1}} \bar{V}_j^r,$$

$$Z_\nabla^r = \sum_1^{\pi^r} \bar{Z}_h^r + \sum_1^{\tau^{r-1}} \bar{U}_i^r + \sum_1^{\sigma^{r-1}} \bar{V}_j^r,$$

$$H_\nabla^r = \sum_1^{\tau^{r-1}} \theta_i^{r-1} \bar{U}_i^r + \sum_1^{\sigma^{r-1}} \bar{V}_j^r,$$

d'où (en écrivant les isomorphismes sous forme d'égalités)

$$\nabla^r K = Z_\nabla^r - H_\nabla^r = \sum_{h=1}^{\pi^r} \bar{Z}_h^r + \sum_{i=1}^{\tau^{r-1}} (\bar{U}_i^r - \theta_i^{r-1} \bar{U}_i^r).$$

Ici le groupe $\bar{U}_i^r - \theta_i^{r-1} \bar{U}_i^r$ est un groupe cyclique fini d'ordre θ_i^{r-1}, de sorte que le groupe $\sum (\bar{U}_i^r - \theta_i^{r-1} \bar{U}_i^r)$ est isomorphe au groupe $\Theta^{r-1}K$, et le théorème 9 est démontré.

7. Groupes de Betti modulo m *). On peut démontrer (voir par exemple TC, chap. 9, § 4) que pour chaque $m \geqslant 2$ les groupes $\Delta^r(K, I_m)$ et $\nabla^r(K, I_m)$ sont isomorphes et, par conséquent, sont de même rang modulo m **). Ce rang s'appelle *nombre de Betti modulo m de dimension r du complexe K*.

De même que tout groupe abélien fini, le groupe $\Delta^r(K, I_m)$ est la somme directe de groupes cycliques finis $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ (dont les ordres divisent le nombre m). Si $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ sont respectivement les générateurs des groupes $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$, on peut choisir dans chaque classe ζ_i un cycle z_i^r et obtenir ainsi une *base homologique modulo m de dimension r du complexe K*. Si m est un nombre premier, alors la base homologue de dimension r modulo m consiste de cycles (modulo m) homologiquement indépendants modulo m et peut être définie comme un système maximal de tels cycles.

Chaque chaîne entière x définit de façon unique la chaîne $\mathfrak{r}_m x$ modulo m, obtenue en remplaçant les coefficients entiers par leurs résidus modulo m. Il est évident que

$$\Delta \mathfrak{r}_m x = \mathfrak{r}_m \Delta x.$$

On dit souvent que chaque chaîne entière x est en même temps une chaîne modulo m, en sous-entendant que l'on identifie alors x avec

---

*) Le cas $m = 2$ mérite une considération particulière. Puisque le groupe I_2 consiste de deux éléments, 0 et 1, et $1 + 1 = 0$, on a pour $x^r \in L^r(K, I_2)$ et pour toute cellule $t^r \in K$ la relation

$$(x^r, -t^r) = (-x^r, t^r) = (x^r, t^r),$$

i. e. toute chaîne modulo 2 prend une même valeur sur deux cellules opposées. Par conséquent, dans le cas d'un complexe K simplicial, la chaîne x^r fait correspondre à chaque simplexe $|t^r| \in K$ une valeur bien définie, égale à 1 ou à 0. Ceci permet de considérer les chaînes modulo 2 des complexes simpliciaux comme fonctions à valeurs 0 et 1, définies sur l'ensemble des simplexes $T_1^r, T_2^r, \ldots$ $\ldots, T_{\alpha^r}^r$ du complexe K.

Entre ces fonctions et les sous-ensembles de l'ensemble de tous les éléments de dimension r du complexe K il y a une bijection ; on obtient cette bijection en faisant correspondre à chaque chaîne $x^r \in L^r(K, I_2)$ l'ensemble des simplexes $T_i^r \in K$ de dimension r sur lesquels la chaîne x^r prend la valeur 1.

**) Une combinaison linéaire entière $\sum_{i=1}^{\nu} c_i x_i$ d'éléments d'un groupe abélien quelconque X s'appelle *non triviale modulo m* si tous les c_i ne sont pas divisibles par m. Les éléments $x_1, \ldots, x_\nu$ s'appellent *linéairement dépendants modulo m* si une combinaison linéaire non triviale modulo m de ces éléments est égale à zéro ; dans le cas contraire les éléments $x_1, \ldots, x_\nu$ sont *linéairement indépendants modulo m*. Le plus grand des nombres r, tels que le groupe X possède r éléments linéairement indépendants modulo m, s'appelle *rang du groupe X modulo m*. Si pour chaque r il existe r éléments linéairement indépendants modulo m, le rang du groupe X modulo m est dit infini. Les cycles (modulo m) du complexe K s'appellent *homologiquement indépendants* dans K (modulo m) si leurs classes d'homologie sont indépendantes (comme éléments du groupe $\Delta^r(K, I_m)$).

la chaîne $\mathfrak{r}_m x$. Dans le même ordre d'idées on dit qu'un cycle entier x d'un complexe K est dans ce complexe homologue à zéro modulo m si l'on a $\mathfrak{r}_m x \sim 0$ dans K (relativement au groupe de coefficients I_m).

Les deux assertions suivantes, dont la deuxième sera essentielle pour le chapitre 3, permettent de clarifier les relations existantes entre les homologies entières et les homologies modulo m.

Proposition 1. *Pour qu'un cycle entier z^r soit homologue à zéro modulo m dans le complexe K il est nécessaire et suffisant qu'il existe dans K un cycle entier x^r tel que*

$$z^r - mx^r \sim 0 \text{ dans } K \text{ relativement à } I.$$

Démonstration. Nécessité. Soit

$$\mathfrak{r}_m z^r \in H^r(K, I_m).$$

Il existe alors une chaîne $x^{r+1}_{(m)} \in L^{r+1}(K, I_m)$ telle que

$$\mathfrak{r}_m z^r = \Delta x^{r+1}_{(m)}.$$

Désignons par x^{r+1} une chaîne entière quelconque, soumise à la condition

$$\mathfrak{r}_m x^{r+1} = x^{r+1}_{(m)}.$$

Alors

$$\mathfrak{r}_m z^r = \Delta x^{r+1}_{(m)} = \Delta \mathfrak{r}_m x^{r+1} = \mathfrak{r}_m \Delta x^{r+1},$$

i.e.

$$\mathfrak{r}_m (z^r - \Delta x^{r+1}) = 0$$

et donc

$$z^r - \Delta x^{r+1} = mx^r, \quad \text{où} \quad x^r \in L^r(K, I).$$

Par conséquent,

$$z^r - mx^r \in H^r(K, I),$$

ce qui démontre la nécessité de la condition.

Suffisance. Si

$$z^r - mx^r = \Delta x^{r+1},$$

alors

$$\mathfrak{r}_m z^r = \mathfrak{r}_m \Delta x^{r+1} = \Delta \mathfrak{r}_m x^{r+1} \in H^r(K, I_m),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 2. *Si le cycle $z^r \in Z^r(K, I)$ n'est pas homologue à zéro dans K pour I, il existe alors un entier $s \geqslant 2$ tel que z^r n'est pas homologue à zéro dans K modulo s^ν, où ν est un entier naturel quelconque suffisamment grand.*

Nous démontrerons même l'assertion plus forte suivante.

Proposition 2'. *Si le cycle entier z^r n'est pas homologue à zéro dans K relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{R}$ (i.e. l'ordre *) du cycle z^r est infini), alors z^r n'est pas homologue à zéro dans K modulo m pour tout m suffisamment grand.*

Mais si l'ordre du cycle z^r est fini et égal à s, la proposition 2 est satisfaite pour ce nombre s.

Démonstration. Supposons que z^r n'est pas homologue à zéro pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$ et en même temps que $z^r \sim 0$ mod m dans K. Démontrons que dans ce cas le nombre m est nécessairement plus petit qu'un certain nombre c qui dépend du cycle z^r — ce qui établira évidemment la première partie de la proposition 2'.

Ainsi, $z^r \sim 0$ mod m. Alors d'après la proposition 1, il existe un cycle entier y^r tel que

$$z^r \sim my^r \text{ dans } K \text{ relativement à } I.$$

Prenons dans K une $(I, \mathfrak{R})$-base quelconque

$$z_1^r, \ldots, z_p^r.$$

Puisque z^r n'est pas homologue à 0 dans K pour $\mathfrak{R}$, il existe de nombres univoquement définis $c_1, \ldots, c_p$, non tous nuls, tels que

$$z^r \sim \sum c_i z_i^r \quad \text{dans} \quad K \quad \text{pour} \quad \mathfrak{R}. \tag{13}$$

Désignons par c le plus petit des nombres $|c_i|$ non nuls. D'autre part, il existe des entiers d_i tels que

$$y^r \sim \sum d_i z_i^r \quad \text{dans} \quad K \quad \text{pour} \quad \mathfrak{R}. \tag{14}$$

Alors d'après (13) et (14),

$$c_i = md_i,$$

i.e. $m \leqslant c$, ce qui démontre notre assertion dans le cas où l'ordre de z^r est infini.

Supposons maintenant que l'ordre du cycle z^r est un nombre naturel $s \geqslant 2$.

Désignons par τ l'ordre du groupe de torsion de dimension r du complexe K et par μ, le plus grand entier naturel tel que s^μ est un diviseur de τ. Démontrons l'assertion suivante:

$$\textit{Si } z^r \sim 0 \mod s^\nu \textit{ dans } K, \textit{ alors } \nu < \mu.$$

En effet, d'après l'homologie que nous venons d'indiquer, nous voyons par des considérations analogues au premier cas que

$$z^r \sim s^\nu y^r \quad \text{pour} \quad I, \tag{15}$$

*) On appelle ordre d'un cycle entier z^r l'ordre de l'élément du groupe $\Delta^r(K, I)$ que ce cycle définit (i. e. l'ordre de l'élément $z^r \in Z^r K$ relativement au sous-groupe $H^r K$).

où y^r est un cycle entier. Désignons par η l'ordre du cycle y^r et faisons la remarque générale suivante:

Si pour deux cycles entiers y_1 et y_2 on a $y_1 \sim my_2$ pour I (où m est un nombre entier) et le cycle y_1 est d'ordre fini η_1, alors l'ordre η_2 du cycle y_2 est fini et divisible par η_1.

En effet, nos hypothèses impliquent tout d'abord

$$0 \sim \eta_1 y_1 \sim m\eta_1 y_2$$

et donc l'ordre η_2 du cycle y_2 est fini (c'est un diviseur de $m\eta_1$) et, d'autre part,

$$\eta_2 y_1 \sim m\eta_2 y_2 \sim 0,$$

de sorte que η_2 est un multiple du nombre η_1.

Appliquons cette remarque à l'homologie (15). Nous voyons que l'ordre η du cycle y^r est un entier naturel divisible par s. Soit

$$\eta = s^\sigma k,$$

où k n'est plus divisible par s. Puisque η est un diviseur du nombre τ, on a $\sigma \leqslant \mu$. Il suffit de démontrer que $\nu < \sigma$. Admettons le contraire, i.e. $\nu \geqslant \sigma$. Alors

$$(16) \qquad \begin{cases} z^r \sim s^{\nu-\sigma} s^\sigma y^r, \\ ks^\sigma y^r = \eta y^r \sim 0 \end{cases} \quad \text{dans } K \text{ pour } I.$$

D'autre part, pour $1 \leqslant k' < k$, nous avons $k's^\sigma < \eta$, donc $k's^\sigma y^r$ n'est pas homologue à zéro dans K pour I, d'où l'on peut conclure que k est l'ordre du cycle $s^\sigma y^r$ et donc (16) implique, d'après la remarque précédente, que k est divisible par s, ce qui contredit la définition du nombre k.

8. Groupes de Betti modulo 1 (relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$). Faisons tout d'abord une remarque générale, dont nous nous sommes en fait servis dans certains cas particuliers. Soit comme toujours K un complexe cellulaire fini quelconque et soient deux groupes abéliens $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ et un homomorphisme $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. En posant pour une chaîne quelconque $x^p = \sum a_i t_i^p \in L^p(K, \mathfrak{A})$

$$\varphi x^p = \sum (\varphi a_i)\, t_i^p \in L^p(K, \mathfrak{B}),$$

nous obtenons un homomorphisme des groupes de chaînes

$$\varphi: L^p(K, \mathfrak{A}) \to L^p(K, \mathfrak{B}).$$

Montrons que l'homomorphisme φ est permutable avec l'opérateur Δ:

$$\varphi \Delta x^p = \Delta \varphi x^p$$

pour toute chaîne $x^p \in L^p(K, \mathfrak{A})$. Il suffit évidemment de vérifier l'égalité pour une chaîne d'un seul terme $x^p = at^p$; mais

$$\varphi\Delta at^p = \varphi \sum_i a(t^p : t_i^{p-1})\, t_i^{p-1} = \sum_i [\varphi(a(t^p : t_i^{p-1}))]\, t_i^{p-1}$$

et

$$\Delta\varphi(at^p) = \Delta(\varphi a)\, t^p = \sum_i [\varphi(a)(t^p : t_i^{p-1})]\, t_i^{p-1}.$$

Il reste à remarquer que $(t^p : t_i^{p-1}) = \pm 1$ ou $(t^p : t_i^{p-1}) = 0$, de sorte que dans tous ces cas on a $\varphi(a(t^p : t_i^{p-1})) = \varphi(a)(t^p : t_i^{p-1})$. La permutabilité de φ et Δ est démontrée. Par conséquent, l'homomorphisme φ applique un cycle dans un cycle, donc on a l'homomorphisme

$$\varphi : Z^p(K, \mathfrak{A}) \to Z^p(K, \mathfrak{B}),$$

qui applique tout cycle homologue à zéro (pour $\mathfrak{A}$) dans un cycle homologue à zéro (pour $\mathfrak{B}$). On a donc l'homomorphisme

$$\varphi : \Delta^p(K, \mathfrak{A}) \to \Delta^p(K, \mathfrak{B}).$$

Remarquons que ce dernier homomorphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme, même lorsque $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ était isomorphe. Nous l'avons déjà vu pour l'exemple $\mathfrak{A} = I$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$. D'autre part, un monomorphisme $\iota : \mathfrak{R} \to R$ induit un monomorphisme des groupes d'homologies.

Considérons maintenant les groupes $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, et l'homomorphisme naturel $\mathfrak{r}_1 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$. Comme précédemment, nous avons

$$\mathfrak{r}_1 Z^r(K, \mathfrak{R}) \subseteq Z^r(K, \mathfrak{R}_1).$$

Désignons par $Z_I(K, \mathfrak{R})$ le sous-groupe $\mathfrak{r}_1 Z^r(K, \mathfrak{R})$ du groupe $Z^r(K, \mathfrak{R}_1)$ et appellerons ses éléments *cycles du premier type* (modulo 1) du complexe K. Autrement dit, un cycle du premier type est un cycle modulo 1 de la forme $z_I^r = \mathfrak{r}_1 z^r$, où z^r est un cycle rationnel.

Nous allons voir qu'il existe (en général) des cycles modulo 1 qui ne sont pas du premier type, ils seront dits *cycles du deuxième type*. Mais allons montrer tout d'abord que chaque cycle modulo 1 homologue à zéro (modulo 1) est un cycle du premier type.

En effet, soit $z^r = \Delta x_1^{r+1}$, où x_1^{r+1} est une chaîne modulo 1. Prenons une chaîne rationnelle x^{r+1} telle que l'on ait $x_1^{r+1} = \mathfrak{r}_1 x^{r+1}$; alors

$$z^r = \Delta x_1^{r+1} = \Delta \mathfrak{r}_1 x^{r+1} = \mathfrak{r}_1 \Delta x^{r+1},$$

ce qui signifie justement que le cycle z^r est du premier type.

Proposition 3. *Le groupe quotient*

$$Z^r(K, \mathfrak{R}_1) - Z_I^r(K, \mathfrak{R}_1)$$

est isomorphe au groupe $\Theta^{r-1}K$.

Démonstration. Nous construirons un homomorphisme du groupe Z^r sur le groupe de torsion Θ^{r-1} qui fera correspondre les cycles du premier type et eux seuls à l'élément nul du groupe Θ^{r-1}.

Soit ζ^r un cycle de dimension r relativement à $\mathfrak{R}_1$; alors $\zeta^r = \tau_1 y^r$, où y^r est une chaîne rationnelle; en mettant au même dénominateur les coefficients de cellules de y^r, on peut poser $y^r = \frac{1}{m} x^r$, où m est un entier et x^r une chaîne entière. Ainsi

$$\zeta^r = \tau_1 \frac{1}{m} x^r. \tag{17}$$

Le fait que ζ^r est un cycle signifie que les coefficients de toutes les cellules dans $\tau_1 \frac{1}{m} \Delta x^r$ sont égaux à l'élément nul du groupe $\mathfrak{R}_1$, i.e. tous les coefficients de $\frac{1}{m} \Delta x^r$ sont entiers, autrement dit

$$\Delta x^r = m z^{r-1}, \tag{18}$$

où z^{r-1} est une chaîne entière et en outre (puisque Δx^r est un cycle) cette chaîne est un cycle entier.

Si pour le même cycle ζ^r on a, en plus de (17) et (18), les égalités analogues

$$\zeta^r = \tau_1 \frac{1}{m'} x', \tag{17'}$$

$$\Delta x' = m' z', \tag{18'}$$

on peut déduire de (17) et (17') l'existence d'une chaîne entière u^r telle que

$$\frac{1}{m'} x' = \frac{1}{m} x^r + u^r$$

et donc, d'après (18) et (18'),

$$z' = z^{r-1} + \Delta u^r,$$
$$z' \sim z^{r-1} \text{ pour } I.$$

Par conséquent, la classe d'homologie des cycles z^{r-1} de dimension $r-1$ dans (18) se détermine de manière unique par le cycle ζ^r, et nous pouvons désigner cette classe par $h\zeta^r$. Puisque (18) implique $mz^{r-1} \sim 0$, l'élément $h\zeta^r$ appartient au groupe de torsion Θ^{r-1}. Inversement, si z^{r-1} est un cycle entier de dimension $r-1$ d'ordre fini, i.e. un cycle dont la classe d'homologie est un élément du groupe Θ^{r-1}, il existe alors un entier m et une chaîne entière x^r tels que l'égalité (18) est satisfaite; la chaîne ζ^r relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$ définie par l'égalité (17) est d'après (18) un cycle pour lequel $h\zeta^r$ est par définition la classe d'homologie qui contient z^{r-1}. Ainsi, h est une application univoque du groupe Z^r sur le groupe Θ^{r-1}.

Cette application est un homomorphisme. En effet, soient ζ^r et ζ_1^r des cycles qui vérifient les égalités (17), (18) et aussi respectivement

$$(17_1) \qquad \zeta_1^r = \mathfrak{r}_1 \frac{1}{m_1} x_1^r,$$

$$(18_1) \qquad \Delta x_1^r = m_1 z_1^{r-1}.$$

Alors

$$(19) \qquad \zeta + \zeta_1 = \mathfrak{r}_1 \frac{1}{mm_1} (m_1 x^r + m x_1^r),$$

$$(20) \qquad \Delta (m_1 x^r + m x_1^r) = mm_1 (z^{r-1} + z_1^{r-1}).$$

D'après (19) et (20), $h(\zeta^r + \zeta_1^r)$ est la classe d'homologie du cycle $z^{r-1} + z_1^{r-1}$ et donc $h(\zeta^r + \zeta_1^r) = h\zeta^r + h\zeta_1^r$. Mais cela signifie justement que h est un homomorphisme. Il reste à démontrer que $h\zeta^r = 0$ si et seulement si ζ^r est un cycle du premier type.

Premièrement, supposons que ζ^r est un cycle du premier type. Alors la chaîne rationnelle $\frac{1}{m} x^r$ et, donc, la chaîne entière x^r dans (17) peuvent être considérées comme des cycles; d'où, d'après (18), $z^{r-1} = 0$ et donc $h\zeta^r = 0$.

Deuxièmement, soit $h\zeta^r = 0$. Alors z^{r-1} dans (18) peut être considéré comme étant une frontière, i.e. on peut poser $z^{r-1} = \Delta u^r$, où u^r est une chaîne entière; alors $\Delta x^r - m\Delta u^r = 0$ et donc $x^r - mu^r \equiv z^r$ est une chaîne entière; on a $\zeta^r = \mathfrak{r}_1 \frac{1}{m} x^r = \mathfrak{r}_1 \left(\frac{1}{m} z^r + u^r\right) = \mathfrak{r}_1 \frac{1}{m} z^r$; ensuite, $\frac{1}{m} z^r$ étant un cycle rationnel, ζ^r est un cycle du premier type. Tout est alors démontré.

Maintenant faisons la remarque suivante.

R e m a r q u e 7. Si θz^r est un cycle du premier type, $\theta z^r = \mathfrak{r}_1 z_1^r$, $z_1^r \in Z^r(K, \mathfrak{R})$ et θ est un nombre entier, alors

$$z^r = \frac{1}{\theta} \theta z^r = \frac{1}{\theta} \mathfrak{r}_1 z_1^r = \mathfrak{r}_1 \frac{1}{\theta} z_1^r,$$

de sorte que z^r est également un cycle du premier type. Ainsi le groupe $Z_I^r(K, \mathfrak{R}_1)$ est un sous-groupe fermé par division du groupe $Z^r(K, \mathfrak{R}_1)$. Par conséquent, le groupe $Z^r(K, \mathfrak{R}_1)$ est la somme directe du groupe $Z_I^r(K, \mathfrak{R}_1)$ et d'un groupe isomorphe à Θ^{r-1}. Puisque, comme nous l'avons déjà vu, $H^r(K, \mathfrak{R}_1) \subseteq Z_I^r$, le théorème B (du n° 4) implique que le groupe quotient $\Delta^r(K, \mathfrak{R}_1) = Z^r(K, \mathfrak{R}_1) - H^r(K, \mathfrak{R}_1)$ est isomorphe à la somme directe du groupe quotient $Z_I^r - H^r$ et du groupe Θ^{r-1}. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer *) la

*) On trouvera la démonstration de la formule ci-dessous dans [TC], chapitre 9, § 4.

Proposition 4. *Le groupe quotient $Z_I^r - H^r$ est la somme directe des groupes $\mathfrak{R}_1^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$, isomorphes au groupe $\mathfrak{R}_1$, où p est le nombre de Betti de dimension r du complexe K, de sorte que*

$$\Delta^r(K, \mathfrak{R}_1) \approx \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{R}_1^{(i)} + \Theta^{r-1}.$$

9. Groupes de Betti à coefficients dans $\varkappa$. L'objet de ce paragraphe est de démontrer une assertion analogue à la proposition 3 de la section précédente pour le groupe de coefficients $\varkappa$. Puisque le raisonnement reste pratiquement inchangé, nous nous limiterons à indiquer les grandes lignes des constructions et des démonstrations.

Comme toujours, K est un complexe cellulaire fini quelconque. La projection naturelle $\pi: R \to \varkappa$ engendre un homomorphisme

$$\pi: \Delta^r(K, R) \to \Delta^r(K, \varkappa).$$

Les cycles du groupe $\pi Z^r(K, R) = Z_I^r$ sont dits cycles du premier type, et l'on vérifie facilement que

$$H^r(K, \varkappa) \subseteq Z_I^r.$$

Proposition $3_\varkappa$. *Le groupe quotient $Z^r(K, \varkappa) - Z_I^r$ (considéré ici sans sa topologie) est isomorphe au groupe $\Theta^{r-1}K$.*

Pour un cycle quelconque $z^r \in Z^r(K, \varkappa)$ nous trouverons une chaîne $x^r \in L^r(K, R)$ pour laquelle $\pi x^r = z^r$. Puisque $\pi \Delta x^r = \Delta \pi x^r = \Delta z^r = 0$, le cycle $\Delta x^r = z^{r-1}$ doit être entier: $\Delta x^r \in Z^{r-1}(K, I)$. Le lecteur vérifiera facilement, comme pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, que l'application qui fait correspondre à chaque cycle z^r la classe d'homologie $\{z^{r-1}\} \in \Delta^{r-1}(K, I)$ du cycle $z^{r-1} = \Delta x^r$ est un homomorphisme surjectif du groupe $Z^r(K, \varkappa)$ sur tout le groupe $\Theta^{r-1}(K, I)$ et que le noyau de ce homomorphisme est le groupe des cycles du premier type.

Le seul raisonnement original dans cette démonstration intervient lorsqu'il faut montrer que les cycles construits z^{r-1} sont d'ordre fini (dans le groupe $\Delta^{r-1}(K, I)$). Mais par construction $z^{r-1} = \Delta x^r$. Le cycle z^{r-1} est entier et donc a fortiori rationnel et, par conséquent, homologue à zéro relativement à R. Dans la section 4 nous avons vu qu'il est alors homologue à zéro également pour $\mathfrak{R}$, i. e. $z^{r-1} = \Delta y^r$, $y^r = \sum_i \frac{m_i}{n_i} t_i^r$. Mettant au même dénominateur les coefficients de la chaîne y^r, nous obtenons $y^r = \sum_i \frac{k_i}{n} t_i^r$. La chaîne ny^r est entière et $nz^{r-1} = \Delta ny^r$. Par conséquent, le cycle z^{r-1} est d'ordre $\leqslant n$.

Faisons encore une remarque dont nous aurons besoin au chapitre 3.

R e m a r q u e. *L'homomorphisme*

$$\iota: \Delta^r(K, \mathfrak{R}_1) \to \Delta^r(K, \varkappa)$$

est injectif.

D é m o n s t r a t i o n. Avant tout, indiquons l'égalité évidente $\pi\iota = \iota\pi_1$ dans laquelle ι désigne aussi bien l'homomorphisme $\mathfrak{R} \to R$ que l'homomorphisme $\mathfrak{R}_1 \to \varkappa$.

Soit $z_1 \in Z^r(K, \mathfrak{R}_1)$ et $\iota z_1 = \Delta x_\varkappa$, $x_\varkappa \in L^{r+1}(K, \varkappa)$. Il faut démontrer l'existence d'une chaîne $x_1 \in L^{r+1}(K, \mathfrak{R}_1)$ telle que $\Delta x_1 = \iota z_1$.

Premièrement, nous avons vu que tout cycle homologue à zéro est un cycle du premier type, de sorte que $\iota z_1 = \pi z$, $z \in Z^r(K, R)$. Il est alors évident que z est un cycle rationnel et $z_1 = \tau_1 z$.

Supposons ensuite que $x \in L^{r+1}(K, R)$ est une chaîne quelconque avec $\pi x = x_\varkappa$. Alors

$$\pi \Delta x = \Delta \pi x = \Delta x_\varkappa = \iota z_1 = \iota \tau_1 z = \pi \iota z,$$

d'où

$$\pi(\Delta x - \iota z) = 0.$$

Par conséquent, le cycle $\Delta x - \iota z = z_I$ est entier, le cycle $z_I + \iota z$ est rationnel et homologue à zéro pour R. Mais nous savons qu'il est également homologue à zéro pour $\mathfrak{R}$: $z_I + \iota z = \Delta x_{\mathfrak{R}}$ pour une certaine chaîne $x_{\mathfrak{R}} \in L^{r+1}(K, \mathfrak{R})$. Donc

$$\Delta \tau_1 x_{\mathfrak{R}} = \pi \Delta x_{\mathfrak{R}} = \pi(z_I + \iota z) = \pi \iota z = \iota \tau_1 z = \iota z_1,$$

i.e. $\iota z_1 \sim 0$ pour $\mathfrak{R}_1$; la remarque est démontrée.

§ 5. Groupes $\Delta^0(K, \mathfrak{A})$ et $\nabla^0(K, \mathfrak{A})$

Dans la suite, K sera un complexe simplicial fini et complet et $\mathfrak{A}$, un groupe abélien quelconque.

1. Le groupe $\Delta^0(K, \mathfrak{A})$. Un cycle de dimension nulle $x^0 = \sum_{i=0}^{s} a_i e_i$ d'un complexe simplicial complet K (de sommets $e_1, \ldots, e_s$) sera dit *normal* s'il satisfait à la condition $\sum_i a_i = 0$.

Remarque 1. La somme des coefficients $\sum a_i$ (« somme des valeurs ») du cycle x^0 de dimension nulle est parfois appelée (L. Pontriaguine) *index* de ce cycle. Dans cette optique les cycles normaux sont des cycles d'index nul.

Il est évident que la somme de deux cycles normaux est un cycle normal; si x^0 est un cycle normal, alors $-x^0$ l'est aussi; un cycle de dimension nulle identiquement nul est un cycle normal. Par conséquent, les cycles normaux de dimension nulle forment un sous-groupe $Z^{00}(K, \mathfrak{A})$ du groupe $Z^0(K, \mathfrak{A}) = L^0(K, \mathfrak{A})$.

D'autre part, si x^1 est une chaîne d'un seul terme de dimension 1

$$x^1 = a t_i^1, \quad t_i^1 = (e_{i_0}, \quad e_{i_1}),$$

alors

$$\Delta x^1 = a \Delta t_i^1 = a(e_{i_1} - e_{i_0}),$$

i.e. la frontière d'une chaîne d'un seul terme de dimension est un cycle normal. Puisque toute chaîne est une somme de chaînes d'un seul terme, on a la

Proposition 1. *La frontière de toute chaîne de dimension 1 est un cycle normal de dimension nulle, de sorte que* $H^0(K, \mathfrak{A}) \subseteq Z^{00}(K, \mathfrak{A})$.

Le groupe quotient $Z^{00}(K, \mathfrak{A}) - H^0(K, \mathfrak{A})$ sera désigné par $\Delta^{00}(K, \mathfrak{A})$.

Remarque 2. Tout cycle z_1^0 de dimension nulle, homologue dans K à un cycle normal z^0, est lui-même normal.

En effet, il découle de la proposition 1 que $z^0 - z_1^0$ est un cycle normal, et donc la somme des valeurs des cycles z^0 et z_1^0 est la même, et puisque cette somme est nulle pour z^0, elle l'est aussi pour z_1^0.

Démontrons maintenant la réciproque de la proposition 1 pour le cas d'un complèxe connexe:

Proposition 2. *Tout cycle normal de dimension nulle d'un complexe connexe est homologue à zéro.*

Supposons que

$$z^0 = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i$$

est un cycle normal. Puisque $\sum a_i = 0$, i.e. $a_1 = -a_2 - \ldots - a_s$, on a

$$z^0 = \sum_{i=2}^{s} a_i (e_i - e_1)$$

et il suffit de démontrer que les cycles $e_i - e_1$ de dimension nulle sont homologues à zéro dans K.

Puisque K est un complexe connexe, il existe une ligne brisée qui joint les sommets e_1 et e_i dans le complexe K.

Soit

$$\overline{e_1 e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} e_i}$$

cette ligne brisée. Posons

$$x^1 = (e_1 e_{i_1}) + (e_{i_1} e_{i_2}) + \ldots + (e_{i_k} e_i).$$

Il est évident que

$$\Delta x^1 = (e_{i_1} - e_1) + (e_{i_2} - e_{i_1}) + \ldots + (e_i - e_{i_k}) = e_i - e_1,$$

ce qui démontre la proposition 2.

Proposition 3. *Soit e_1 un sommet du complexe connexe K; tout cycle de dimension nulle z^0 du complexe K est homologue à un cycle d'un seul terme de la forme ae_1, où a est un élément du groupe des coefficients $\mathfrak{A}$.*

En effet, soit $z^0 = \sum_i a_i e_i$; posons $\sum a_i = a$, alors $z^0 - ae_1$ est un cycle normal et par conséquent

$$z^0 - ae_1 \sim 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, il y a une bijection entre les classes d'homologie de dimension nulle d'un complexe connexe K et les cycles de la forme ae_1 et donc les éléments a du groupe $\mathfrak{A}$. Nous avons démontré la

Proposition 4. *Si K est un complexe connexe, le groupe $\Delta^0(K, \mathfrak{A})$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{A}$.*

On déduit de la proposition 4 (pour $\mathfrak{A} = I$, $\mathfrak{A} = I_m$) le

Corollaire. *Le nombre de Betti de dimension nulle et le nombre de Betti de dimension nulle modulo m où m est un nombre premier, pour tout complexe connexe, sont tous les deux égaux à 1.*

Le théorème suivant généralise la proposition 4:

Théorème 10_Δ. *Soient K un complexe simplicial complet et p le nombre de ses composantes. Alors le groupe $\Delta^0(K, \mathfrak{A})$ est la somme directe $\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_p$ de p copies d'un groupe isomorphe au groupe $\mathfrak{A}$.*

Démonstration. Soient A_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, les composantes du complexe K; choisissons dans chaque A_ν un sommet e_ν. Nous avons alors pour tout cycle de dimension nulle $z^0 \in Z^0(K, \mathfrak{A})$

$$z^0 = \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu^0, \quad z_\nu^0 = J_{A_\nu}^K z^0.$$

En même temps, d'après la proposition 3,

$$z_\nu^0 \sim a_\nu e_\nu \quad \text{dans} \quad A_\nu$$

pour un certain $a_\nu \in \mathfrak{A}$.

Il reste à démontrer que les classes d'homologie des cycles $e_1, \ldots, e_p$ de dimension nulle sont indépendantes entre elles. Autrement dit, il s'agit de démontrer l'assertion suivante: si la combinaison linéaire $\sum c_\nu e_\nu$ est la frontière d'une certaine chaîne x^1 de dimension 1:

$$\Delta x^1 = \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu e_\nu,$$

alors $c_1 = c_2 = \ldots = c_\nu = 0$.

Démontrons cette assertion.

Chaque composante A_ν est un sous-complexe à la fois ouvert et fermé du complexe K, par conséquent (en vertu de la permutabilité des opérateurs Δ et $J_{A_\nu}^K$) on a

$$c_\nu e_\nu = J_{A_\nu}^K \Delta x^1 = \Delta J_{A_\nu}^K x^1$$

et donc $c_\nu e_\nu \sim 0$ dans A_ν, ce qui signifie (d'après la proposition 1) que $c_\nu = 0$. Le théorème 10_Δ est démontré. On en déduit (pour $\mathfrak{A} = I$ et $\mathfrak{A} = I_m$) le

Corollaire. *Le nombre de Betti d'un complexe simplicial complet K est égal au nombre de composantes de ce complexe.*

On déduit facilement des faits démontrés l'assertion importante suivante.

Proposition 5. *Si $\mathfrak{A} = I$ et si pour un certain entier $c \neq 0$ le cycle cz^0 est homologue à zéro dans K, alors le cycle z^0 est également homologue à zéro dans K.*

D'où il découle que le groupe $\Delta^0 K$ ne contient aucun élément non nul d'ordre fini.

Pour la démonstration supposons que $cz^0 \sim 0$ dans K:

$$cz^0 = \Delta x^1.$$

Alors, en désignant par A_ν les composantes du complexe K, on a

$$J^K_{A_\nu} cz^0 = \Delta J^K_{A_\nu} x^1,$$

d'où il découle, en vertu de la proposition 1, que $J^K_{A_\nu} cz^0$ est un cycle normal. Mais alors $J^K_{A_\nu} z^0$ est également un cycle normal, et donc, en vertu de la proposition 2,

$$J^K_{A_\nu} z^0 \sim 0 \quad \text{dans } A_\nu,$$

$$z^0 = \sum J^K_{A_\nu} z^0 \sim 0 \text{ dans } K,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Le groupe $\nabla^0(K, \mathfrak{A})$. Un cocycle de dimension nulle ne peut évidemment être cohomologue à zéro (puisqu'il n'existe pas de chaîne de dimension -1). Par conséquent, on a $\nabla^0(K, \mathfrak{A}) = Z^0(K, \mathfrak{A})$ pour tout complexe cellulaire K. Pour se représenter intuitivement un cocycle de dimension nulle, considérons par exemple le complexe K constitué par tous les sommets, les arêtes et les faces de dimension deux du tétraèdre $|o\ e_1\ e_2\ e_3|$ (fig. 1). Supposons que la chaîne x^0 de dimension nulle prend la valeur 1 au sommet o, la valeur zéro sur tous les autres sommets du tétraèdre. Alors ∇x^0 est une chaîne z^1 de dimension 1, qui prend la valeur unité sur tous les simplexes de dimension 1 de la forme $(e_i\ 0)$, $i = 1, 2, 3$ et qui s'annule sur toutes les autres arêtes du tétraèdre. L'égalité $\nabla\nabla x = 0$ pour toute chaîne x implique que $z^1 = \nabla x^0$ est un cocycle; il est recommandé au lecteur de le vérifier directement.

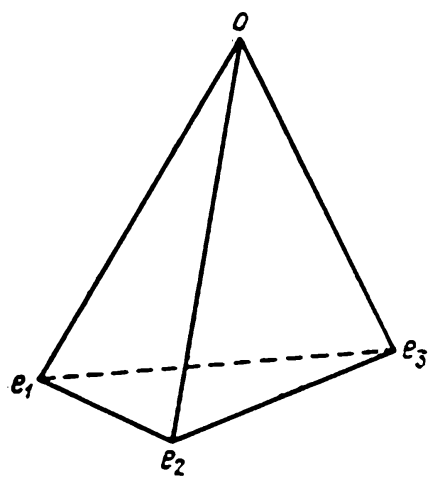

Fig. 1

Passant maintenant à la considération du cas général des cocycles de dimension nulle d'un complexe simplicial complet K, supposons

d'abord que le complexe K est connexe et que z^0 est un certain cocycle de dimension nulle de ce complexe. Démontrons que le cocycle z^0 prend la même valeur sur tous les sommets e_i du complexe K. Etant donné la connexité du complexe K, il suffit de démontrer que z^0 prend des valeurs égales aux deux extrémités e_i, e_k d'un segment quelconque $|e_ie_k| \in K$. Mais cette assertion découle directement du fait que ∇z^0 prend la valeur $(z^0, e_k) - (z^0, e_i)$ sur (e_ie_k). Réciproquement, si une chaîne x^0 de dimension nulle prend une même valeur sur tous les sommets du complexe K, alors ∇x^0 a la valeur $(x^0, e_k) - (x^0, e_i) = 0$ sur tout simplexe de dimension 1 (e_ie_k), i.e. x^0 est un cocycle. Ainsi, les *cocycles de dimension nulle d'un complexe simplicial complet K peuvent être définis comme étant les chaînes de dimension nulle, constantes sur K*, i.e. prenant une même valeur sur tous les sommets de K. On en déduit immédiatement que les cocycles de dimension nulle d'un complexe simplicial complet quelconque K peuvent être définis comme étant les chaînes de dimension nulle, constantes sur chaque composante du complexe K.

Puisque $\nabla^0(K, \mathfrak{A}) = Z^0(K, \mathfrak{A})$, nous avons maintenant

Théorème 10_∇. *Le groupe $\nabla^0(K, \mathfrak{A})$ est la somme directe de groupes isomorphes chacun au groupe des coefficients $\mathfrak{A}$ dont le nombre est égal au nombre de composantes du complexe K.*

Autrement dit, on a la

Proposition 6. *Les groupes $\nabla^0(K, \mathfrak{A})$ et $\Delta^0(K, \mathfrak{A})$ d'un complexe simplicial complet K sont isomorphes entre eux (quel que soit le groupe des coefficients $\mathfrak{A}$).*

§ 6. Exemples élémentaires de calcul des groupes d'homologie *)

1°. Soit K le complexe qui consiste de tous les segments $|e_1e_2|$, $|e_2e_3|$, ..., $|e_{s-1}e_s|$ et de tous les sommets $e_1, e_2, \ldots, e_s$ d'une ligne brisée non fermée $\overline{e_1e_2 \ldots e_s}$ (sur la figure 2 on a pris $s = 7$).

Démontrons que le groupe $\Delta^1 K$ est nul. Posons $t_i^1 = (e_ie_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$.

Supposons que $z^1 = \sum a_i t_i^1$ est un cycle. Alors tous les a_i sont égaux entre eux. En effet, dans le cas contraire, on aurait pu trouver deux segments adjacents t_{i-1}^1 et t_i^1 sur lesquels le cycle aurait pris des valeurs distinctes a_{i-1} et a_i. Mais dans ce cas la chaîne Δz^1 aurait pris au sommet commun e_i de ces segments la valeur $a_{i-1} - a_i \neq 0$ et donc z^1 ne serait pas un cycle.

---

*) Des exemples plus compliqués seront envisagés au chap. 2, § 1, n° 3.

Ainsi, tous les a_i sont égaux au même $a \in \mathfrak{A}$:

$$z^1 = a \sum_{i=1}^{s} t_i^1$$

mais $\Delta \sum t_i^1 = e_s - e_1$, donc $\Delta z^1 = a(e_s - e_1)$; puisque z^1 est un cycle, on a $a = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

2°. Le complexe K consiste de tous les segments et de tous les sommets d'une ligne brisée fermée (fig. 3). Orientons tous les seg-

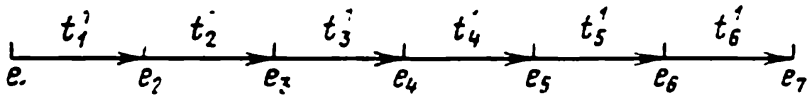

Fig. 2

ments dans une même direction, par exemple dans le sens antihoraire. Les simplexes orientés obtenus de dimension 1 seront désignés par t_i^1. Supposons que

$$z^1 = \sum_{i=1}^{6} a_i t_i^1$$

est un cycle. D'une manière tout à fait analogue à l'exemple précédent, on démontre que tous les a_i sont égaux entre eux, de sorte que tout cycle de dimension 1 du complexe K est de la forme

$$z^1 = a \sum t_i^1.$$

D'autre part, il est aisé de voir que $\sum t_i^1$, et donc $a \sum t_i^1$, pour tout a, est un cycle et par conséquent le groupe Z^1K est composé de toutes les chaînes de la forme $a \sum t_i^1$, où a est un élément quelconque du groupe $\mathfrak{A}$. Par conséquent, $\Delta^1 K = Z^1 K = \mathfrak{A}$ *) ; en particulier, pour $\mathfrak{A} = I$ le groupe $\Delta^1 K$ est un groupe cyclique infini.

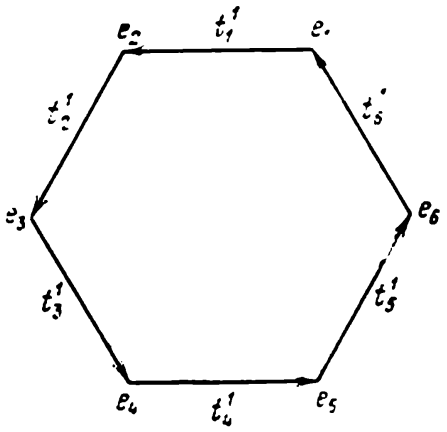

Fig. 3

3°. Le complexe K est composé de tous les segments et de tous les sommets de deux lignes brisées fermées qui possèdent un sommet commun (fig. 4).

Orientons chacune de ces lignes dans une direction déterminée (par exemple en supposant qu'elles sont dans un même plan et le sens de parcours est antihoraire). Les segments de la première de

*) Le signe « = » désigne ici l'isomorphisme de groupes.

ces lignes, munis de cette orientation, seront désignés par t^1_{1i} et ceux de la seconde par t^1_{2i}.

Alors tout cycle $z^1 \in Z^1K$ prend sur chaque segment d'une de ces lignes brisées une même valeur, par exemple la valeur a_1 sur tous

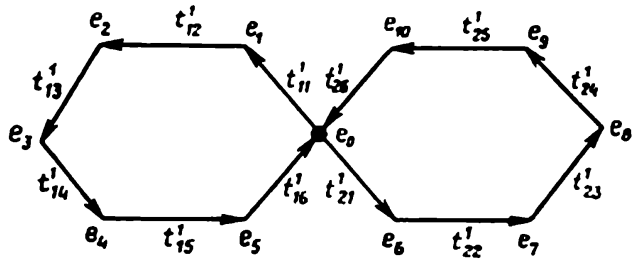

Fig. 4

les t^1_{1i} et la valeur a_2 sur tous les t^1_{2i} ; cette chaîne est donc de la forme

$$z^1 = a_1 \sum t^1_{1i} + a_2 \sum t^1_{2i}$$

ou, si l'on pose

$$z^1_1 = \sum t^1_{1i}, \quad z^1_2 = \sum t^1_{2i},$$

elle peut être écrite sous la forme

$$z^1 = a_1 z^1_1 + a_2 z^1_2.$$

D'autre part, puisque z^1_1 et z^1_2 sont des cycles, toutes les chaînes de la forme $a_1 z^1_1 + a_2 z^1_2$ le sont également ; ensuite, on voit facilement que

$$a_1 z^1_1 + a_2 z^1_2 = 0$$

si et seulement si $a_1 = a_2 = 0$. Autrement dit, le groupe

$$\Delta^1 K = Z^1 K$$

est isomorphe à la somme directe $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}$. Pour $\mathfrak{A} = I_l$ le groupe $\Delta^1 K = Z^1 K$ est un groupe abélien libre de rang 2.

4°. Soit K le complexe de dimension 1 qui consiste de tous les segments représentés sur la figure 5 et de leurs sommets.

Tout cycle z^1 de dimension 1 de ce complexe est identiquement nul, s'il s'annule sur tous les segments horizontaux du complexe K non situés sur l'arête AB du carré $ABCD$.

En effet, en considérant séparément les verticales AD, EF, PQ et BC, nous pouvons vérifier en reprenant les raisonnements de 1° que z^1 s'annule sur chacun des segments du complexe K situés sur chacune des verticales. Appliquant ensuite les raisonnements de 1° à AB nous nous convainquons que z^1 est nul sur tous les segments du complexe K situés sur l'arête AB.

5°. Soit K_0 le complexe de dimension 2 représenté sur la figure 6; il consiste de 18 triangles, leurs côtés et leurs sommets. Désignons par $\dot{K}_0$ le sous-complexe du complexe K_0 constitué par tous les éléments de K_0 situés sur la frontière du carré $ABCD$. Orientons la frontière du carré $ABCD$ dans le sens antihoraire; les 12 segments

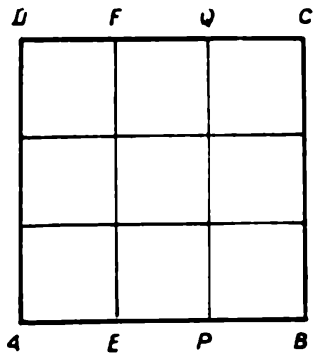

Fig. 5

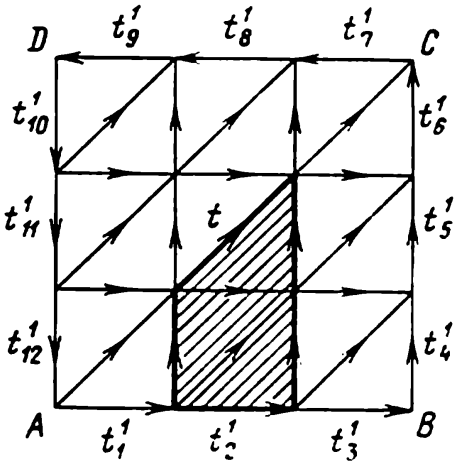

Fig. 6

ainsi orientés du complexe $\dot{K}_0$ seront désignés par $t_1^1, \ldots, t_{12}^1$. Le cycle $\sum_{i=1}^{12} t_i^1$ sera noté z_0^1. Enfin, les 18 triangles du complexe K_0, orientés dans le sens antihoraire, seront désignés par $t_1^2, \ldots, t_{18}^2$. Démontrons tout d'abord le

Lemme. *Dans K_0, chaque cycle de dimension 1 est homologue à zéro, i.e.* $\Delta^1 K_0 = 0$.

Démonstration. Pour chaque segment orienté t, horizontal ou diagonal, du complexe K_0 de la figure 6, nous définissons le cycle de dimension 1 $z(t)$ comme étant la chaîne qui prend la valeur unité sur les segments orientés suivants:

— le segment t;

— les segments verticaux qui joignent le point terminal de t au segment AB;

— la projection du segment $-t$ sur AB;

— le segment vertical ascendant qui se termine au point initial de t.

Sur les autres segments du complexe K_0 le cycle $z(t)$ est nul par définition.

Soit maintenant $z^1 = \sum_{i=1}^{33} a_i t_i^1$ un cycle donné de dimension 1 du complexe K_0. Les orientations de t_i^1 ont déjà été choisies pour $i = 1$,

2, . . ., 12; pour les autres 21 segments, nous choisissons les orientations d'une manière quelconque, par exemple, de gauche à droite et de bas en haut.

Construisons le cycle

$$z' = z^1 - \sum{}' a_i z(t_i),$$

où l'on calcule la somme $\sum'$ sur tous les simplexes t_i^1 horizontaux et diagonaux; comme chaque cycle $z(t_i^1)$ est évidemment la frontière d'un certain quadrilatère composé de triangles *) du complexe K_0, on peut aisément démontrer que $z^1 \sim z'$; en ce qui concerne le cycle z', les éléments sur lesquels il ne s'annule pas sont soit des segments verticaux, soit des segments horizontaux situés sur AB; d'où il découle, en vertu de 4°, que $z' = 0$ et donc $z^1 \sim 0$.

Désignons par U le sous-complexe ouvert

$$U = K_0 \setminus \dot{K}_0$$

du complexe K_0. Puisque $\Delta^1(K_0) = \Delta^0(\dot{K}_0) = 0$, il découle de la remarque 3 du § 3 (p. 32) que $\Delta^1 U = 0$, i.e. chaque cycle de dimension 1 du complexe U est homologue à zéro dans U. Le lecteur démontrera facilement que le groupe $\Delta^0 U$ est nul également. Ces précisions nous serviront (§ 8) pour l'étude d'exemples ultérieurs moins simples.

§ 7. Pseudo-variétés **)

1. Définition des pseudo-variétés. Un complexe simplicial K de dimension n, ouvert dans son adhérence combinatoire, s'appelle *pseudo-variété combinatoire de dimension n* s'il est fortement connexe ***) et si, en outre, chaque simplexe de dimension $n - 1$ de ce complexe est la face d'exactement 2 simplexes de dimension n qui lui appartiennent.

Remarque 1. Les pseudo-variétés qui sont des complexes complets sont généralement appelées pseudo-variétés *complètes* ou *fermées*; les pseudo-variétés non complètes sont dites *ouvertes*.

En plus des pseudo-variétés complètes que nous venons de définir, on considère également les *pseudo-variétés à bord*:

---

*) C'est-à-dire la frontière d'une chaîne qui prend la même valeur $+1$ ou -1 sur chacun des triangles (orientés contre les aiguilles d'une montre) de ce quadrilatère et s'annule sur les autres triangles. Un tel quadrilatère est hachuré sur la figure 6.

**) La notion de pseudo-variété a été introduite par Brouwer.

***) Un complexe K est fortement connexe si pour deux points quelconques $p, q \in K$ il existe une suite de simplexes $T_1^n, \ldots, T_r^n$ tels que $[T_1^n] \ni p$, $[T_r^n] \ni q$ et chaque couple de simplexes voisins de la suite a une face commune de dimension $n - 1$. — *Note du traducteur.*

Un complexe simplicial fortement connexe de dimension n complet et fini s'appelle *pseudo-variété combinatoire à bord, de dimension* n, si chaque simplexe de dimension $n-1$ du complexe K est la face de deux ou de un simplexe de dimension n. Le sous-complexe de K, qui consiste de toutes les faces propres et impropres de tous les simplexes de dimension $n-1$ de K qui sont soumis *) à un seul simplexe de dimension n de K, s'appelle *bord du complexe* K.

Chaque pseudo-variété complète est un cas particulier d'une pseudo-variété à bord : le bord dans ce cas est l'ensemble vide.

2. Exemples de pseudo-variétés. 1°. Une ligne brisée fermée $\overline{e_1e_2 \ldots e_se_1}$ est un exemple d'une pseudo-variété complète K^1 de dimension 1, qui consiste des sommets $e_1, e_2, \ldots, e_s$ et des simplexes de dimension 1 $\overline{e_1e_2}, \overline{e_2e_3}, \ldots, \overline{e_{s-1}e_s}, \overline{e_se_1}$.

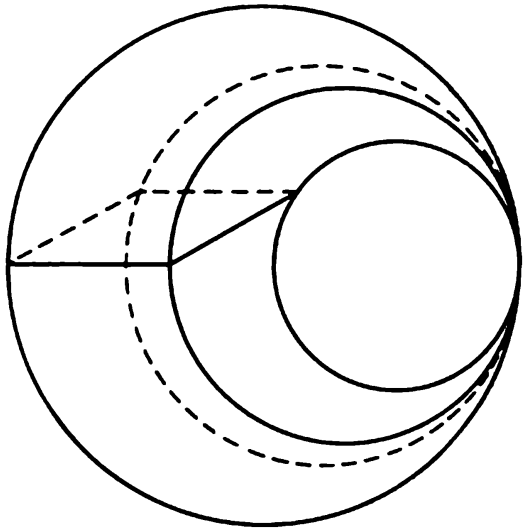

Fig. 7

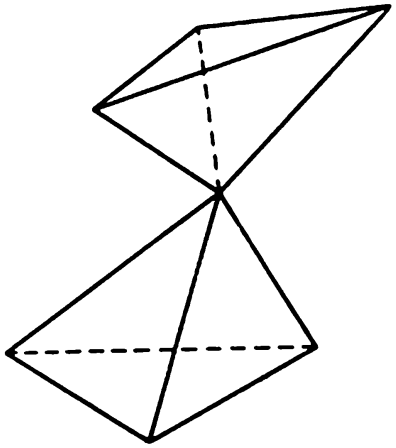

Fig. 8

On voit facilement que cet exemple (pour diverses valeurs de s) épuise tous les cas (à isomorphisme près) de pseudo-variétés complètes de dimension 1.

2°. Toute triangulation d'une surface fermée est un exemple d'une pseudo-variété fermée de dimension 2. De même, toute triangulation d'une surface à bord peut servir d'exemple de pseudo-variété de dimension 2 à bord.

3°. Si nous identifions deux sommets opposés d'un octaèdre (fig. 7), nous obtenons un polyèdre topologique de dimension 2, dont les triangulations peuvent servir d'exemple de pseudo-variétés fermées de dimension 2 qui ne sont pas des triangulations d'une surface.

---

*) Le simplexe T' est soumis au simplexe T (notation : $T' < T$) si T' est une face du simplexe T.

Le solide correspondant (donné avec une certaine triangulation) est une pseudo-variété à bord de dimension 3.

4°. Au contraire, si nous identifions les sommets de deux pyramides (fig. 8), nous n'obtiendrons même pas une pseudo-variété à bord.

5°. Le complexe $K_0 \setminus \dot{K}_0$ considéré au n° 5 du paragraphe précédent est une pseudo-variété ouverte de dimension 2.

6°. Toute subdivision d'un simplexe ouvert ou, plus généralement d'un polyèdre convexe ouvert T^n, est une pseudo-variété ouverte de dimension n, tandis que toute subdivision du complexe $\overline{T}^n$, qui est l'adhérence combinatoire du simplexe T^n, est une pseudo-variété de dimension n à bord. Dans ce cas le bord est une pseudo-variété fermée de dimension $n-1$.

3. **Pseudo-variétés orientables.** Soient T_i^n et T_h^n deux simplexes de dimension n, éléments d'une pseudo-variété K^n de dimension n qui possèdent une face commune T_j^{n-1} de dimension $n-1$. Soit t_j^{n-1} une certaine orientation du simplexe T_j^{n-1}; les orientations t_i^n et t_h^n des simplexes T_i^n et T_h^n sont dites *cohérentes* si

$$(t_i^n : t_j^{n-1}) = -(t_h^n : t_j^{n-1}). \tag{1}$$

Il est évident que cette définition ne dépend pas du choix de l'orientation t_j^{n-1} du simplexe T_j^{n-1}.

Supposons maintenant que

$$T_1^n, \quad T_2^n, \ \ldots, \ T_s^n \tag{2}$$

sont les simplexes d'une pseudo-variété K de dimension n.

Les orientations

$$t_1^n, \quad t_2^n, \ \ldots, \ t_s^n \tag{3}$$

de ces simplexes sont dites cohérentes entre elles si pour chaque couple de simplexes t_i^n et t_h^n de (3) qui possèdent une face commune de dimension $n-1$ les orientations t_i^n et t_h^n sont cohérentes.

Une pseudo-variété ou une pseudo-variété à bord K de dimension n est dite *orientable* si les orientations (3) de tous les simplexes t_i^n de dimension n peuvent être choisies cohérentes; dans le cas contraire K s'appelle *non orientable*.

Ainsi, si K est une pseudo-variété non orientable (ou une pseudo-variété à bord non orientable), on peut trouver, quelles que soient les orientations t_i^n de tous les simplexes $T_i^n \in K$ de dimension n, au moins une paire d'orientations non cohérentes t_h^n, t_k^n de deux simplexes adjacents T_h^n, T_k^n.

R e m a r q u e 2. Soient K^n une pseudo-variété à bord et K^{n-1} son bord. On voit facilement que K^n est orientable si et seulement

si la pseudo-variété $K^n \setminus K^{n-1}$ non complète est orientable. Par conséquent, toutes les questions liées à l'orientation des pseudo-variétés à bord se ramènent directement aux questions analogues pour les pseudo-variétés (non complètes) sans bord.

Exemples. 1°. Le bord d'un simplexe de dimension n (i.e. le complexe $[T^n] \setminus T^n$) est une pseudo-variété orientable de dimension $n - 1$. Pour s'en convaincre il suffit de choisir une orientation quelconque t^n du simplexe T^n et des orientations t_i^{n-1} de ses faces de dimension $n - 1$ telles que $(t^n : t_i^{n-1}) = 1$.

2°. Les triangulations du plan projectif et de la surface de Klein, indiquées pp. 99-100, sont des pseudo-variétés non orientables fermées.

3°. Si l'on enlève d'une triangulation quelconque du ruban de Mœbius (p. 100) tous les éléments situés sur son bord, on obtient une pseudo-variété non orientable ouverte. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les assertions 2° et 3°.

Si

$$T_1^n, \quad T_2^n, \ \ldots, \ T_s^n \tag{4}$$

est l'ensemble de tous les simplexes de dimension n d'une pseudo-variété orientable K et les orientations

$$t_1^n, \quad t_2^n, \ \ldots, \ t_s^n \tag{5$^+$}$$

sont cohérentes, alors les orientations

$$-t_1^n, \quad -t_2^n, \ \ldots, \ -t_s^n \tag{5$^-$}$$

sont évidemment également cohérentes.

D'autre part, si les orientations t_i^n et t_h^n de deux simplexes T_i^n et T_h^n ayant une face commune de dimension $n - 1$ sont non cohérentes, alors les orientations $-t_i^n$ et $-t_h^n$ sont aussi non cohérentes. Par conséquent, le choix d'une orientation bien déterminée t_i^n d'un simplexe quelconque T_i^n définit de manière unique les orientations de tous les simplexes qui possèdent une face de dimension $n - 1$ commune avec T_i^n, et par conséquent (en vertu de la connexité forte du complexe K^n) les orientations cohérentes de tous les simplexes (4).

Ainsi :

Proposition 1. *Il existe seulement deux ensembles d'orientations cohérentes de tous les simplexes de dimension n d'une pseudo-variété orientable K de dimension n : si* (5$^+$) *est un ensemble d'orientations cohérentes des simplexes* (4), *le deuxième ensemble est* (5$^-$).

Supposons toujours que (4) est l'ensemble de tous les simplexes de dimension n de la pseudo-variété K de dimension n. Les orientations

(5^+) des simplexes (4) sont cohérentes si et seulement si la chaîne

$$z_1^n = \sum_{i=1}^{s} t_i^n \tag{6}$$

est un cycle.

Ceci découle directement du fait que la valeur de la chaîne Δz_1^n sur tout t_j^{n-1} est

$$(t_i^n : t_j^{n-1}) + (t_h^n : t_j^{n-1}),$$

où $| t_i^n |$ et $| t_h^n |$ sont les simplexes adjacents au simplexe $| t_j^{n-1} |$ de K. Le cycle $z_1^n = \sum_{i=1}^{s} t_i^n$ s'appelle *orientation* de la pseudo-variété K.

Cette définition permet d'énoncer la proposition 1 de la manière suivante:

Soit K^n une pseudo-variété orientable et soit (5^+) *l'ensemble des orientations cohérentes des simplexes de dimension n du complexe K. Alors K possède deux et seulement deux orientations*: $z_1^n = \sum t_i^n$ et $-z_1^n = \sum (-t_i^n)$.

4. Théorèmes fondamentaux concernant les pseudo-variétés orientables.

Théorème 11. *Le groupe $\Delta^n (K^n, I) - Z^n (K^n, I)$ d'une pseudo-variété orientable de dimension n est un groupe cyclique infini, dont chacune des deux orientations de K est l'élément générateur.*

Ce théorème découle immédiatement de l'assertion suivante:

Théorème 11'. *Chaque cycle $z^n \in Z^n (K, \mathfrak{A})$ de dimension n de la pseudo-variété K^n est de la forme $z^n = az_1^n$, où z_1^n est une orientation quelconque de K^n et $a \in \mathfrak{A}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que chaque cycle z^n de la pseudo-variété K^n prend la même valeur sur chacun des simplexes

$$t_1^n, \ldots, t_s^n$$

d'orientations cohérentes. Cette assertion, en vertu de la connectivité forte de K^n, peut être démontrée à son tour pour le cas particulier de deux simplexes t_i^n et t_h^n à face commune $| t_j^{n-1} |$ de dimension $n - 1$. Mais, puisque $z^n = \sum a_i t_i^n$ est un cycle, on a

$$0 = (\Delta z^n, t_j^{n-1}) = a_i (t_i^n : t_j^{n-1}) + a_h (t_h^n : t_j^{n-1}),$$

et puisque, d'après la cohérence

$$(t_i^n : t_j^{n-1}) = -(t_h^n : t_j^{n-1}),$$

on a en définitive $a_i = a_h$, ce qu'il fallait démontrer.

R e m a r q u e 3. Puisque, d'une part, toute chaîne de la forme az_1^n est un cycle, nous avons démontré l'assertion suivante :

Si K^n est une pseudo-variété orientable de dimension n, alors le groupe $\Delta^n(K^n, \mathfrak{A})$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{A}$.

Théorème 12. *Si K^n est une pseudo-variété non orientable ou une pseudo-variété à bord, le groupe $\Delta^n(K^n, I)$ est nul.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de vérifier que l'existence dans K^n d'un cycle entier non nul

$$z^n = \sum a_i t_i^n \tag{7}$$

implique que le bord est vide et que la pseudo-variété K^n est orientable.

Démontrons avant tout que nous avons $|a_i| = |a_h|$ pour le cycle (7), quels que soient i, h.

Comme précédemment, il suffit de démontrer cette égalité sous l'hypothèse que les simplexes $|t_i^n|$ et $|t_h^n|$ ont une face commune $|t_j^{n-1}|$. Mais dans ce cas, pour toute orientation t_j^{n-1} de cette face commune, on a

$$0 = (\Delta z^n, t_j^{n-1}) = a_i(t_i^n : t_j^{n-1}) + a_h(t_h^n : t_j^{n-1}),$$

d'où l'on tire $a_i = \pm a_h$. Ensuite, puisque $z^n \neq 0$, on peut, en désignant par a la valeur commune de tous les $|a_i|$, considérer sur K^n le cycle entier

$$z_1^n = \frac{1}{a} z^n = \sum \varepsilon_i t_i^n, \text{ où } \varepsilon_i = \frac{a_i}{a} = \pm 1.$$

Supposons que le bord de la pseudo-variété K^n n'est pas vide et contient donc un simplexe t^{n-1} de dimension $n-1$. Désignons par $|t_i^n|$ le simplexe unique de dimension n qui a t^{n-1} pour face. Alors

$$(\Delta z_1^n, t^{n-1}) = \varepsilon_i(t_i^n : t^{n-1}) \neq 0,$$

ce qui contredit le fait que z_1^n est un cycle. Supposons enfin que K^n n'a pas de bord. Pour démontrer que K^n est une pseudo-variété orientable, il suffit de poser $t_i'^n = \varepsilon_i t_i^n$; on voit alors immédiatement que le cycle

$$z_1^n = \sum \varepsilon_i t_i^n = \sum t_i'^n$$

est une orientation de la pseudo-variété K^n. Le théorème 12 est démontré.

Théorème 12. *Pour chaque pseudo-variété K^n de dimension n le groupe $\Delta^n(K^n, I_2)$ est d'ordre 2.*

D é m o n s t r a t i o n . Si $z^n = \sum a_i t_i^n \in Z^n(K^n, I_2)$, ou bien nous avons $a_i = 0$ pour tous les t_i^n, ou bien nous avons $a_i = 1$ pour

tous les t_i^n. En effet, si l'on avait pour deux simplexes t_i^n et t_h^n à face commune t_j^{n-1} les relations $a_i = 0$ et $a_h \neq 0$, on aurait

$$(\Delta z^n, t_j^{n-1}) = 1.$$

On déduit de l'égalité $a_i = a_h$, démontrée pour les simplexes adjacents t_i^n et t_h^n, la même égalité pour des simplexes t_i^n et t_h^n quelconques, en vertu de la connexité forte du complexe K^n.

D'autre part, sur toute pseudo-variété K^n, la chaîne $z^n = \sum t^n$ est un cycle modulo 2, puisque chaque simplexe $|t_j^{n-1}| \in K^n$ est la face de deux et seulement deux simplexes $|t_i^n|$, $|t_h^n|$, d'où l'on obtient

$$(\Delta z^n, t_j^{n-1}) = 1 + 1 = 0 \pmod 2.$$

Corollaire. *Le nombre de Betti de dimension n modulo* 2 *est égal à* 1 *pour toute pseudo-variété de dimension n.*

Donnons une nouvelle définition d'une pseudo-variété orientable, qui s'avère commode dans certaines situations et qui, bien entendu, est équivalente à la définition précédente.

Une suite de simplexes orientés de dimension n

$$t_1^n, t_2^n, \ldots, t_r^n \tag{8}$$

s'appelle suite *désorientante*, si

1. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, r-1$ les simplexes $|t_i^n|$ et $|t_{i+1}^n|$ possèdent une face commune t_i^{n-1} de dimension $n-1$;les simplexes $|t_r^n|$ et $|t_1^n|$ possèdent également une face commune $|t_r^{n-1}|$.

2. Pour $i = 1, 2, \ldots, r-1$ les orientations t_i^n et t_{i+1}^n sont cohérentes; les orientations t_r^n et t_1^n sont non cohérentes, de sorte que

$$(t_1^n : t_r^{n-1}) = (t_r^n : t_r^{n-1}).$$

Nous proposons au lecteur en guise d'exercice de démontrer l'assertion suivante :

Pour qu'une pseudo-variété K^n de dimension n soit non orientable, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse trouver dans l'ensemble de ses simplexes orientés de dimension n au moins une suite désorientante.

La définition suivante nous servira au § 1 du chap. 2.

Une pseudo-variété orientable K^n de dimension n ($n \geqslant 1$) est dite *simple relativement au groupe de coefficients* $\mathfrak{A}$, si tous les groupes $\Delta^r(K^n, \mathfrak{A})$, $0 \leqslant r < n$ sont nuls, et *simple* *) si elle est simple pour tout groupe de coefficients. Le complexe qui se réduit à un seul point s'appelle *pseudo-variété simple de dimension nulle.*

---

*) En fait ,la simplicité équivaut à la simplicité relativement au groupe I. Ceci découle des résultats du chapitre 2 pour le cas de tous les groupes envisagés dans cet ouvrage.

Il est évident qu'une pseudo-variété simple de dimension $n > 0$ est toujours ouverte (puisque toute pseudo-variété fermée K^n possède un groupe $\Delta^0(K^n, I)^n$ cyclique infini et donc non nul).

5. Les groupes $\nabla^n K^n \equiv \nabla^n(K^n, I)$ pour les pseudo-variétés de dimension n. Soit t^n un simplexe orienté de dimension n de la pseudo-variété K^n. Alors la chaîne entière t^n (de même que chaque chaîne de dimension n du complexe K^n) est un cocycle que l'on appelle *cocycle fondamental de la pseudo-variété* K^n. Démontrons qu'il n'est pas cohomologue à zéro dans K^n. Pour cela il suffit de démontrer la

Proposition 2. *La somme des coefficients de toute chaîne entière x^n de dimension n, cohomologue à zéro dans K^n, est un nombre pair.*

Démonstration. En effet, soit $x^n = \nabla x^{n-1}$, où $x^{n-1} = \sum a_i t_i^{n-1}$. Alors $x^n = \sum_i a_i \nabla t_i^{n-1}$ et il suffit de démontrer la proposition 2 pour les chaînes x^n de la forme $x^n = \nabla t_i^{n-1}$. Mais $| t_i^{n-1} |$ est la face commune de deux et seulement deux simplexes de dimension n; désignons-les par $| t_h^n |$ et $| t_k^n |$. Si t_h^n, t_k^n sont leurs orientations quelconques, alors $\nabla t_i^{n-1} = \varepsilon_1 t_h^n + \varepsilon_2 t_k^n$, où ε_1, ε_2 sont égaux à ± 1, de sorte que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ est égal soit à 0, soit à ± 2, d'où l'on déduit notre assertion.

Si K^n est une pseudo-variété orientable, la proposition 2 peut être remplacée par une assertion plus forte.

Proposition 2_0. *Supposons que $\sum t_i^n$ est une orientation d'une pseudo-variété orientable K^n et la chaîne $x^n = \sum a_i t_i^n$ est cohomologue à zéro dans K^n; alors $\sum a_i = 0$.*

En effet, pour tout t_i^{n-1} nous avons $\nabla t_i^{n-1} = \pm (t_h^n - t_k^n)$, où $| t_h^n |$ et $| t_k^n |$ sont les simplexes de dimension n qui ont $| t_i^{n-1} |$ pour face. Autrement dit, la proposition 2_0 est satisfaite pour toute chaîne de la forme $x^n = \nabla t_i^{n-1}$ et donc elle est satisfaite pour toute chaîne x^n cohomologue à zéro sur K^n.

On peut déduire des faits démontrés la

Proposition 3. *Si $| t^n | \in K^n$ et K^n est une pseudo-variété orientable, alors le cycle at^n est cohomologue à zéro sur K^n si et seulement si $a = 0$.*

Soient maintenant t_h^n et t_k^n deux simplexes orientés quelconques d'une pseudo-variété K^n de dimension n. Alors, en désignant par $\sim$ la cohomologie dans K^n, on a

$$t_k^n \sim \pm t_h^n. \tag{9}$$

Etant donné la connexité forte du complexe K^n, il suffit de démontrer cette assertion pour deux simplexes $| t_h^n |$ et $| t_k^n |$ qui possèdent une face commune $| t_i^{n-1} |$ de dimension $n - 1$. Mais dans ce cas

$$\nabla t_i^{n-1} = (t_h^n : t_i^{n-1})\, t_h^n + (t_k^n : t_i^{n-1})\, t_k^n$$

et $(t_h^n : t_1^{n-1}) = \pm 1$, $(t_k^n : t_1^{n-1}) = \pm 1$, de sorte que $t_k^n \pm t_h^n \sim 0$, ce qu'il fallait démontrer.

De la proposition 3 et de la cohomologie (9), nous déduisons la

Proposition 4. *Chaque chaîne $x^n = \sum a_k t_k^n$ de dimension n d'une pseudo-variété K^n est cohomologue dans K^n à une chaîne de la forme at_h^n, où t_h^n est un simplexe orienté quelconque de dimension n de cette pseudo-variété.*

Les propositions 3 et 4 impliquent le résultat fondamental suivant :

Théorème 13. *Soit K^n une pseudo-variété orientable de dimension n. Dans ce cas le groupe $\nabla^n K^n$ est le groupe cyclique infini* *).

Nous proposons au lecteur de démontrer en guise d'exercice le fait que le *groupe $\nabla^n K^n$ d'une pseudo-variété non orientable K^n est un groupe d'ordre* 2.

Indication. Remarquons tout d'abord que si t_h^n et t_k^n sont des orientations cohérentes, la formule (9) se transforme en $t_h^n \sim t_k^n$. L'ayant remarqué, il faut choisir dans K^n une suite désorientante

$$t_1^n,\ t_2^n,\ \ldots,\ t_s^n,$$

ce qui donne $t_1^n \sim t_2^n \sim \ldots \sim t_s^n \sim -t_1^n$, i.e. $2t_1^n \sim 0$. De cette remarque et de la proposition 3 on déduit que $\nabla^n K^n$ est un groupe d'ordre 2.

§ 8. Homomorphismes des groupes d'homologie et de cohomologie induits par une application simpliciale du complexe K_β dans le complexe K_α

1. L'homomorphisme de $\Delta^r(K_\beta)$ dans $\Delta^r(K_\alpha)$. Soit une application simpliciale f du complexe **) K_β dans le complexe K_α.

L'application simpliciale f induit un homomorphisme du groupe $L^r K_\beta$ dans le groupe $L^r K_\alpha$, que nous désignerons toujours par f, de la manière suivante.

Soit $t_\beta^r = (e_0 \ldots e_r)$ un simplexe orienté quelconque du complexe K_β. Si son image par l'application simpliciale f est non dégénérée, i.e. tous les sommets $fe_0, \ldots, fe_r$ sont distincts, alors l'image ft_β^r du simplexe orienté t_β^r est par définition le simplexe orienté

$$ft_\beta^r = (fe_0 \ldots fe_r)$$

---

*) On voit facilement qu'en général le groupe $\nabla^n(K^n, \mathfrak{A})$ est isomorphe à $\mathfrak{A}$.

**) Les complexes sont supposés simpliciaux et complets ; le groupe de coefficients est arbitraire, mais choisi une fois pour toutes.

du complexe K_α ; si parmi les sommets $fe_0, \ldots, fe_r$ au moins deux coïncident, on pose $ft_\beta^r = 0$ (en désignant par 0 l'élément nul du groupe $L^r K_\alpha$). Ensuite, pour chaque chaîne $y_\beta^r = \sum c_i t_{\beta i}^r$ du complexe K_β on pose

$$fy_\beta^r = \sum c_i f t_{\beta i}^r \in L^r K_\alpha.$$

Ainsi, l'homomorphisme $f : L^r K_\beta \to L^r K_\alpha$ est défini pour tout groupe de coefficients $\mathfrak{A}$.

Démontrons que cet homomorphisme f est permutable à l'opérateur Δ, i.e. que pour chaque chaîne du complexe K_β on a

$$f\Delta y^r = \Delta f y^r. \tag{1}$$

Il suffit de démontrer que pour tout simplexe $t_\beta^r = (e_0 \ldots e_r)$ on a $f\Delta t_\beta^r = \Delta f t_\beta^r$. Cette dernière identité est évidente lorsque l'image par l'application f du simplexe t_β^r est non dégénérée ; lorsqu'elle est dégénérée, $ft_\beta^r = 0$ et $\Delta f t_\beta^r = 0$; il reste à démontrer qu'on a également $f\Delta t_\beta^r = 0$. Pour cela, il faut considérer séparément deux cas :

a) le nombre de sommets du simplexe $f \mid t_\beta^r \mid$ est plus petit que $r - 1$; dans ce cas non seulement l'image du simplexe $\mid t_\beta^r \mid$, mais aussi l'image de chacune de ses faces de dimension $r - 1$ est nulle, donc $f\Delta t_\beta^r = 0$;

b) le nombre de sommets du simplexe $f \mid t_\beta^r \mid$ est égal à $r - 1$; dans ce cas il n'existe qu'un seul couple de sommets envoyés sur le même point par l'application f, par exemple, e_0 et e_1 :

$$fe_0 = fe_1.$$

Alors les images de toutes les faces de dimension $r - 1$ du simplexe $\mid t_\beta^r \mid$, sauf les faces $(e_1 e_2 \ldots e_r)$ et $(e_0 e_2 \ldots e_r)$, sont nulles et

$$f\Delta t_\beta^r = (fe_1, fe_2, \ldots, fe_r) - (fe_0, fe_2, \ldots, fe_r) = 0.$$

La relation (1) est démontrée, et elle implique directement que l'application f fait correspondre à chaque cycle du complexe K_β un cycle du complexe K_α et à chaque cycle homologue à zéro dans K_β un cycle homologue à zéro dans K_α. Autrement dit, l'homomorphisme f du groupe $L^r K_\beta$ dans le groupe $L^r K_\alpha$ applique le groupe $Z^r K_\beta$ dans le groupe $Z^r K_\alpha$, le groupe $H^r K_\beta$ dans le groupe $H^r K_\alpha$ et, par conséquent, le groupe $\Delta^r K_\beta$ dans le groupe $\Delta^r K_\alpha$.

Cet homomorphisme s'appelle *homomorphisme induit par l'application simpliciale f.*

2. Quelques exemples. En guise d'application calculons les groupes d'homologie suivants : premièrement, de l'adhérence combinatoire $[T^n]$ du simplexe T^n et, deuxièmement, de la sphère combina-

toire S^n de dimension n, i.e. du complexe qui consiste de toutes les faces propres d'un simplexe de dimension $n+1$. Supposons pour simplifier que le groupe de coefficients est le groupe de nombres entiers.

Puisque les deux complexes sont connexes, leurs Δ-groupes de dimension nulle sont des groupes cycliques infinis. Ensuite, le groupe $\Delta^n[T^n] = Z^n[T^n]$ est évidemment nul, tandis que S^n est une pseudo-variété orientable de dimension n, de sorte que son Δ-groupe de dimension n est un groupe cyclique infini. Démontrons que pour $0 < r < n$ on a

$$\Delta^r[T^n] = 0, \tag{2a}$$

$$\Delta^r S^n = 0. \tag{2b}$$

Remarquons tout d'abord que dans le complexe T^n chaque ensemble de $r+2$ sommets pour $r \leqslant n-1$ est un simplexe, tandis que dans S^n chaque ensemble de $r+2$ sommets est un simplexe pour $r \leqslant n-2$. Par conséquent, les deux égalités (2a) et (2b) découlent de l'assertion suivante:

Proposition 1. *Si dans un complexe simplicial complet Q chaque ensemble de $r+2$ sommets forme un simplexe, alors chaque cycle de dimension r dans Q est homologue à zéro.*

La démonstration est basée sur la notion de cône oK (de sommet o) sur un complexe donné K (voir AP, p. 207), i.e. de complexe (non complet) oK de tous les simplexes de la forme oT, où $T \in K$ *).

Soit $x^r = \sum a_i t_i^r$ une chaîne quelconque du complexe K. Alors on peut définir dans le complexe oK une chaîne ox^r de dimension $r+1$ appelée cône (de sommet o) sur la chaîne x^r de la manière suivante.

Tout d'abord appelons *cône ot^r sur le simplexe orienté t^r* du complexe K le simplexe orienté (ct^r) de dimension $r+1$ du complexe oK.

Ensuite, appelons *cône sur la chaîne $x^r = \sum a_i t_i^r$* (dans le complexe oK) la chaîne

$$ox^r = \sum a_i (ot_i^r).$$

On voit facilement que chaque cycle z^r dans K est la frontière dans $[oK]$ de la chaîne $x^{r+1} = oz^r$ (pour $r = 0$ il faut supposer que le cycle z^r a une somme de coefficients nulle).

Démontrons maintenant le théorème énoncé ci-dessus. Désignons par $|z^r| \subseteq Q$ le *support du cycle z^r*, i.e. le complexe qui consiste de tous les simplexes qui figurent dans z^r avec des coefficients non nuls, et de toutes les faces de ces simplexes.

---

*) Si K est un complexe complet, alors l'adhérence combinatoire $[oK]$ du complexe oK est $[oK] = oK \cup K$ et s'appelle *cône fermé* sur K.

Définissons une application simpliciale du cône fermé $o \mid z^r \mid \cup \cup \mid z^r \mid$ dans le complexe Q, en faisant correspondre au sommet o un sommet quelconque e_0 du complexe Q, et à chaque sommet e_i du complexe $\mid z^r \mid$ ce même sommet e_i. Puisque chaque ensemble de $r+2$ sommets de Q forme un simplexe, l'application que l'on vient de définir est effectivement une application simpliciale du complexe $o \mid z^r \mid \cup \mid z^r \mid$ dans Q, qui laisse invariants tous les simplexes de $\mid z^r \mid$. Le cycle z^r reste invariant pour cette application, et la chaîne oz^r, dont ce cycle est la frontière dans le cône fermé $o \mid z^r \mid \cup \mid z^r \mid$, aura pour image une certaine chaîne du complexe Q, dont le même cycle z^r est la frontière; donc $z^r \sim 0$ dans Q.

3. L'homomorphisme de $\nabla^r(K_\alpha)$ dans $\nabla^r(K_\beta)$. L'homomorphisme $\bar{f} : L^r K_\alpha \to L^r K_\beta$ dual à l'homomorphisme $f : L^r K_\beta \to L^r K_\alpha$ (et à l'application simpliciale $f : K_\beta \to K_\alpha$) est un homomorphisme du groupe $L^r K_\alpha$ dans le groupe $L^r K_\beta$ défini de la manière suivante: si x^r_α est une chaîne du complexe K_α, alors sur chaque simplexe orienté t^r_β du complexe K_β la chaîne $\bar{f}x^r_\alpha = x^r_\beta$ prend la valeur

$$(\bar{f}x^r_\alpha,\ t^r_\beta) = (x^r_\alpha,\ ft^r_\beta). \tag{3}$$

Cet homomorphisme est permutable à l'opérateur ∇, i.e.

$$\bar{f}\nabla x^r_\alpha = \nabla \bar{f} x^r_\alpha. \tag{4}$$

En effet, pour tout simplexe t^{r+1}_β dans K_β on a (d'après la formule (1) et la formule (7). p.28),

$$(\bar{f}\nabla x^r_\alpha,\ t^{r+1}_\beta) = (\nabla x^r_\alpha,\ ft^{r+1}_\beta) = (x^r_\alpha,\ \Delta f t^{r+1}_\beta) =$$
$$= (x^r_\alpha,\ f\Delta t^{r+1}_\beta) = (\bar{f}x^r_\alpha,\ \Delta t^{r+1}_\beta) = (\nabla \bar{f} x^r_\alpha,\ t^{r+1}_\beta).$$

Par conséquent, l'homomorphisme $\bar{f}$ applique le groupe $Z^r_\nabla K_\alpha$ dans $Z^r_\nabla K_\beta$ et le groupe $H^r_\nabla K_\alpha$ dans $H^r_\nabla K_\beta$, de sorte que se trouve défini un homomorphisme $\bar{f}$ du groupe $\nabla^r K_\alpha$ dans le groupe $\nabla^r K_\beta$. C'est cet homomorphisme que l'on appelle *homomorphisme de ∇-groupes, dual à l'application simpliciale f.*

Remarque. Soient K_α, K_β, K_γ trois complexes et $g : K_\alpha \to K_\beta$, $h : K_\beta \to K_\gamma$ des applications simpliciales. On vérifie facilement que dans ce cas l'application

$$f = hg$$

est simpliciale et pour les homomorphismes $g, h, f, \bar{g}, \bar{h}, \bar{f}$ induits par les applications g, h, f on a

$$f = hg : L^r K_\alpha \to L^r K_\gamma$$

et

$$\bar{f} = \bar{g}\bar{h} : L^r K_\gamma \to L^r K_\alpha,$$

et aussi

$$f = hg : \Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\gamma,$$
$$\bar{f} = \bar{g}\bar{h} : \nabla^r K_\gamma \to \nabla^r K_\alpha.$$

4. **Le cas des groupes de coefficients topologiques.** Il est très facile de montrer que dans le cas des groupes de coefficients topologiques les homomorphismes

$$f : L^r K_\alpha \to L^r K_\beta,$$
$$\bar{f} : L^r K_\beta \to L^r K_\alpha$$

induits par l'application simpliciale $f : K_\alpha \to K_\beta$ sont continus, de même que les homomorphismes des groupes d'homologie et de cohomologie.

Vérifions-le pour l'homomorphisme f. Soit U un voisinage quelconque de zéro du groupe de coefficients $\mathfrak{A}$. Choisissons un voisinage symétrique V de zéro dans $\mathfrak{A}$ tel que $mV \subseteq U$, où m est le nombre de simplexes de dimension r du complexe K_α. Alors pour toute chaîne $x^r = \sum_{i=1}^{m} a_i t_i^r \in O_V$ on a

$$(fx^r, t_\beta^r) = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i f t_i^r, t_\beta^r\Big) \in mV \subseteq U,$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 9. Degré d'une application simpliciale dans une pseudo-variété

1. **Degré d'une application.** Soient K_β et K_α deux pseudo-variétés orientables. On sait que les groupes

$$\Delta^n K_\beta = Z^n K_\beta$$

et

$$\Delta^n K_\alpha = Z^n K_\alpha$$

sont (pour le groupe des nombres entiers) des groupes cycliques infinis d'éléments générateurs

$$z_\beta^n = \sum_j t_{\beta j}^n \quad \text{et} \quad z_\alpha^n = \sum_i t_{\alpha i}^n,$$

où z_β^n et z_α^n sont les orientations des pseudo-variétés K_β^n et K_α^n.

Soit $f : K^n_\beta \to K^n_\alpha$ une application simpliciale. Alors $fz^n_\beta \in Z^n K_\alpha$, i.e.

$$fz^n_\beta = cz^n_\alpha, \tag{1}$$

où c est un entier.

Puisque $(z^n_\alpha, t^n_{\alpha i}) = 1$, il découle de (1) que

$$(fz^n_\beta, t^n_{\alpha i}) = c, \tag{2}$$

quel que soit $|t^n_{\alpha i}| \in K^n_\alpha$. L'entier c (positif, négatif ou nul) qui est bien déterminé par l'application simpliciale f et par les orientations choisies z^n_β et z^n_α de nos pseudo-variétés K^n_α et K^n_β, s'appelle *degré de l'application simpliciale f de la pseudo-variété K^n_β dans la pseudo-variété K^n_α* *).

2. Première définition du degré d'une application (suivant Brouwer). On voit facilement que la formule (2) peut être écrite sous la forme

$$c = \sum_j (ft^n_{\beta j}, t^n_{\alpha i}) \tag{3}$$

pour tout $|t^n_{\alpha i}| \in K^n$ (la somme est effectuée sur tous les $|t^n_{\beta j}| \in K^n_\beta$) **).

Désignons par π_i le nombre des $|t^n_{\beta j}|$ pour lesquels $ft^n_{\beta j} = t^n_{\alpha i}$ et par ν_i le nombre des $|t^n_{\beta j}|$ pour lesquels $ft^n_{\beta j} = -t^n_{\alpha i}$; nous déduisons alors de (3)

$$c = \pi_i - \nu_i. \tag{4}$$

Ainsi: soient z^n_α et z^n_β les orientations de deux pseudo-variétés orientables K^n_α et K^n_β, et soit f une application simpliciale de K^n_β dans K^n_α. La différence entre le nombre π_i de tous les $|t^n_{\beta j}|$ pour lesquels $ft^n_{\beta j} = t^n_{\alpha i}$, pour $t^n_{\alpha i}$ donné, et le nombre ν_i de tous les $|t^n_{\beta j}|$ pour lesquels $ft^n_{\beta j} = -t^n_{\alpha i}$ ne dépend pas du choix du simplexe $|t^n_{\alpha i}| \in K^n_\alpha$; elle est égale au degré de l'application simpliciale f.

Cet énoncé est celui de la définition originale du degré d'une application simpliciale due à Brouwer.

Si l'image fK^n_β ne coïncide pas avec K^n_α, le degré de l'application f est nul. En effet, si $|t^n_{\alpha i}|$ n'est pas contenu dans fK^n_β, alors pour tout $t^n_{\beta j}$ on a $(ft^n_{\beta j}, t^n_{\alpha i}) = 0$ et $c = 0$ en vertu de la formule (3).

*) Cette définition du degré d'une application simpliciale d'une pseudo-variété orientable de dimension n dans une autre se généralise facilement au cas d'une application simpliciale d'un complexe dans une pseudo-variété orientable.

**) Il faut se rappeler que pour chaque $|t^n_{\beta j}| \in K^n_\beta$ et pour tout $|t^n_{\alpha i}| \in K^n_\alpha$ donné, on a l'une des trois possibilités suivantes: ou bien $(ft^n_{\beta j}, t^n_{\alpha i}) = 1$ (i.e. $ft^n_{\beta j} = t^n_{\alpha i}$), ou bien $(ft^n_{\beta j}, t^n_{\alpha i}) = -1$ (i.e. $ft^n_{\beta j} = -t^n_{\alpha i}$), ou enfin $(ft^n_{\beta j}, t^n_{\alpha i}) = 0$ (i.e. $f|t^n_{\beta j}| \neq |t^n_{\alpha i}|$).

Remarque 1. Le degré d'une application simpliciale f d'une pseudo-variété orientable K_β^n sur une pseudo-variété orientable K_α^n dépend du choix des orientations z_β^n et z_α^n. On voit facilement qu'en remplaçant une des orientations des variétés K_β^n et K_α^n par l'orientation opposée on change le signe du degré de l'application, sans changer sa valeur absolue.

Remarque 2. Soient maintenant K_β^n et K_α^n des pseudo-variétés de dimension n, qui ne sont pas toutefois nécessairement orientables. Les groupes

$$\Delta^n(K_\beta^n, I_2) = Z^n(K_\beta^n, I_2) \text{ et } \Delta^n(K_\alpha^n, I_2) = Z^n(K_\alpha^n, I_2)$$

sont tous deux composés de deux éléments: de zéro et de $z_\beta^n = \Sigma\, |t_{\beta j}^n|$ et, respectivement, de zéro et de $z_\alpha^n = \Sigma\, |t_{\alpha i}^n|$. Par conséquent, on a soit $fz_\beta^n = z_\alpha^n$, soit $fz_\beta^n = 0$.

Nous dirons que la *parité* de l'application f est nulle dans le premier cas et égale à 1 dans le second. Dans le premier cas, pour chaque $|t_{\alpha i}^n|$ donné, le nombre des $|t_{\beta j}^n|$ qui ont pour image les $|t_{\alpha i}^n|$ est impair, et pair dans le second. La parité d'une application simpliciale est parfois appelée *degré modulo deux* de cette application.

Remarque 3 (exemples). Soit (fig. 9) un polygone fermé K_α de m côtés dont les sommets numérotés successivement dans le

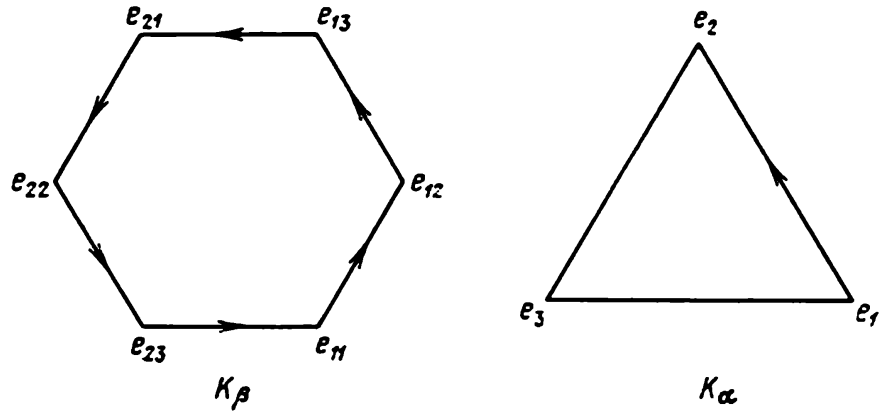

Fig. 9

sens antihoraire sont désignés par $e_1, \ldots, e_m$. Choisissons un nombre naturel c et numérotons les sommets d'un polygone K_β à cm sommets, également dans le sens antihoraire, de la manière suivante:

$$e_{11}, \ldots, e_{1m};\ e_{21}, \ldots, e_{2m};\ \ldots;\ e_{c1}, \ldots, e_{cm}.$$

En supposant que les deux pseudo-variétés K_β et K_α de dimension 1 sont orientées contre les aiguilles d'une montre et en posant pour tous $i = 1, 2, \ldots, c$ et $j = 1, 2, \ldots, m$

$$fe_{ij} = e_j,$$

on obtient une application simpliciale f de la pseudo-variété K_β sur K_α, et le degré de cette application sera égal à c. En changeant l'orientation d'une de ces pseudo-variétés, on obtient une application de degré $-c$ (sur la figure 9, $m = 3$, $c = 2$).

L'application simpliciale f obtenue jouit de la propriété suivante : pour chaque $t^1_{\alpha i} \in K_\alpha$ on a $\pi_i = c$, $\nu_i = 0$, i.e. chaque simplexe orienté de dimension 1 est recouvert, par l'application f, d'un nombre de simplexes (du complexe K_β), de même orientation, égal au degré de l'application.

Soit maintenant n un nombre naturel quelconque ; admettons que les pseudo-variétés K^n_α et K^n_β sont les triangulations de polyèdres situés dans R^{n+1} et homéomorphes à la sphère $\widetilde{S}^n$ de dimension n, et que l'on s'est donné une application simpliciale f de degré c du complexe K^n_β sur le complexe K^n_α, qui satisfait à la condition que nous venons d'énoncer. Supposons que l'espace R^{n+1} est contenu dans l'espace R^{n+2} et choisissons dans $R^{n+2} \setminus R^{n+1}$ deux points o et o' de part et d'autre du plan R^{n+1}. Construisons les cônes $[oK^n_\alpha]$, $[o'K^n_\alpha]$, $[oK^n_\beta]$, $[o'K^n_\beta]$. Chacun des cônes « doubles »

$$K^{n+1}_\alpha = [oK^n_\alpha] \cup [o'K^n_\alpha], \quad K^{n+1}_\beta = [oK^n_\beta] \cup [o'K^n_\beta]$$

est une pseudo-variété orientable fermée de dimension $n + 1$, dont le polyèdre sous-jacent est homéomorphe à $\widetilde{S}^{n+1}$.

Prolongeons maintenant l'application simpliciale du complexe K^n_β sur tout le complexe K^{n+1}_β en posant $fo = o$ et $fo' = o'$. Nous obtenons une application simpliciale du complexe K^{n+1}_β sur K^{n+1}_α pour laquelle $\pi_i = c$, $\nu_i = 0$ quel que soit $|t^{n+1}_{\alpha i}| \in K^{n+1}_\alpha$, et donc de degré c. Ainsi, pour tout entier naturel c et pour tout entier n, nous obtenons des triangulations K^n_β, K^n_α de polyèdres homéomorphes à la sphère de dimension n et des applications simpliciales de degré c de la triangulation K^n_β dans K^n_α. Remarquons enfin que, pour obtenir des applications de degré 0, il suffit d'envoyer le complexe K^n_β tout entier dans un seul sommet du complexe K^n_α. Ainsi :

Pour chaque nombre naturel n et pour chaque entier c il existe une application simpliciale de degré c d'une triangulation de la sphère de dimension n dans une autre.

Remarque 4. Le cas $n = 0$. Tout couple de points $\{e_0, e_1\}$ s'appelle sphère de dimension nulle. Les cycles normaux de dimension nulle $e_1 - e_0$ et $e_0 - e_1$ s'appellent *orientations de la sphère de dimension nulle*. Ainsi, la sphère de dimension nulle, de même que toute sphère de dimension n pour $n \geqslant 1$, possède exactement deux orientations. Néanmoins, la sphère de dimension nulle n'est pas une pseudo-variété, car elle ne possède pas la propriété de connexité.

Supposons données deux sphères $S^0_\alpha = \{e_0, e_1\}$ et $S^0_\beta = \{e'_0, e'_1\}$. Les quatre applications suivantes de la sphère S^0_β dans S^0_α sont possi-

bles :

$$1)\ f_1e'_0 = f_1e'_1 = e_0, \qquad 2)\ f_2e'_0 = f_2e'_1 = e_1,$$
$$3)\ f_3e'_0 = e_0,\ f_3e'_1 = e_1, \quad 4)\ f_4e'_0 = e_1,\ f_4e'_1 = e_0.$$

Choisissons maintenant des orientations quelconques z^0_α et z^0_β des sphères S^0_α et S^0_β, par exemple les orientations $z^0_\alpha = e_1 - e_0$ et $z^0_\beta = e'_1 - e'_0$. Alors

$$f_1z^0_\beta = f_2z^0_\beta = 0\,; \quad f_3z^0_\beta = z^0_\alpha\,; \quad f_4z^0_\beta = -z^0_\alpha.$$

Il est naturel de dire que le degré des deux premières applications est nul ; celui de la troisième est égal à 1 et de la quatrième, à —1.

3. **∇-degré d'une application.** Soient X et Y deux pseudo-variétés de dimension n ; les simplexes de dimension n des pseudo-variétés X et Y seront désignés respectivement par $|x_i|$ et $|y_j|$.

Il est commode d'exprimer la définition de Brouwer du degré d'une application simpliciale $f : X \to Y$ en termes de l'homomorphisme dual

$$\bar{f} : \nabla^n Y \to \nabla^n X.$$

En effet, soient $x^n = \sum x^n_i$; $y^n = \sum y^n_j$ des orientations quelconques des pseudo-variétés X et Y et soit c le degré de l'application $f : X \to Y$.

Alors

$$c = \pi_1 - \nu_1,$$

où π_1 (resp. ν_1) est le nombre des simplexes $|x^n_i| \in X$ pour lesquels

$$fx^n_i = y^n_1 \quad (\text{resp. } fx^n_i = -y^n_1).$$

Par définition de l'homomorphisme $\bar{f}$: $L^nY \to L^nX$, nous avons pour tout x^n_i

$$a_i = (\bar{f}y^n_1,\ x^n_i) = (y^n_1,\ fx^n_i).$$

Autrement dit,

$$a_i = 1 \quad \text{si} \quad fx^n_i = y^n_1\,;$$
$$a_i = -1 \quad \text{si} \quad fx^n_i = -y^n_1\,;$$
$$a_i = 0 \quad \text{si} \quad f|x^n_i| \neq |y^n_1|$$

et

$$x^n = \sum a_i x^n_i = \bar{f}y^n_1,$$

où

$$\sum_i a_i = \pi_1 - \nu_1 = c.$$

Tous les cocycles x_i^n d'une pseudo-variété orientée X sont cohomologues à l'un d'eux, par exemple à x_1^n, de sorte que

$$\bar{f}y_1^n = \sum a_i x_i^n \underset{\nabla}{\sim} \left(\sum a_i\right) x_1^n = c x_1^n.$$

Ainsi, si ξ^n est l'élément générateur du groupe (cyclique infini) $\nabla^n X$, à savoir la classe de cohomologie du simplexe x_1^n, et η^n le générateur du groupe $\nabla^n Y$ (la classe de cohomologie du simplexe y_1^n), alors $\bar{f}\eta^n = c\xi^n$. Néanmoins, il est commode de considérer au lieu du nombre c lui-même, degré de l'application $f: X \to Y$, le cocycle cx_1^n et même sa classe de cohomologie

$$c\xi^n = \bar{f}\eta^n \in \nabla^n X.$$

En effet, soient X un complexe quelconque et Y une pseudo-variété (fermée) orientable de dimension n *). Soit $y^n = \sum y_j^n$ une orientation quelconque de cette pseudo-variété. Elle se détermine par chacun des simplexes orientés y_j^n et, par conséquent, par la classe de cohomologie $\eta^n \in \nabla^n Y$, qui contient tous ces simplexes. Par suite, on dit que η^n *est la classe de cohomologie qui détermine l'orientation de la pseudo-variété* Y. Pour l'application simpliciale $f: X \to Y$ est déterminé le cocycle

$$\bar{f}y^n \in Z_\nabla^n X$$

et donc sa classe de cohomologie $\bar{f}\eta^n \in \nabla^n X$ appelée *∇-degré de l'application simpliciale f* du complexe K dans la pseudo-variété (orientée) de dimension n.

SUPPLÉMENT AU CHAPITRE PREMIER

THÉORIE DES CARACTÈRES ET DUALITÉ DES GROUPES $\Delta^r K$ *et* $\nabla^r K$

1. Notion de caractère; dualité de Pontriaguine; produit scalaire. Pour comprendre à fond la théorie homologique de la dimension, il est nécessaire de posséder les notions de base de la théorie des caractères des groupes commutatifs. La théorie des caractères est une théorie vaste et complexe; son exposition complète ne peut donc être entreprise dans ce livre. Pour l'étude de la théorie des caractères, nous recommandons au lecteur de s'adresser à l'ouvrage fondamental de L. Pontriaguine, *Groupes continus* [2], en attirant son attention

*) Dans les applications ultérieures Y sera toujours une sphère (triangulée) orientée de dimension n.

sur le fait qu'il suffit d'étudier la théorie des caractères des groupes discrets, respectivement bicompacts, exposés aux §§ 34-37.

Le but de la présente section consiste à donner une liste des définitions et des théorèmes fondamentaux de la théorie des caractères qui seront nécessaires dans les chapitres ultérieurs de notre livre.

Remarque 1. Nous considérons seulement les groupes commutatifs sans le mentionner expressément : le mot « groupe » aura toujours la signification « groupe commutatif ». En considérant les sous-groupes des groupes topologiques, nous les supposerons, sauf mention du contraire, fermés, et les homomorphismes, continus.

On appelle *caractère* d'un groupe X (discret ou bicompact) tout homomorphisme (continu) de ce groupe dans le groupe cyclique continu $\varkappa$. On appelle somme de deux caractères φ_1 et φ_2 le caractère φ défini par la formule $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ pour tout $x \in X$. Ainsi, l'ensemble X^* de tous les caractères d'un groupe donné X est lui-même un groupe.

Si X est un groupe discret, on peut alors introduire une topologie dans son groupe de caractères X^* de la manière suivante. Pour obtenir un voisinage quelconque de l'élément nul du groupe X^* choisissons un voisinage quelconque W de l'élément nul du groupe $\varkappa$ et un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_s$ du groupe X. Le voisinage déterminé par ces données de l'élément nul du groupe X^* consiste de tous les caractères φ pour lesquels $\varphi(x_i) \in W$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$. Dans cette topologie le groupe X^* est bicompact.

Si X est un groupe bicompact, son groupe de caractères ne se munit pas de topologie, i.e. reste discret.

Si x^* est un caractère du groupe X, il est commode de désigner la valeur $x^*(x)$ de la fonction x^* sur l'élément donné $x \in X$ par (x, x^*) et l'appeler *produit scalaire* de x et x^*, en se rappelant que $(x, x^*) \in \varkappa$. Si l'on choisit un élément $x \in X$, on peut obtenir, en posant $x(x^*) = (x, x^*)$ pour chaque $x^* \in X^*$, le caractère du groupe X^*. Si le groupe X^* est bicompact (i.e. si X est discret), le caractère (x, x^*) est alors continu. Ainsi, chaque élément x du groupe X est, d'après la formule $x(x^*) = (x, x^*)$, un caractère du groupe X^*. Le fait principal de la théorie des caractères est le suivant : chaque caractère φ du groupe X^* s'obtient de cette manière et deux éléments distincts du groupe X sont également des caractères *) distincts du groupe X^*. En outre, si le groupe X est bicompact (par conséquent,

---

*) La dernière condition peut évidemment être énoncée sous la forme suivante : pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, il existe un $x^* \in X^*$ tel que $(x, x^*) \neq 0$; par la définition même du groupe X^*, pour chaque $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, il existe un $x \in X$ tel que $(x, x^*) \neq 0$.

X^* est discret), la topologie initiale de X coïncide avec la topologie que l'on y introduit comme topologie du groupe des caractères du groupe discret X^*. Tout cela s'exprime brièvement par le

Théorème 1. *Si X^* est le groupe des caractères du groupe X, alors, réciproquement, le groupe X est le groupe des caractères du groupe X^* conformément à la formule*

$$x^*(x) = x(x^*) = (x, x^*). \tag{1}$$

Ce remarquable théorème, que nous avons énoncé ici pour le cas de groupes discrets et bicompacts, est le théorème fondamental de la théorie des caractères, connu sous le titre de *dualité algébrique de Pontriaguine*. Pour sa démonstration, nous renvoyons le lecteur au livre de Pontriaguine cité plus haut.

Deux groupes X et X^* dont chacun est le groupe des caractères de l'autre sont dits *duaux*.

La remarque suivante, concernant le théorème que nous venons d'énoncer, sera importante par la suite.

Soient X et Y deux groupes dont le premier est discret et le second bicompact. Supposons que pour deux éléments quelconques $x \in X$, $y \in Y$ le produit scalaire $(x, y) \in \varkappa$ est défini et qu'il est distributif relativement à x et y, continu relativement à y et satisfait en outre à la condition suivante : l'élément nul de chacun des deux groupes est le seul élément dont le produit scalaire par un élément quelconque de l'autre groupe est égal à zéro (du groupe $\varkappa$).

Dans ce cas chacun des deux groupes sera, en vertu de la formule (1) (dans laquelle il faut remplacer x^* par y), le groupe des caractères du second groupe, et nous dirons que les groupes X et Y sont *duaux* relativement au produit scalaire défini comme nous l'avons fait.

La relation de dualité entre les groupes X et Y s'exprime en écrivant

$$X \mid Y.$$

Le premier — et le plus important ! — des exemples de groupes duaux est fourni par le groupe bicompact $\varkappa$ et le groupe discret I des nombres entiers. Sans prétendre à un raisonnement rigoureux, indiquons la construction correspondante. Si $f\colon \varkappa \to \varkappa$ est un homomorphisme quelconque, on peut définir son degré k, puisqu'il s'agit d'une application continue d'une pseudo-variété (le cercle) sur elle-même. Il s'avère que l'on a alors nécessairement $fx = kx$ pour tout point $x \in \varkappa$ et la correspondance $f \mapsto k$ est un isomorphisme entre le groupe des caractères du groupe $\varkappa$ et le groupe des nombres entiers.

2. Annulateurs. Soit $A \subseteq X$ un sous-groupe quelconque du groupe X ; l'élément $y_0 \in Y$ s'appelle *élément annulant le sous-groupe $A \subseteq X$* si $(x, y_0) = 0$ pour tout $x \in A$. L'ensemble de tous les éléments du groupe Y qui annulent le sous-groupe A du groupe X est, comme on le voit facilement, un sous-groupe B du groupe Y ; on l'appelle

annulateur (dans le groupe Y) du sous-groupe $A \subseteq X$ et on le note

$$B = N(A, Y).$$

Une des assertions principales de la théorie des caractères est la suivante.

Théorème des annulateurs (théorème 2). *Si $X \mid Y$ et $B = N(A, Y)$, alors*

$$A = N(B, X).$$

Autrement dit, la propriété d'un des deux sous-groupes $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ d'être l'annulateur de l'autre (pour la dualité $X \mid Y$) est une propriété symétrique : les sous-groupes A et B s'annulent mutuellement, ce que l'on note

$$X \supseteq A \perp B \subseteq Y.$$

Les notations de ce type seront appelées *annulations* (relatives à la dualité $X \mid Y$).

Une des parties les plus importantes de la démonstration de la dualité algébrique de Pontriaguine est la démonstration du fait que si le sous-groupe A coïncide avec le groupe entier X, alors son annulateur dans le groupe Y est nul. Cette assertion est évidemment équivalente à la suivante.

Théorème d'existence (théorème 3). *Si $X \mid Y$, alors à chaque élément non nul d'un des deux groupes X, Y on peut associer un élément de l'autre groupe tel que le produit de ces deux éléments sera non nul.*

Le fait principal suivant de la théorie des caractères peut s'énoncer comme suit.

Théorème 4. *Les relations*

$$X \mid Y, \; X \supseteq A \perp B \subseteq Y$$

impliquent la définition naturelle suivante du produit scalaire (ξ, y) *pour* $\xi \in X - A$ *et* $y \in B$:

$$(\xi, y) = (x, y),$$

où x est un élément quelconque de la classe $\xi \in X - A$.

En vertu de cette définition du produit scalaire, nous avons la dualité

$$X - A \mid B.$$

D'une manière analogue (par symétrie)

$$Y - B \mid A.$$

D'où l'on déduit également l'assertion appelée

Théorème d'existence fort (théorème 4'). *Si $X \mid Y$ et si A est un sous-groupe du groupe X différent de X, alors pour tout élément x_0 qui n'appartient pas au sous-groupe A, on peut trouver dans Y un élément y_0 tel que*

$$(x, y_0) = 0 \text{ pour tout } x \in A,$$

mais $(x_0, y_0) \neq 0$.

En effet, désignons par $\xi_0 \in X - A$ la classe qui contient l'élément x_0. Par hypothèse $\xi_0 \neq 0$. Par conséquent, on peut trouver dans le groupe B, dual au groupe $X - A$, un élément y_0 tel que $(\xi_0, y_0) \neq 0$, tandis que par définition du groupe $B = N(A, Y)$, on a $(x, y_0) = 0$ quel que soit $x \in A$.

3. Homomorphismes duaux. Supposons donnés deux couples de groupes duaux

$$X \mid X^* \text{ et } Y \mid Y^*.$$

Les homomorphismes $f: X \to Y$ et $f^*: Y^* \to X^*$ sont appelés duaux entre eux si pour chaque $x \in X$, $y^* \in Y^*$ on a

$$(x, f^*y^*) = (fx, y^*).$$

Soient deux couples de groupes duaux

$$X \mid X^*, \quad Y \mid Y^*.$$

Soient en outre deux homomorphismes duaux

$$f : X \to Y, \quad f^* : Y^* \to X^*.$$

Si l'on désigne les noyaux des homomorphismes f et f^* par $X_0 = f^{-1}0$ et $Y_0^* = (f^*)^{-1}0$ et les images des groupes X et Y de ces homomorphismes par $Y_1 = fX \subseteq Y$ (resp. $X_1^* = f^*Y^* \subseteq X^*$), la situation envisagée s'exprime sous forme de la figure suivante :

(2)
$$\begin{tikzcd} X \supseteq X_0 \arrow[d, "f"'] & X_1^* \subseteq X^* \\ Y \supseteq Y_1 \arrow[ur, bend right] & Y_0^* \subseteq Y^* \arrow[u, "f^*"'] \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

Lemme principal sur les homomorphismes duaux : *la figure* (2) *peut toujours être complétée de manière à obtenir la figure suivante :*

(3)
$$\begin{tikzcd} X \supseteq X_0 \arrow[d, "f"'] & \perp & X_1^* \subseteq X^* \\ Y \supseteq Y_1 \arrow[ur, bend right] \arrow[urr, bend right] & \perp & Y_0^* \subseteq Y^* \arrow[u, "f^*"'] \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

Autrement dit, le lemme principal affirme qu'avec les notations introduites on a les annulations

$$X_0 \perp X_1^*, \quad Y_1 \perp Y_0^*, \tag{2a}$$

et donc les dualités

$$\begin{aligned} &X_0 \mid (X^* - X_1^*); \quad (X - X_0) \mid X_1^*; \\ &(Y - Y_1) \mid Y_0^*; \quad Y_1 \mid (Y^* - Y_0^*) \end{aligned} \tag{2b}$$

et la dualité

$$X_1^* \mid Y_1. \tag{2c}$$

D é m o n s t r a t i o n. La dualité (2c) se déduit de l'isomorphisme $Y_1 = X - X_0$ et de la dualité $(X - X_0) \mid X_1^*$ qui découle à son tour de l'annulation (2a). Ainsi il ne reste qu'à démontrer l'annulation (2a), plus exactement, la première d'entre elles, i.e. l'égalité $X_0 = N(X_1^*, X)$. Choisissons d'une manière quelconque les éléments $x_0 \in X_0$, $x_1^* \in X_1^*$; il existe alors un élément $y_1^* \in Y^*$ tel que $x_1^* = f^* y_1^*$ et

$$(x_0, x_1^*) = (x_0, f^* y_1^*) = (f x_0, y_1^*) = 0$$

(l'égalité $(f x_0, y_1^*) = 0$ découle du fait que $x_0 \in X_0$ et, par conséquent, $f x_0 = 0$). Ainsi $(x_0, x_1^*) = 0$ quels que soient $x_0 \in X_0$, $x_1^* \in X_1^*$, d'où l'on obtient

$$X_0 \subseteq N(X_1^*, X).$$

Pour démontrer l'égalité $X_0 = N(X_1^*, X)$ il reste à trouver, pour tout élément $x \in X$, $x \notin X_0$, un $x_1^* \in X_1^*$ tel que $(x, x_1^*) \neq 0$. Mais si l'on a $x \in X \setminus X_0$, alors $f x = y \neq 0$ et donc il existe un $y_1^* \in Y$ tel que

$$0 \neq (y_1^*, y) = (y_1^*, f x) = (x, f^* y_1^*).$$

L'élément $f^* y_1^*$ est l'élément cherché:

$$f^* y_1^* = x_1^* \in X_1^*.$$

L'annulation $X \supseteq X_0 \perp X_1^* \subseteq X^*$ et donc tout le lemme principal sont démontrés.

4. Dualité des groupes $\nabla^p K$ et $\Delta^p K$. Le théorème de dualité des groupes $\nabla^p K$ et $\Delta^p K$ du complexe K, pour des groupes de coefficients duaux entre eux, est une des applications les plus importantes des raisonnements précédents.

Les groupes de toutes les chaînes de dimension p du complexe K, pour les deux groupes duaux donnés X^* et X, seront désignés respectivement par L^{*p} et L^p. Si le nombre des simplexes de dimension p du complexe K est égal à α_p, alors le groupe L^p (resp. L^{*p}) est

la somme directe de α_p termes, chacun desquels est un groupe isomorphe au groupe X (resp. au groupe X^*). Par conséquent *) nous avons la dualité $L^p \mid L^{*p}$.

Les groupes de cycles et de cocycles correspondants seront désignés par Z^{*p} et Z^p, et les groupes des frontières, par H^{*p} et H^p. Puisque les homomorphismes

$$\nabla : L^{p-1} \to L^p \quad \text{et} \quad \Delta : L^{*p} \to L^{*p-1}$$

sont duaux, nous avons d'après le lemme principal la figure

(4)
$$\begin{tikzcd}
L^{p-1} \supseteq Z^{p-1} \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[r, perp] & H^{*p-1} \subseteq L^{*p-1} \\
L^p \supseteq H^p \arrow[ur, perp] \arrow[r, perp] & Z^{*p} \subseteq L^{*p} \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

et

(5)
$$L^p - H^p \mid Z^{*p}.$$

En outre nous savons que

$$L^p - Z^p = H^{p+1}$$

et nous avons, d'après (4), la « dualité diagonale »

$$H^p \mid H^{*p-1}, \text{ i.e. } H^{p+1} \mid H^{*p},$$

de sorte que

(6)
$$L^p - Z^p = H^{p+1} \mid H^{*p}.$$

Faisons maintenant la remarque générale suivante.

Soient $X \mid X^*$ et $X \supseteq Y$. En désignant par Q le groupe quotient

$$Q = X - Y$$

et par Q^* son groupe de caractères, i.e.

$$Q^* \mid Q,$$

nous avons l'annulation **)

$$X \supseteq Y \perp Q^* \subseteq X^*$$

et la dualité

(7)
$$Y \mid (X^* - Q^*).$$

Appliquons ce résultat à l'isomorphisme

$$(L^p - H^p) - (Z^p - H^p) = L^p - Z^p,$$

*) En vertu du théorème général, facile à démontrer, disant que si $X_1 \mid X_1^*$ et $X_2 \mid X_2^*$, alors $(X_1 + X_2) \mid (X_1^* + X_2^*)$.

**) L'annulateur du sous-groupe $Y \subseteq X$ du groupe X^* est dual au groupe quotient $X - Y$.

en posant

(8a) $$X = L^p - H^p,$$

(8b) $$Y = Z^p - H^p,$$

(8c) $$Q = (L^p - H^p) - (Z^p - H^p) = L^p - Z^p.$$

D'après la formule (5) on a

(9) $$X^* = Z^{*p}.$$

En outre on a l'isomorphisme

$$Q = L^p - Z^p = H^{p+1}$$

qui nous donne, avec la formule (6),

(10) $$Q^* = H^{*p}.$$

En substituant (8b), (9) et (10) dans (7), on a

$$(Z^p - H^p) \mid (Z^{*p} - H^{*p}),$$

i.e.

$$\nabla^p K \mid \Delta^p K,$$

ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE DEUX

THÉORÈMES D'INVARIANCE DES GROUPES D'HOMOLOGIE D'UN POLYÈDRE ; GROUPES D'HOMOLOGIE D'UN COMPACT (GROUPES DE BROUWER-VIETORIS)

L'égalité fondamentale entre la dimension dim X d'un polyèdre $X = \widetilde{K}$ et la dimension de chaque triangulation K de ce polyèdre était interprétée, à l'époque où elle fut établie (Brouwer, 1911), avant tout comme l'invariance de la dimension d'un polyèdre : deux triangulations quelconques de deux polyèdres homéomorphes ont la même dimension. Vient ensuite (par ordre chronologique et par ordre d'importance) le théorème d'invariance des groupes d'homologie, plus exactement des nombres de Betti et des coefficients de torsion, démontré par Alexander en 1915 : les groupes d'homologie correspondants de deux triangulations de polyèdres homéomorphes sont isomorphes. Les grandes lignes de la démonstration sont analogues à celles dont nous nous servirons pour la dimension : nous définirons les groupes d'homologie d'un compact (appelés groupes de Brouwer-Vietoris) de « manière invariante », i.e. de sorte que la définition elle-même implique que deux compacts homéomorphes ont des groupes d'homologie isomorphes, et puis nous démontrerons, dans le cas où le compact X donné est un polyèdre, que ses groupes d'homologie sont isomorphes aux groupes d'homologie définis précédemment d'une triangulation quelconque K du polyèdre X. Tout ceci sera exposé au § 5 du présent chapitre. Néanmoins, pour la démonstration du théorème d'invariance topologique énoncé ci-dessus, nous aurons besoin du théorème d'« invariance combinatoire », qui affirme que les groupes d'homologie d'un complexe donné sont isomorphes aux groupes correspondants de toute subdivision de ce complexe. Ce théorème d'invariance combinatoire, il est vrai, ne nous sera pas nécessaire sous sa forme la plus générale, mais seulement pour les subdivisions baricentriques. Sous cette forme réduite, le théorème d'invariance combinatoire est démontré aux §§ 1 et 2. En particulier, les constructions du § 1, très élégantes par elles-mêmes, sont aussi intéressantes dans la mesure où elles permettent de calculer très simplement les groupes d'homologie des polyèdres les plus simples (en particulier, des surfaces fermées).

Au § 3 nous allons étudier en détail l'isomorphisme naturel entre les groupes d'homologie d'un complexe donné et de ses subdivisions.

et démontrer en particulier la remarquable formule de Sperner-Alexander, qui exprime l'essence algébrique du lemme élémentaire de Sperner (voir chap. 2 du livre [AP]).

Le § 4 est de caractère auxiliaire, il est constamment utile dans l'étude des propriétés homologiques des compacts et, par la suite, des bicompacts. Lorsque nous aurons démontré, au § 5, le théorème d'invariance fondamental et défini les groupes d'homologie, nous généraliserons (au § 6) ces groupes (pour les complexes aussi bien que pour les compacts) en introduisant (suivant Lefchetz) les cycles et les homologies dites relatives, dont nous nous servirons souvent dans les chapitres ultérieurs.

Le § 7 contient une nouvelle généralisation de la notion de cycle véritable d'un compact : on introduit les cycles dits à coefficients variables et l'on démontre (pour les cycles véritables relatifs aux groupes de coefficients I_m, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, R, $\varkappa$) le « théorème de convergence » nécessaire à la construction de la théorie homologique de la dimension. Le lecteur qui s'intéresse surtout à la topologie combinatoire élémentaire des polyèdres, exposée aux chapitres 1, 2 et 3, peut omettre les §§ 6 et 7 en première lecture.

Le § 8 contient un exposé de l'équivalence homologique et homotopique de deux applications d'un compact X dans un compact Y, tandis qu'au § 9, qui se rapproche directement du § 8, sont étudiées les approximations simpliciales d'une application continue d'un polyèdre X dans un polyèdre Y ; ceci permet une étude exhaustive de la notion de degré d'une application d'une pseudo-variété sur une autre (de même dimension), tout aussi bien pour les pseudo-variétés fermées que (§ 10) pour les pseudo-variétés à bord.

§ 1. Agrandissement des triangulations

1. Définition de l'agrandissement. Appelons *agrandissement* d'une triangulation K_β de dimension n donnée tout ensemble K_α de sous-complexes $U_i^r \subseteq K_\beta$ de différentes dimensions r, $0 \leqslant r \leqslant n$, soumis aux trois conditions suivantes :

1°. Les complexes U_i^r sont des pseudo-variétés combinatoires orientables sans éléments communs.

2°. La réunion de tous les U_i^r est le complexe K_β.

3°. Pour chaque U_i^r le complexe $B_i = [U_i^r] \setminus U_i^r$, qui consiste de toutes les faces (des simplexes $T \in U_i^r$) qui n'appartiennent pas au complexe U_i^r, est un complexe complet (de dimension $\leqslant r - 1$), réunion de certains complexes U_j^s, $0 \leqslant s \leqslant r - 1$.

La pseudo-variété $U_j^s \in K_\alpha$ s'appelle *face propre* de la pseudo-variété $U_i^r \in K_\alpha$ si $U_j^s \subseteq B_i$. Dans ce cas nous écrivons $U_j^s < U_i^r$.

Remarquons avant tout : si $T_1 < T_2 \in K_\beta$ et $T_1 \in U_1^{r_1}$, $T_2 \in U_2^{r_2}$, alors nécessairement $U_1^{r_1} \leqslant U_2^{r_2}$.

En effet, il découle de notre assertion que soit $T_1 \in U_2^{r_2}$ et alors $U_1^{r_1} = U_2^{r_2}$, soit $T_1 \in B_2$ et alors, en vertu de la condition 3°, nous avons $U_1^{r_1} \in B_2$, i.e. $U_1^{r_1} < U_2^{r_2}$.

On déduit facilement des faits que nous venons de démontrer:

(a) *Si* $U_h^r < U_i^{r+1}$, *alors* U_h^r *est un sous-complexe ouvert du complexe* B_i.

(b) *Chaque* U_h^r *est le sous-complexe ouvert du complexe* $K_{\alpha\beta}^r \subseteq K_\beta$ *qui consiste de tous les sous-complexes* U_j^s *de dimension* $s \leqslant r$.

La démonstration dans les deux cas est la même. Soit $T \in U_h^r$, $T < T' \in B_i$ (resp. $T' \in K_{\alpha\beta}^r$). Il s'agit de démontrer que $T' \in U_h^r$. Supposons que $T' \in U_k^p$; puisque $T' \in B_i$ (resp. $T' \in K_{\alpha\beta}^r$), on a également $U_k^p \subseteq B_i$ (resp. $U_k^p \subseteq K_{\alpha\beta}^r$), de sorte que $p \leqslant r$. D'autre part, si $T < T'$, on a $U_h^r \leqslant U_k^p$, i.e. $r \leqslant p$ et par conséquent $r = p$ et $U_h^r = U_k^p$, $T' \in U_h^r$, ce qu'il fallait démontrer.

Désignons maintenant par u_i^r une orientation quelconque de la pseudo-variété U_i^r. Il est évident que u_i^r est une certaine chaîne du complexe K_β. Les chaînes u_i^r sont linéairement indépendantes (puisque les complexes U_i^r sont disjoints). Démontrons le fait principal: le cycle Δu_i^r (i.e. la frontière de la chaîne u_i^r dans le complexe K_β) est une combinaison linéaire des chaînes u_j^{r-1}:

$$\Delta u_i^r = \sum_j c_{ij}^{(r)} u_j^{r-1}. \tag{1}$$

En effet, la chaîne u_i^r est l'orientation de la pseudo-variété U_i^r, par conséquent Δu_i^r peut être différent de 0 seulement sur les simplexes de dimension $r - 1$ du complexe B_i. Mais ce complexe est la réunion de certaines U_j^s de dimension $s \leqslant r - 1$. Par conséquent, si Δu_i^r est non nul sur un certain t_k^{r-1}, alors $| t_k^{r-1} | \in U_j^{r-1} \subseteq B_i$. Puisque U_j^{r-1} est un sous-complexe ouvert du complexe B_i qui contient le cycle Δu_i^r, alors le morceau du cycle Δu_i^r situé sur U_j^{r-1} est un cycle de la pseudo-variété U_j^{r-1}, i.e. il est de la forme $c_j u_j^{r-1}$. Par conséquent, Δu_i^r, étant la somme de ses morceaux situés sur de différents U_j^{r-1}, est de la forme (1), ce qu'il fallait démontrer.

Les coefficients $c_{ij}^{(r)}$ dans l'expression (1) s'appellent *coefficients d'incidence des chaînes* u_i^r *et* u_j^{r-1}; *on les désigne par* $(u_i^r : u_j^{r-1})$. Démontrons que l'*ensemble de toutes les chaînes* $\pm u_i^r$, *muni des coefficients d'incidence que nous venons de définir, est un complexe cellulaire* que nous désignerons toujours par K_α et appellerons *agrandissement* (*algébrique*) du complexe K_β *).

---

*) Nous n'avons pas hésité à désigner par une même lettre une triangulation et le complexe cellulaire qui consiste de tous ses simplexes orientés. De la même manière, nous désignerons par K_α tout aussi bien l'agrandissement $\{U_i^r\}$ que le complexe cellulaire qui consiste des pseudo-variétés orientées $\pm U_i^r$.

Avant tout, nous avons l'égalité évidente $(-u_i^r : u_j^{r-1}) = (u_i^r : -u_j^{r-1}) = -(u_i^r : u_j^{r-1})$. Il reste à démontrer l'identité

$$\sum_j (u_i^r : u_j^{r-1})(u_j^{r-1} : u_k^{r-2}) = 0 \tag{2}$$

quels que soient u_i^r et u_j^{r-1}. Mais la formule (1) implique

$$\Delta\Delta u_i^r = \sum_j c_{ij}^{(r)} \Delta u_j^{r-1} = \sum_j c_{ij}^{(r)} \sum_k c_{jk}^{(r-1)} u_k^{r-2} = \sum_k d_{ik} u_k^{r-2},$$

où $d_{ik} = \sum_j c_{ij}^{(r)} c_{jk}^{(r-1)}$. Puisque $\Delta\Delta u_i^r = 0$ et toutes les chaînes u_k^{r-2} sont linéairement indépendantes, tous les coefficients d_{ik} s'annulent, ce qui démontre l'égalité (2).

Chaque cellule $\pm u_i^r$ du complexe cellulaire K_α est une chaîne du complexe K_β et, par conséquent, $L^r K_\alpha \subseteq L^r K_\beta$, la frontière de la cellule U_i^r dans K_α ayant été définie comme étant la frontière de la chaîne u_i^r dans le complexe K_β. Par conséquent, $Z^r K_\alpha \subseteq Z^r K_\beta$, $H^r K_\alpha \subseteq H^r K_\beta$ et l'application identique

$$\varepsilon_\beta^\alpha : Z^r K_\alpha \to Z^r K_\beta$$

induit un homomorphisme

$$\varepsilon_\beta^{\alpha r} : \Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta. \tag{3}$$

2. Agrandissements simples. Rappelons-nous maintenant qu'une pseudo-variété orientable de dimension n est dite simple, si pour tous les r, $0 \leqslant r < n$, ses groupes d'homologie de dimension r sont nuls (une pseudo-variété simple de dimension 0 est un complexe qui se réduit à un seul sommet). Appelons *simple* un agrandissement K_α du complexe K_β si toutes les pseudo-variétés $U_i^r \in K_\alpha$ sont simples. Démontrons l'assertion fondamentale suivante.

Théorème 1. *Si K_α est un agrandissement simple de la triangulation K_β, alors les groupes d'homologie du complexe cellulaire K_α sont isomorphes aux groupes d'homologie correspondants de la triangulation K_β, et l'homomorphisme* (3) *est un isomorphisme du groupe $\Delta^r K_\alpha$ sur le groupe $\Delta^r K_\beta$ quel que soit r.*

Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir les deux assertions (A) et (B) suivantes:

(A) *Chaque cycle z_β^r du complexe K_β est homologue dans K_β à un certain cycle de la forme $\sum_i c_i u_i^r$.*

(B) *Chaque cycle de la forme $z_\beta^r = \sum c_i u_i^r$ du complexe K_β, homologue à zéro dans ce complexe, est la frontière d'une de ses chaînes de la forme $x^{r+1} = \sum_h a_h u_h^{r+1}$.*

En effet, il découle de l'assertion (A) que l'homomorphisme (3) est une application sur tout le groupe $\Delta^r K_\beta$, tandis que l'assertion (B) implique que cet homomorphisme n'envoie que l'élément nul du groupe $\Delta^r K_\alpha$ sur l'élément nul du groupe $\Delta^r K_\beta$, i.e. que l'homomorphisme (3) est un isomorphisme.

Avant de démontrer les assertions (A) et (B) il nous faudra établir le

Lemme. *Soit comme toujours $K^r_{\alpha\beta} \subseteq K_\beta$ la réunion de tous les U^s_j, $s \leqslant r$. Si la chaîne $x^r_\beta \in L^r K_\beta$ est située sur $K^r_{\alpha\beta}$ et possède une frontière située sur $K^{r-1}_{\alpha\beta}$, alors x^r_β est une combinaison linéaire des chaînes u^r_i. En particulier, chaque cycle de dimension r situé sur $K^r_{\alpha\beta}$ est de la forme $z^r_\beta = \sum c_i u^r_i$.*

Démonstration du lemme. Il suffit de démontrer que le morceau de la chaîne x^r_β situé sur U^r_i est de la forme $c_i u^r_i$. Pour cela il suffit de démontrer (chapitre 1, théorème 11′) que ce morceau est un cycle de la pseudo-variété U^r_i.

Mais cette dernière assertion se déduit (en vertu de la remarque 2, p. 32) du fait que Δx^r_β est situé sur $K^{r-1}_{\alpha\beta} \subseteq K^r_{\alpha\beta} \setminus U^r_i$ et U^r_i est un sous-complexe ouvert du complexe $K^r_{\alpha\beta}$. Le lemme est démontré.

Passons à la démonstration de l'assertion (A).

Appelons *support* du simplexe $T^r_\beta \in K_\beta$ l'unique $U^p_i \in K_\alpha$ qui contient ce simplexe ; le nombre p sera appelé *profondeur du simplexe* T^r_β (plus précisément *profondeur du plongement de ce simplexe dans l'agrandissement* K_α). Ensuite, il est naturel de définir la *profondeur de la chaîne* $x^r_\beta = \sum a_i t^r_{\beta i}$ comme la profondeur maximale des simplexes $t^r_{\beta i}$ qui font partie de cette chaîne.

D'après le lemme ci-dessus, chaque cycle z^r_β de profondeur r est de la forme $z^r_\beta = \sum\limits_i c_i u^r_i$. Par conséquent, la démonstration de l'assertion (A) se réduit à construire pour chaque cycle $z^r_\beta \in Z^r K_\beta$ de profondeur $p > r$ un cycle de profondeur plus petite qui lui est homologue dans K_β. Pour cela, construisons pour le cycle z^r_β de profondeur $p > r$ un cycle v^r_β qui lui est homologue dans K_β et qui possède la propriété suivante : le nombre des U^p_i de dimension maximale p, supports du cycle v^r_β, est plus petit que le nombre correspondant pour le cycle z^r_β. En répétant cette opération un nombre fini de fois nous remplacerons justement le cycle z^r_β par un cycle de moindre profondeur qui lui est homologue.

Ainsi, soit U^p_i la pseudo-variété de dimension maximale qui contient un simplexe du cycle z^r_β. Puisque le cycle z^r_β de profondeur p est contenu dans $K^p_{\alpha\beta}$ et U^p_i est ouverte dans $K^p_{\alpha\beta}$, on déduit que le morceau $x^r_{\beta i}$ du cycle z^r_β situé sur U^p_i est un cycle sur U^p_i qui est la frontière dans U^p_i d'une certaine chaîne $x^{r+1}_{\beta i}$ (en vertu de la simplicité

de U_i^p). Alors la frontière $\Delta x_{\beta i}^{r+1}$ de cette chaîne (dans le complexe K_β) est de la forme

$$\Delta x_{\beta i}^{r+1} = x_{\beta i}^r + y_{\beta i}^r,$$

où $y_{\beta i}^r$ est situé sur $B_i = [U_i^p] \setminus U_i^p$. Puisque

$$\Delta x_{\beta i}^r + \Delta y_{\beta i}^r = \Delta\Delta x_{\beta i}^{r+1} = 0,$$

i.e. $\Delta y_{\beta i} = -\Delta x_{\beta i}^r$, en remplaçant dans z_β^r le morceau $x_{\beta i}^r$ par la chaîne $-y_{\beta i}^r$, on obtient une chaîne

$$v_\beta^r = z_\beta^r - x_{\beta i}^r + (-y_{\beta i}^r)$$

pour laquelle

$$\Delta v_\beta^r = -(\Delta x_{\beta i}^r + \Delta y_{\beta i}^r) = 0,$$

de sorte que v_β^r est un cycle qui ne possède déjà plus de simplexes sur U_i^p. Le cycle v_β^r est homologue dans K_β au cycle z_β^r (puisque $z_\beta^r - v_\beta^r = x_{\beta i}^r + y_{\beta i}^r = \Delta\, x_{\beta i}^{r+1}$) et possède la propriété suivante: le nombre de pseudo-variétés U_i^p de dimension maximale qui contiennent des simplexes de ce cycle est inférieur au nombre analogue pour le cycle z_β^r. En répétant ce raisonnement un nombre fini de fois, nous obtiendrons un cycle homologue dans K_β au cycle z_β^r de profondeur r, ce qui démontrera l'assertion (A).

L'assertion (B) se démontre d'une manière tout à fait analogue. Tout d'abord, si la chaîne x_β^{r+1} dont la frontière est le cycle $z_\beta^r = \sum c_j u_j^r$ est de profondeur $r+1$, elle sera de la forme $x_\beta^{r+1} = \sum_i a_i u_i^{r+1}$ (c'est l'assertion du lemme). Mais si la chaîne x_β^{r+1} est de profondeur $p > r+1$, alors elle est située sur $K_{\alpha\beta}^p$. Choisissons une des U_h^p qui contient des simplexes de la chaîne x_β^{r+1}. Il découle de nos hypothèses que le morceau $x_{\beta h}^{r+1}$ de la chaîne x_β^{r+1} situé sur U_h^p est un cycle dans U_h^p, ce qui permet, en vertu des raisonnements ci-dessus, de remplacer ce morceau par la chaîne $-y_{\beta h}^{r+1}$ située sur $B_h = [U_h^p] \setminus U_h^p$ pour obtenir ainsi la chaîne $w_\beta^{r+1} = x_\beta^{r+1} - x_{\beta h}^{r+1} - y_{\beta h}^{r+1}$ de même frontière z_β^r que x_β^{r+1} *). La chaîne w_β^{r+1} ne contient

---

*) En effet, $x_{\beta h}^{r+1}$ est la frontière dans U_h^p de la chaîne $x_{\beta h}^{r+2}$, dont la frontière complète (dans K_β) est

$$\Delta x_{\beta h}^{r+2} = x_{\beta h}^{r+1} + y_{\beta h}^{r+1},$$

où $y_{\beta h}^{r+1}$ est situé sur $B_h = [U_h^p] \setminus U_h^p$. On a

$$\Delta x_{\beta h}^{r+1} + \Delta y_{\beta h}^{r+1} = \Delta\Delta x_{\beta h}^{r+2} = 0 \text{ et } \Delta w_\beta^{r+1} = \Delta x_\beta^{r+1} - (\Delta x_{\beta h}^{r+1} + \Delta y_{\beta h}^{r+1}) = \Delta x_\beta^{r+1}.$$

déjà plus de simplexes situés sur U_h^p. Après un nombre fini d'itérations, nous obtenons une chaîne dont la frontière est le même cycle z_β^r et dont la profondeur est $r+1$, ce qui démontre l'assertion (B).

3. Exemples.

a) Groupes d'homologie d'un tore*). Prenons le carré $ABCD$ divisé en 18 triangles (voir fig. 6) qui forment la triangulation K_0 considérée à la page 67. Identifions les côtés opposés, soit AB avec DC et AD avec BC. Nous obtenons une triangulation K du *tore*; elle contient les mêmes 18 triangles, mais seulement 27 segments et 9 sommets. Considérons l'agrandissement simple K_α de cette triangulation : il consiste de la pseudo-variété simple $U^2 = U$ (considérée au chapitre 1 à la fin du n° 5°), de la pseudo-variété de dimension nulle $U^0 = A \equiv B \equiv C \equiv D$ et de deux pseudo-variétés simples U_1^1 et U_2^1 de dimension 1, dans lesquelles se sont transformés les côtés $AD \equiv BC = T_1^1 \cup T_2^1 \cup T_3^1$ (sans le sommet $A \equiv B \equiv C \equiv D$) et les côtés $AB \equiv DC = T_1^1 \cup T_2^1 \cup T_3^1$ (également sans le sommet $A \equiv B \equiv C \equiv D$). En choisissant des orientations $\pm u^2$, $\pm u_1^1$, $\pm u_2^1$, $\pm u^0$ des pseudo-variétés simples U^2, U_1^1, U_2^1, U^0 on aura les relations

$$\Delta u^2 = 0; \quad \Delta u_1^1 = \Delta u_2^1 = 0; \quad \Delta u^0 = 0$$

qui impliquent que le groupe $\Delta^2 K_\alpha = Z^2 K_\alpha$ est un groupe cyclique infini **) et $H^1 K_\alpha = 0$ de sorte que $\Delta^1 K_\alpha = Z^1 K_\alpha$ est la somme directe de deux groupes cycliques infinis engendrés respectivement par les cycles u_1^1 et u_2^1. Les groupes d'homologie du complexe K sont isomorphes aux groupes correspondants de son agrandissement simple K_α. Comme nous verrons dans le chapitre suivant, un théorème général d'invariance est vérifié : les groupes d'homologie de deux triangulations quelconques de polyèdres homéomorphes sont isomorphes. Par conséquent, le résultat obtenu peut être énoncé brièvement de la manière suivante :

Le groupe d'homologie de dimension 2 du tore est le groupe cyclique infini. Le groupe d'homologie de dimension 1 du tore est la somme directe de deux groupes cycliques infinis.

b) Groupes d'homologie d'une surface de Klein. Identifions maintenant le côté $\overrightarrow{AB}$ du carré $\overline{ABCD}$ (voir fig. 6) avec le côté $\overrightarrow{DC}$, et le côté $\overrightarrow{AD}$ avec le côté $\overrightarrow{CB}$ (en respectant les directions). Par cette identification le carré $\overline{ABCD}$ se transforme en une *surface de Klein* et la triangulation K_0 de ce carré, en une triangulation K' de la surface de Klein. Considérons à nouveau l'agrandissement K'_α de la triangulation K' qui consiste des mêmes pseudo-variétés simples U^2, U_1^1, U_2^1, U^0; en orientant les 18 triangles de la triangulation K_0 (par exemple contre les aiguilles d'une montre) on obtient une orientation u^2 de la pseudo-variété U^2; en choisissant des orientations quelconques u_1^1 et u_2^1 des pseudo-variétés U_1^1 et U_2^1 de dimension 1, on obtient maintenant les relations

$$\Delta u^2 = \pm 2u_2^1 \quad \Delta u_1^1 = \Delta u_2^1 = 0.$$

Le groupe $\Delta^2 K'_\alpha = Z^2 K'_\alpha$ est maintenant nul; le groupe $Z^1 K'_\alpha$ est toujours la somme directe de groupes cycliques infinis engendrés respectivement par les cycles u'_1 et u'_2. Le groupe $H^1 K'_\alpha$ est un sous-groupe du groupe $Z^1 K'_\alpha$ qui consiste de tous les cycles de la forme $2ku_2^1$, où k prend toutes les valeurs entières. Il en

*) Ici et partout dans la suite il s'agira dans les exemples des groupes d'homologie entiers.

**) Ce qui était clair dès le début, K étant une pseudo-variété fermée orientée.

résulte que le groupe quotient $\Delta^1 K'_\alpha = Z^1 K'_\alpha - H^1 K'_\alpha$ est la somme directe du groupe cyclique infini et du groupe d'ordre deux.

Nous pouvons énoncer : la surface de Klein est une pseudo-variété fermée non orientable (i. e. à groupe d'homologie de dimension 2 nul) ; le groupe d'homologie de dimension 1 de la surface de Klein est la somme directe d'un groupe cyclique infini et d'un groupe d'ordre deux.

c) Groupes d'homologie du plan projectif. Revenons à la figure 6 et effectuons une subdivision de la triangulation qu'elle représente en traçant la deuxième diagonale du carré. Cette triangulation, qui contient maintenant 24 triangles, sera toujours désignée par K_0. La triangulation de la frontière du carré, toujours désignée par $\dot{K}_0$, est un polygône fermé à 12 côtés. Si nous l'orientons contre les aiguilles d'une montre, nous obtiendrons 12 simplexes orientés de dimension 1 désignés sur la figure 10 par $t_1^1, \ldots, t_{12}^1$. En identifiant t_1^1 à t_7^1, t_2^1 à t_8^1, t_3^1 à t_9^1, t_4^1 à t_{10}^1, t_5^1 à t_{11}^1, t_6^1 à t_{12}^1, nous obtiendrons une triangulation K'' du *plan projectif*.

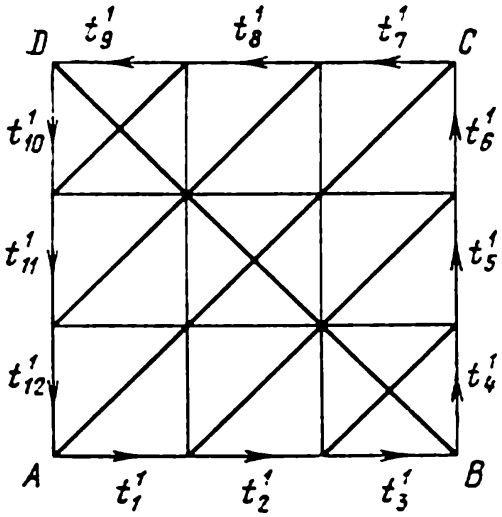

Fig. 10

Il est toujours aussi simple de démontrer que le groupe d'homologie de dimension 1 du complexe K_0 et donc de la pseudo-variété ouverte $U^2 = K_0 \setminus \dot{K}_0$, est nul, de sorte que U^2 est une pseudo-variété simple (ouverte) de dimension 2. Après les identifications indiquées, le complexe $\dot{K}_0$ devient la réunion du sommet $U^0 = A \equiv C$ et de la pseudo-variété ouverte U^1 de dimension 1 composée de tous les simplexes $T_1^1 \equiv T_7^1$, $T_2^1 \equiv T_8^1$, $T_3^1 \equiv T_9^1$, $T_4^1 \equiv T_{10}^1$, $T_5^1 \equiv T_{11}^1$, $T_6^1 \equiv T_{12}^1$ et de leurs sommets, sauf le sommet $A \equiv C$.

Les pseudo-variétés simples U^2, U^1, U^0 forment un agrandissement K''_α de la triangulation K'' du plan projectif. En choisissant des orientations u^2 et u^1 des pseudo-variétés U^2 et U^1 (par exemple, contre les aiguilles d'une montre), on aura

$$\Delta u^2 = 2u^1, \quad \Delta u^1 = 0,$$

d'où l'on déduit que le groupe $Z^2 K''_\alpha$ est nul, le groupe $Z^1 K''_\alpha$ est cyclique infini et consiste de tous les cycles de la forme ku^1 (où k est un nombre entier), $H^1 K''_\alpha$ est le sous-groupe $2Z^1 K''_\alpha$ du groupe $Z^1 K''_\alpha$ (il consiste de tous les cycles de la forme $2ku^1_h$), de sorte que $\Delta^1 K_\alpha = Z^1 K''_\alpha - H^1 K''_\alpha$ est le groupe d'ordre deux.

Ainsi, le plan projectif est une pseudo-variété fermée non orientable dont le groupe d'homologie de dimension 1 est le groupe d'ordre deux.

Remarque. Le groupe d'homologie de dimension nulle de toute triangulation K du tore, de la surface de Klein ou du plan projectif est le groupe cyclique infini, puisque chacune de ces triangulations (étant une pseudo-variété) est un complexe connexe.

Exercice 1. Si l'on colle les côtés orientés $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ du carré $ABCD$, en laissant libres les côtés AB et DC (fig. 11), on obtient une triangulation de l'anneau circulaire plan. Mais si l'on identifie $\overrightarrow{AD}$ avec $\overrightarrow{CB}$ en laissant toujours libres AB et DC, on obtient une triangulation du *ruban de Mœbius*. Démontrer que dans les deux cas le groupe Δ^1 est cyclique infini.

Exercice 2. Démontrer que les groupes $\Delta^2(K, I_2)$, $\Delta^2(K', I_2)$ et $\Delta^2(K'', I_2)$ (où K, K', K'' sont respectivement les triangulations du tore, de la surface de Klein et du plan projectif considéré ci-dessus) sont des groupes d'ordre deux.

Exercice 3. A partir d'une triangulation K_0 du cube, analogue à la triangulation du carré $ABCD$ représenté sur la figure 6, démontrer que le nombre de Betti de dimension 2 du tore de dimension 3 *) K^3 est égal à 3. Les éléments générateurs du groupe $\Delta^2 K^3$ sont les classes d'homologie des trois cycles de dimension deux qui apparaissent lorsqu'on colle les faces opposées du cube.

Le groupe $\Delta^2 K^3$ est le groupe libre de rang trois. Le groupe $\Delta^1 K^3$ est également un groupe libre de rang trois. On peut choisir pour élément générateur de ce groupe les classes d'homologie des trois cycles obtenus en identifiant les arêtes du cube.

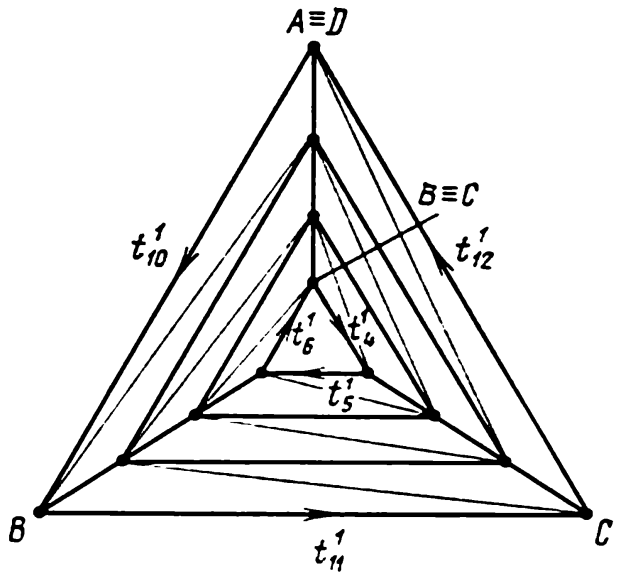

Fig. 11

Exercice 4. Démontrer que pour la variété K^3_1, qui est le produit topologique du cercle et de la sphère de dimension 2, les groupes $\Delta^1 K^3_1$ et $\Delta^2 K^3_1$ sont des groupes cycliques infinis, par conséquent les nombres de Betti de dimension un et deux sont égaux à un.

Comme modèle de cette variété on peut considérer le solide limité par deux sphères concentriques S^2 et s^2, identifiées entre elles; alors, pour générateur du groupe $\Delta^2 K^3_1$ on peut prendre la classe d'homologie du cycle z^2_0 obtenu de la manière suivante: choisissons une triangulation d'une sphère quelconque S^2_0 de même centre que les sphères S^2, s^2, orientons tous les triangles de cette triangulation dans un sens quelconque, par exemple contre les aiguilles d'une montre, et posons la valeur de la chaîne z^2_0 égale à 1 sur chacun de ces triangles orientés.

On peut prendre pour générateur du groupe $\Delta^1 K^3_1$ la classe d'homologie du cycle de dimension un, obtenu après identification des sphères S^2 et s^2 à partir du segment du rayon de la sphère S^2 situé entre les deux sphères.

§ 2. Subdivision des triangulations

Le but de ce paragraphe est de démontrer que les groupes d'homologie d'une triangulation quelconque K_α sont isomorphes aux groupes correspondants de sa subdivision baricentrique K_β **). Le schéma de la démonstration est le suivant. Nous construisons d'abord, pour chaque triangulation K_α et chaque subdivision K_β de cette

*) Le tore de dimension trois est le produit topologique de trois cercles. Il peut être obtenu en identifiant les faces opposées d'un cube.

**) Voir [AP], p. 207.

triangulation, l'agrandissement naturel $\boxed{K_\alpha}$ de la triangulation K_β isomorphe à la triangulation K_α (en ce sens que l'agrandissement $\boxed{K_\alpha}$ est un complexe cellulaire isomorphe au complexe cellulaire de tous les simplexes orientés de la triangulation K_α), de sorte que les groupes d'homologie de la triangulation K_α sont isomorphes aux groupes d'homologie correspondants du complexe cellulaire $\boxed{K_\alpha}$. Ensuite, pour toute subdivision baricentrique K_β de la triangulation K_α, nous démontrerons que l'agrandissement naturel $\boxed{K_\alpha}$ de la triangulation K_β est simple, et donc les groupes d'homologie du complexe K_β sont isomorphes aux groupes d'homologie de l'agrandissement $\boxed{K_\alpha}$ et, par conséquent, aux groupes d'homologie de la triangulation K_α.

Construisons donc, pour chaque subdivision K_β de la triangulation K_α, un agrandissement « naturel » $\boxed{K_\alpha}$ du complexe K_β. Cette construction est effectivement « naturelle » : elle est complètement triviale. Pour chaque simplexe $T^p_{\alpha i} \in K_\alpha$ nous définissons la pseudo-variété ouverte $U^p_{\alpha i} = s^\alpha_\beta T_{\alpha i}$ comme étant le sous-complexe consistant de tous les simplexes $T_{\beta j} \in K_\beta$ situés sur le simplexe ouvert $T^p_{\alpha i}$, i.e. ayant ce simplexe pour support. Autrement dit, $U^p_{\alpha i}$ est la subdivision dans K_β du simplexe ouvert $T^p_{\alpha i}$. Nous avons déjà vu au chapitre 1, § 7, que cette subdivision est effectivement une pseudo-variété ouverte (de la même dimension que le simplexe $T^p_{\alpha i}$).

Avant de démontrer que la pseudo-variété $U^p_{\alpha i}$ est orientable, définissons la subdivision $s^\alpha_{\beta j} t^p_{\alpha i}$ d'un simplexe orienté $t^p_{\alpha i}$ en posant $s^\alpha_\beta t^p_{\alpha i} = \sum t^p_{\beta j}$, où $t^p_{\beta j}$ sont tous les simplexes $| t^p_{\beta j} | \in K_\beta$ situés sur $| t^p_{\alpha i} | \in K_\alpha$ et orientés conformément à l'orientation choisie $t^p_{\alpha i}$ du simplexe $| t^p_{\alpha i} |$. On définit tout aussi naturellement la subdivision $s^\alpha_\beta x^p_\alpha$ de toute chaîne $x^p_\alpha = \sum_i a_i t^p_{\alpha i}$ en posant

$$s^\alpha_\beta x^p_\alpha = \sum_i a_i s^\alpha_\beta t^p_{\alpha i}.$$

Il est évident que l'opérateur s^α_β est une application isomorphe du groupe $L^p K_\alpha$ dans $L^p K_\beta$. Nous montrerons qu'elle est permutable avec l'opérateur Δ, i.e. que

$$\Delta s^\alpha_\beta x^p_\alpha = s^\alpha_\beta \Delta x^p_\alpha. \tag{1}$$

Pour cela il suffit de démontrer la formule

$$\Delta s^\alpha_\beta t^p_{\alpha i} = s^\alpha_\beta \Delta t^p_{\alpha i} \tag{1_0}$$

de laquelle on déduit immédiatement que $s_\beta^\alpha t_{\alpha i}^p = u_{\alpha i}^p$ est un cycle de dimension p et donc une orientation de la pseudo-variété ouverte $U_{\alpha i}^p$ de dimension p. Passons à la démonstration de la formule (1_0).

Ainsi, si pour tous les simplexes $T_{\alpha i}^p \in K_\alpha$ nous avons choisi une fois pour toutes les orientations $t_{\alpha i}^p$, désignons, pour tous les simplexes $T_{\beta j}^p$ du complexe K_β situés sur un certain simplexe $T_{\alpha i}^p$ de la même dimension p, par $t_{\beta j}^p$ l'orientation identique à celle de $t_{\alpha i}^p$ (dans l'espace R^p qui contient le simplexe $T_{\alpha i}^p$). Pour le simplexe $T_{\beta j}^p \in K_\beta$ de dimension $p < r$, dont le support dans K_α est le simplexe $T_{\alpha h}^r$, l'orientation $t_{\beta j}^p$ est choisie de manière quelconque.

Pour démontrer la formule (1_0), il faut établir que les chaînes $\Delta s_\beta^\alpha t_\alpha^p$ et $s_\beta^\alpha \Delta t_\alpha^p$ du complexe K_β prennent la même valeur sur chaque simplexe t_β^{p-1} du complexe K_β si t_β^{p-1} est situé à l'intérieur ou sur la frontière du simplexe $T_\alpha^p \in K_\alpha$. Considérons d'abord le cas où le simplexe t_β^{p-1} se trouve à l'intérieur du simplexe T_α^p et montrons qu'alors les deux chaînes $\Delta s_\beta^\alpha t_\alpha^p$ et $s_\beta^\alpha \Delta t_\alpha^p$ sont nulles sur t_β^{p-1}. Ceci implique déjà que $u_{\alpha i}^p = s_\beta^\alpha t_{\alpha i}^p$ est un cycle de la pseudo-variété $U_{\alpha i}^p$ et, par conséquent, une orientation de cette pseudo-variété. Puisque l'égalité $(s_\beta^\alpha \Delta t_\alpha^p,\ t_\beta^{p-1}) = 0$ pour $|\, t_\beta^{p-1} \,| \subset |\, t_\alpha^p \,|$ est évidente, il ne reste qu'à démontrer l'égalité $(\Delta s_\beta^\alpha t_\alpha^p,\ t_\beta^{p-1}) = 0$ (pour $|\, t_\beta^{p-1} | \subset T_\alpha^p$).

Sous nos hypothèses, il existe exactement deux simplexes $|\, t_{\beta h}^p \,|$ et $|\, t_{\beta k}^p \,|$ du complexe K_β qui ont pour face commune le simplexe $|\, t_\beta^{p-1} \,|$, et ils sont situés de part et d'autre de ce simplexe. Puisque les orientations $t_{\beta h}^p$ et $t_{\beta k}^p$ sont les mêmes par hypothèse, on a

$$(t_{\beta h}^p : t_\beta^{p-1}) = -(t_{\beta k}^p : t_\beta^{p-1}),$$

d'où

$$(\Delta s_\beta^\alpha t_\alpha^p,\ t_\beta^{p-1}) = (t_{\beta h}^p : t_\beta^{p-1}) + (t_{\beta k}^p : t_\beta^{p-1}) = 0.$$

Continuons la démonstration de la formule (1_0) : supposons que le simplexe $|\, t_\beta^{p-1} \,|$ est situé sur la frontière du simplexe T_α^p, plus précisément, possède pour support la face T_α^{p-1} de ce simplexe. Il s'agit de démontrer que

$$(s_\beta^\alpha \Delta t_\alpha^p,\ t_\beta^{p-1}) = (\Delta s_\beta^\alpha t_\alpha^p,\ t_\beta^{p-1}).$$

Mais, par définition de l'opérateur s_β^α, on a

$$(s_\beta^\alpha \Delta t_\alpha^p,\ t_\beta^{p-1}) = (\Delta t_\alpha^p,\ t_\alpha^{p-1}) = (t_\alpha^p : t_\alpha^{p-1}).$$

D'autre part, puisque $|t_\beta^{p-1}|$ est la face propre d'un seul simplexe $|t_\beta^p| \subseteq T_\alpha^p$ et t_β^p figure dans $s_\beta^\alpha t_\alpha^p$ avec le coefficient 1, on a

$$(\Delta s_\beta^\alpha t_\alpha^p,\ t_\beta^{p-1}) = (\Delta t_\beta^p,\ t_\beta^{p-1}) = (t_\beta^p : t_\beta^{p-1}).$$

Il reste donc à démontrer que

$$(t_\alpha^p : t_\alpha^{p-1}) = (t_\beta^p : t_\beta^{p-1}).$$

Désignons par e_α (resp. par e_β) le sommet du simplexe T_α^p (resp. du T_β^p), opposé à la face T_α^{p-1} (resp. à la face T_β^{p-1}), et soit $(t_\alpha^p : t_\alpha^{p-1}) = \varepsilon$, de sorte que

$$t_\alpha^p = \varepsilon\,(e_\alpha t_\alpha^{p-1}).$$

Il nous faut démontrer que $(t_\beta^p : t_\beta^{p-1}) = \varepsilon$, i.e. $t_\beta^p = \varepsilon\,(e_\beta t_\beta^{p-1})$. Pour cela il suffit d'établir que les orientations $(e_\alpha t_\alpha^{p-1})$ et $(e_\beta t_\beta^{p-1})$ sont les mêmes. En effet, ceci étant démontré, nous aurons la relation $(t_\beta^p : t_\beta^{p-1}) = \varepsilon = (t_\alpha^p : t_\alpha^{p-1})$, l'orientation $\varepsilon\,(e_\beta t_\beta^{p-1})$ coïncide avec t_β^p étant la même que $\varepsilon\,(e_\alpha t_\alpha^{p-1}) = t_\alpha^p$. Démontrons donc que les orientations $(e_\alpha t_\alpha^{p-1})$ et $(e_\beta t_\beta^{p-1})$ coïncident. Avant tout, puisque les orientations t_α^{p-1} et t_β^{p-1} sont identiques, il en est de même des orientations $(e_\alpha t_\alpha^{p-1})$ et $(e_\alpha t_\beta^{p-1})$. Mais les points e_α et e_β sont situés dans l'espace R^p (qui contient le simplexe T_α^p) d'un même côté de l'hyperplan R^{p-1} qui contient les simplexes T_α^{p-1} et T_β^{p-1}, et les orientations $(e_\alpha t_\beta^{p-1})$ et $(e_\beta t_\beta^{p-1})$ sont identiques, de même que les orientations $(e_\alpha t_\alpha^{p-1})$ et $(e_\beta t_\beta^{p-1})$.

Ainsi nous avons démontré notre assertion et en même temps les formules (1) et (1_0).

Désignons les coefficients d'incidence du complexe K_α par ε_{ik}^p :

$$(t_{\alpha i}^p : t_{\alpha k}^{p-1}) = \varepsilon_{ik}^p.$$

Alors on déduit facilement de la formule (1) la formule fondamentale

$$\Delta u_{\alpha i}^p = \sum_k \varepsilon_{ik}^p u_{\alpha k}^{p-1}. \tag{2}$$

En effet, on obtient à partir de (1)

$$\Delta u_{\alpha i}^p = \Delta s_\beta^\alpha t_{\alpha i}^p = s_\beta^\alpha \Delta t_{\alpha i}^p = s_\beta^\alpha \sum_k \varepsilon_{ik}^p t_{\alpha k}^{p-1} = \sum_k \varepsilon_{ik}^p s_\beta^\alpha t_{\alpha k}^{p-1} = \sum_k \varepsilon_{ik}^p u_{\alpha k}^{p-1},$$

ce qui démontre la formule (2). Mais cette formule affirme justement que les coefficients d'incidence $(u_{\alpha i}^p : u_{\alpha k}^{p-1})$, dans l'agrandissement algébrique $\boxed{K_\alpha}$, sont égaux aux coefficients d'incidence $\varepsilon_{ik}^p =$

$= (t^p_{\alpha i} : t^{p-1}_{\alpha k})$ dans le complexe K_α, i.e. que l'agrandissement $\boxed{K_\alpha}$ est isomorphe à la triangulation K_α et par conséquent possède les mêmes groupes d'homologie. La première partie de notre programme a été réalisée. Il reste la seconde : il faut démontrer que *dans le cas où K_β est la subdivision baricentrique de la triangulation K_α*, l'agrandissement naturel $\boxed{K_\alpha}$ est simple, d'où l'on déduira que les groupes d'homologie de la triangulation K_α sont isomorphes aux groupes d'homologie correspondants de la subdivision baricentrique K_β de la triangulation K_α.

Ainsi, soit K_β la subdivision baricentrique de la triangulation K_α. Démontrons que chaque pseudo-variété $U^p_{\alpha i} = s^\alpha_\beta T^p_{\alpha i}$ est une pseudo-variété simple.

La démonstration sera effectuée par récurrence sur la dimension du complexe K_α. Pour un complexe de dimension nulle K_α l'assertion est évidente. Supposons qu'elle a été démontrée pour toutes les triangulations K_α dont la dimension est inférieure ou égale à n. Dans ce cas, nous pouvons supposer démontrée, pour tous ces complexes, l'existence d'un isomorphisme entre les groupes d'homologie du complexe K_α et ceux de sa subdivision baricentrique K_β.

Soit maintenant K_α un complexe de dimension $n + 1$ et K_β sa subdivision baricentrique. Démontrons que chaque cycle z^r de dimension r, $0 \leqslant r < p \leqslant n + 1$, de la pseudo-variété $U^p_{\alpha i} = s^\alpha_\beta T^p_{\alpha i}$ est homologue à zéro dans $U^p_{\alpha i}$. Ceci est évident pour $r = 0$, puisque le sommet unique du complexe $U^p_{\alpha i}$ est le centre du simplexe $T^p_{\alpha i}$ et ce sommet est la frontière de chaque simplexe de dimension 1 (vecteur) du complexe $U^p_{\alpha i}$ aboutissant à ce sommet. Ainsi, supposons $r > 0$. Désignons par $S^{p-1}_{\alpha i}$ le complexe qui consiste de toutes les faces propres du simplexe $T^p_{\alpha i}$ et par $\Theta^{p-1}_{\alpha i}$, sa subdivision baricentrique. Alors la pseudo-variété $U^p_{\alpha i}$ est un cône ouvert sur le complexe $\Theta^{p-1}_{\alpha i}$, et chaque simplexe orienté de dimension r du complexe $U^p_{\alpha i}$ est un cône sur un certain simplexe orienté du complexe $\Theta^{p-1}_{\alpha i}$; faisant correspondre à chaque simplexe orienté $t^r = (ot^{r-1})$ du complexe $U^p_{\alpha i}$ le simplexe orienté $t^{r-1} = ft^r$ du complexe Θ^{p-1}, on vérifie facilement que f est un isomorphisme du groupe $L^r U^p_{\alpha i}$ sur le groupe $L^{r-1}\Theta^{p-1}$, qui satisfait à la condition *)

$$f\Delta x^r = -\Delta f x^r,$$

---

*) En effet, si $t^{r-1} = (e_1 e_2 \ldots e_r) = ft^r$, $t^r = (oe_1 e_2 \ldots e_r)$, en choisissant Δt^r dans $U^p_{\alpha i}$, nous aurons

$$\Delta t^r = -(oe_2 e_3 \ldots e_r) + (oe_1 e_3 \ldots e_r) - \ldots, \text{ etc.},$$

d'où

$$f\Delta t^r = -(e_2 e_3 \ldots e_r) + (e_1 e_3 \ldots e_r) - \ldots, \text{ etc.} = -\Delta f t^r.$$

d'où l'on déduit que f engendre un isomorphisme des groupes $Z^r U^p_{\alpha i}$ et $H^r U^p_{\alpha i}$ respectivement sur $Z^{r-1}\Theta^{p-1}_{\alpha i}$ et $H^{r-1}\Theta^{p-1}_{\alpha i}$ et donc un isomorphisme du groupe $\Delta^r U^p_{\alpha i}$ sur le groupe $\Delta^{r-1}\Theta^{p-1}_{\alpha i}$. Mais nous voyons que pour $r < p$ les groupes $\Delta^{r-1}S^{p-1}$ du complexe S^{p-1} sont nuls. En vue de l'hypothèse de récurrence, les groupes $\Delta^{r-1}\Theta^{p-1}_{\alpha i}$ et donc les groupes $\Delta^r U^p_{\alpha i}$ qui leur sont isomorphes sont nuls pour $r < p$, de sorte que chaque cycle de dimension r, $r < p$ du complexe $U^p_{\alpha i}$ est homologue à zéro dans ce complexe. La simplicité de l'agrandissement $\boxed{K_\alpha}$ est démontrée.

Ainsi nous avons démontré l'assertion fondamentale suivante (qui joue ici un rôle auxiliaire) :

Théorème 2. *Les groupes d'homologie de toute triangulation K_α sont isomorphes aux groupes correspondants de la subdivision baricentrique K_β de la triangulation K_α.*

Remarque 1. Le caractère fondamental du théorème 2 réside dans le fait qu'en se basant exclusivement sur ce théorème on peut démontrer, ce que nous ferons au § 5, le théorème fondamental de la théorie homologique des polyèdres, à savoir le théorème dit d'invariance des groupes de Betti : si K_α et K_β sont deux triangulations quelconques de deux polyèdres $\widetilde{K}_\alpha$ et $\widetilde{K}_\beta$ homéomorphes, alors les groupes d'homologie de la triangulation K_α sont isomorphes aux groupes correspondants de la triangulation K_β (en particulier, cette assertion est vérifiée si K_β est une subdivision quelconque de la triangulation K_α).

On déduit ensuite de ce théorème pour toute triangulation K d'un polyèdre convexe K que tous les groupes $\Delta^r K$ pour $r \neq 0$ sont nuls, d'où l'on déduit à son tour la

Remarque 2. Si K est une triangulation d'un polyèdre convexe de dimension n et U, la pseudo-variété ouverte qui consiste de tous les simplexes de la triangulation K situés à l'intérieur du polyèdre $\widetilde{K}$, alors pour $0 < r < n$ chaque cycle de dimension r de la pseudo-variété U y est homologue à zéro (ceci découle de la remarque 5, p. 33, chapitre 1).

Soit K_α une partition du polyèdre $\widetilde{K}_\alpha$ en polyèdres convexes ouverts U^p_i disjoints,

$$0 \leqslant p \leqslant n.$$

Soit K_β une triangulation du polyèdre $\widetilde{K}_\alpha$ qui est une subdivision de la partition K_α (pour laquelle chaque polyèdre U^p_i devient une pseudo-variété ouverte, dont une orientation quelconque sera désignée par u^p_i). Alors le complexe cellulaire qui consiste de tous les $\pm u^p_i$ possède des groupes d'homologie isomorphes aux groupes correspondants de la triangulation K_β.

§ 3. Déplacement canonique σ_α^β: $K_\beta \to K_\alpha$ d'une subdivision K_β de la triangulation K_α

Soient K_α et K_β des triangulations, K_β étant soumise à K_α (i.e. chaque simplexe $T_\beta \in K_\beta$ est situé sur un certain simplexe $T_\alpha \in K_\alpha$, appelé « support »). En particulier, chaque sommet de la triangulation K_β est situé sur son support, un simplexe bien défini de la triangulation K_α. En faisant correspondre à chaque sommet e_β de la triangulation K_β un certain sommet du support de e_β, on obtient une application simpliciale σ_α^β de la triangulation K_β dans la triangulation K_α; on l'appelle *déplacement canonique* de la triangulation K_β dans la triangulation K_α *). Puisqu'on peut faire correspondre au sommet e_β un sommet quelconque de son support dans K_α, il existe en général beaucoup de déplacements canoniques σ_α^β de la triangulation K_β dans la triangulation K_α. Chaque déplacement canonique $\sigma_\alpha^\beta : K_\beta \to K_\alpha$ (étant une application simpliciale) engendre un homomorphisme de même nom σ_α^β: $L^r K_\beta \to L^r K_\alpha$, permutable avec l'opérateur Δ, et définit donc un homomorphisme σ_α^β: $\Delta^r K_\beta \to \Delta^r K_\alpha$. L'homomorphisme des groupes $L^r K_\alpha$ et $L^r K_\beta$, dual au déplacement canonique σ_α^β donné, sera désigné par $\bar{\sigma}_\alpha^\beta$.

Supposons maintenant que la triangulation K_β est une subdivision de la triangulation K_α. Alors, comme nous avons vu au paragraphe précédent, un opérateur de subdivision, à savoir l'isomorphisme s_β^α: $L^r K_\alpha \to L^r K_\beta$ du groupe $L^r K_\alpha$ dans $L^r K_\beta$, est défini. Il est permutable avec l'opérateur Δ et engendre donc un homomorphisme s_β^α: $\Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta$. Nous avons démontré au paragraphe précédent que l'homomorphisme s_β^α: $\Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta$ (de toute façon dans le cas où K_β est une subdivision baricentrique du complexe K_α) est un isomorphisme sur le groupe $\Delta^r K_\beta$. Il découle de la remarque faite à la fin du paragraphe précédent que cette assertion reste vraie pour toute subdivision K_β de la triangulation K_α **).

L'assertion qui y est démontrée, affirmant que l'homomorphisme s_β^α: $\Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta$ est une application sur tout le groupe $\Delta^r K_\beta$, peut être énoncée de la manière suivante.

(A) *Chaque cycle z_β^r du complexe K_β est homologue dans K_β à un certain cycle de la forme $s_\beta^\alpha z_\alpha^r$.*

Quant à l'assertion selon laquelle l'homomorphisme s_β^α: $\Delta^r K_\alpha \to$ $\to \Delta^r K_\beta$ est un monomorphisme, elle peut être énoncée ainsi:

---

*) L'image $\sigma_\alpha^\beta T_\beta$ d'un simplexe T_β sera une face propre ou impropre du support $T_\alpha \in K_\alpha$ du simplexe T_β.

**) En vertu du théorème fondamental du § 5, comme il a été déjà remarqué.

(B) *Si* $z^r_\beta = s^\alpha_\beta z^r_\alpha \sim 0$ *dans* K_β, *alors* $z^r_\alpha \sim 0$ *dans* K_α (comparez avec les assertions respectives (A) et (B) du § 1 de ce chapitre).

Démontrons maintenant la proposition suivante.

Théorème 3. *L'homomorphisme* $\sigma^\beta_\alpha : \Delta^r K_\beta \to \Delta^r K_\alpha$ *est un isomorphisme du groupe* $\Delta^r K_\beta$ *sur le groupe* $\Delta^r K_\alpha$, *inverse à l'isomorphisme* $s^\alpha_\beta : \Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta$.

Avant de démontrer ce théorème établissons deux lemmes remarquables, intéressants en soi.

Lemme 1. *Si* K_β *est une subdivision de la triangulation* K_α, *alors, pour toute chaîne* x^r_α *du complexe* K_α *et tout déplacement canonique* σ^β_α *du complexe* K_β *dans le complexe* K_α, *on a la formule suivante de Sperner-Alexander*: $\sigma^\beta_\alpha s^\alpha_\beta x^r_\alpha = x^r_\alpha$.

La démonstration sera effectuée par récurrence. Pour les chaînes de dimension nulle, la formule de Sperner-Alexander est évidemment vérifiée. Supposons qu'elle a été démontrée pour toutes les chaînes de dimension $n - 1$ et démontrons-la pour une chaîne x^n_α de dimension n. Il est évident qu'il suffit d'étudier le cas où la chaîne x^n_α consiste d'un seul simplexe de dimension n: $x^n_\alpha = t^n_\alpha$.

Plus exactement, il faut démontrer la formule

$$\sigma^\beta_\alpha s^\alpha_\beta t^n_\alpha = t^n_\alpha. \tag{1}$$

La démonstration est basée sur le

Lemme 2 (lemme d'Alexander). *Soit* f *une application simpliciale d'un certain complexe* X *dans le complexe* $[T^n]$ *constitué du simplexe* T^n *de dimension* n *et de toutes ses faces*; *soit* y^n *une chaîne de dimension* n *dans* X *dont la frontière est appliquée par* f *sur le cycle* Δt^n (*où* t^n *est une orientation du simplexe* T^n):

$$f\Delta y^n = \Delta t^n.$$

Alors

$$fy^n = t^n.$$

En effet, l'image par f de la chaîne y^n est une chaîne de dimension n du complexe $[T^n]$. Mais toutes les chaînes de dimension n de ce complexe sont de la forme ct^n, puisqu'il n'y a qu'un seul simplexe de dimension n dans $[T^n]$. Ainsi $fy^n = ct^n$. Mais alors $f\Delta y^n = c\Delta t^n$; or nous savons que $f\Delta y^n = \Delta t^n$, donc $e = 1$ et le lemme 2 est démontré.

Vérifions maintenant la formule (1). Le déplacement canonique σ^β_α applique la chaîne $y^n = s^\alpha_\beta t^n_\alpha$ dans $[T^n]$. Par hypothèse de récurrence, la formule de Sperner-Alexander est vérifiée pour $n - 1$ et $\Delta s^\alpha_\beta t^n_\alpha = s^\alpha_\beta \Delta t^n_\alpha$, de sorte que

$$\sigma^\beta_\alpha \Delta s^\alpha_\beta t^n_\alpha = \sigma^\beta_\alpha s^\alpha_\beta \Delta t^n_\alpha = \Delta t^n_\alpha;$$

mais alors, en vertu du lemme 2,

$$\sigma_\alpha^\beta s_\beta^\alpha t_\alpha^n = t_\alpha^n.$$

Remarque 1. Nous avons démontré la formule de Sperner-Alexander pour les chaînes entières. La démonstration pour les autres groupes de coefficients, en particulier pour les chaînes modulo 2, est tout à fait analogue. Dans le cas modulo 2 la formule (1) a la signification suivante.

Soit une subdivision K_β d'un simplexe fermé $\overline{T}^n$ (et donc du complexe $[T^n]$). Faisant correspondre à chaque sommet de la subdivision K_β un certain sommet de son support dans $[T^n]$, on obtient une application simpliciale du complexe K_β (le déplacement canonique) qui applique sur T^n un nombre impair de simplexes de dimension n du complexe K_β.

C'est cette assertion bien connue que l'on appelle lemme de Sperner *).

On déduit facilement des faits démontrés le

Corollaire. *Pour le déplacement canonique σ_α^β de la subdivision $K_\beta = s_\beta^\alpha K_\alpha$, la triangulation K_β a pour image la triangulation K_α toute entière:*

$$\sigma_\alpha^\beta s_\beta^\alpha K_\alpha = K_\alpha.$$

Démontrons maintenant le théorème 3.

1°. L'homomorphisme $\sigma_\alpha^\beta : \Delta^r K_\beta \to \Delta^r K_\alpha$ est un monomorphisme. Pour le vérifier, il suffit de démontrer l'assertion suivante:

Si le cycle $\sigma_\alpha^\beta z_\beta^r$ est homologue à zéro dans K_α, alors $z_\beta^r \sim 0$ dans K_β.

Mais nous savons (assertion (A)) que le cycle z_β^r est homologue dans K_β à un certain cycle de la forme $s_\beta^\alpha z_\alpha^r$. Alors $\sigma_\alpha^\beta z_\beta^r \sim \sigma_\alpha^\beta s_\beta^\alpha z_\alpha^r$ dans K_α, i.e. d'après le lemme de Sperner-Alexander

$$\sigma_\alpha^\beta z_\beta^r \sim z_\alpha^r \text{ dans } K_\alpha.$$

Par hypothèse, $\sigma_\alpha^\beta z_\beta^r \sim 0$ dans K_α, donc $z_\alpha^r \sim 0$ dans K_α et $s_\beta^\alpha z_\alpha^r \sim 0$ dans K_β, i.e. $z_\beta^r \sim 0$ dans K_β. L'assertion 1° est démontrée.

2°. Le monomorphisme $\sigma_\alpha^\beta : \Delta^r K_\beta \to \Delta^r K_\alpha$ est une application sur tout le groupe $\Delta^r K_\alpha$, donc un isomorphisme.

3°. Les isomorphismes $\sigma_\alpha^\beta : \Delta^r K_\beta \to \Delta^r K_\alpha$ et $s_\beta^\alpha : \Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta$ sont inverses entre eux.

Les deux assertions 2° et 3° sont contenues dans la formule

$$\sigma_\alpha^\beta s_\beta^\alpha \zeta_\alpha^r = \zeta_\alpha^r,$$

*) On peut trouver une démonstration élémentaire du lemme de Sperner dans le livre AP, p. 213.

satisfaite pour tout élément ζ_α^r du groupe $\Delta^r K_\alpha$; mais cette formule découle directement du lemme 1. Les résultats obtenus peuvent être réunis dans l'énoncé suivant.

Théorème 3'. *Pour la subdivision K_β de la triangulation K_α deux opérateurs sont définis : l'opérateur de subdivision, i.e. l'isomorphisme s_β^α du groupe $L^r K_\alpha$ dans le groupe $L^r K_\beta$ et l'opérateur de déplacement canonique, i.e. l'homomorphisme σ_α^β du groupe $L^r K_\beta$ dans le groupe $L^r K_\alpha$. Ces opérateurs sont liés par la formule de Sperner-Alexander ; permutables avec l'opérateur Δ, ils induisent respectivement les homomorphismes $s_\beta^\alpha : \Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta$ et $\sigma_\alpha^\beta : \Delta^r K_\beta \to \Delta^r K_\alpha$ qui sont des isomorphismes réciproques des groupes $\Delta^r K_\alpha$ et $\Delta^r K_\beta$.*

§ 4. Applications simpliciales combinatoirement proches ; prismes *)

1. Applications combinatoirement proches. Deux applications simpliciales f_0 et f_1 du complexe X dans le complexe Y s'appellent *combinatoirement proches* si, quel que soit le simplexe T_X du complexe X, il existe un simplexe T_Y tel que les simplexes $f_0 T_X$ et $f_1 T_X$ sont des faces propres ou impropres du simplexe T_Y.

L'importance de la notion d'applications combinatoirement proches, qui sera mise en évidence seulement au chapitre 3, apparaît déjà dans le fait que deux déplacements canoniques de la subdivision K_β d'une triangulation K_α dans cette triangulation K_α sont des applications combinatoirement proches.

Notre but consiste à démontrer la proposition suivante.

Théorème 4. *Deux applications combinatoirement proches quelconques f_0 et f_1 du complexe X dans le complexe Y engendrent un même homomorphisme des groupes $\Delta^r X$ dans les groupes $\Delta^r Y$ et un même homomorphisme dual des groupes $\nabla^r Y$ dans les groupes $\nabla^r X$.*

Pour la démonstration nous aurons besoin de la notion de prisme, dont nous donnerons maintenant la définition.

2. Prismes. Soit $|a_0 \ldots a_n|$ un simplexe donné avec un ordre fixe de ses sommets. Soit $|b_0 \ldots b_n|$ un deuxième exemplaire **) du simplexe $|a_0 \ldots a_n|$. Ces données déterminent un complexe complet (abstrait) Π qui consiste de tous les simplexes de dimension

*) Ce paragraphe est de caractère auxiliaire ; on peut l'omettre en première lecture, quitte à y revenir en rencontrant les renvois correspondants.

**) Si le simplexe $|a_0 \ldots a_n|$ est situé dans l'espace R^n, en plongeant R^n dans R^{n+1} sous forme de plan $x_{n+1} = 0$, on peut prendre les points $b_0, \ldots, b_n$ dans le plan $x_{n+1} = 1$ au-dessus des points $a_0, \ldots, a_n$, de sorte que le simplexe $|b_0 \ldots b_n|$ est congruent au simplexe $|a_0 \ldots a_n|$ et s'en obtient par une translation de vecteur $n = \{0, 0, \ldots, 0, 1\}$.

$n+1$ de la forme

$$| b_0 b_1 \ldots b_i a_i \ldots a_n |, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

et de toutes leurs faces. Ce complexe s'appelle *prisme* Π *de bases* (*inférieure*) $| a_0 \ldots a_n |$ *et* (*supérieure*) $| b_0 \ldots b_n |$ ou, plus brièvement, prisme sur le simplexe $| a_0 \ldots a_n |$.

Définissons dans le prisme Π une chaîne de dimension $n+1$ *appelée prisme sur le simplexe orienté* $t^n = (a_0 \ldots a_n)$ et désignée par Πt^n:

$$\Pi t^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (b_0 \ldots b_i a_i \ldots a_n).$$

Supposons donné un complexe $X = X_0$ dont tous les sommets sont numérotés dans un certain ordre $a_1, a_2, \ldots, a_s$; alors les sommets de chacun de ses simplexes seront numérotés dans un certain ordre; choisissons un deuxième exemplaire X_1 du complexe X de sommets $b_1, \ldots, b_s$ et définissons le *prisme sur le complexe* X, plus précisément le prisme Π de base inférieure X_0 et de base supérieure X_1 comme étant le complexe obtenu en prenant la réunion de tous les prismes sur les simplexes du complexe X_0. Dans le complexe Π un prisme Πt^n est défini sur chaque simplexe orienté t^n, ainsi qu'un prisme Πx^n sur chaque chaîne $x_0^n \equiv x^n = \sum c_k t_k^n$ du complexe X_0:

$$\Pi x^n = \sum c_k \Pi t_k^n.$$

On démontre qu'alors *)

$$\Delta \Pi x^n = x_0^n - x_1^n - \Pi \Delta x_0^n, \tag{1}$$

où x_1^n est la même chaîne x^n, mais située sur la base supérieure du prisme Π. En particulier, si x^n est un cycle z^n du complexe X, on a

$$\Delta \Pi z^n = z_0^n - z_1^n. \tag{2}$$

R e m a r q u e. L'orientation $(-1)^i (b_0 \ldots b_i a_i a_{i+1} \ldots a_n)$ du simplexe $| b_0 \ldots b_i a_i \ldots a_n |$ est dite *accordée* avec l'orientation $(a_0 \ldots a_n)$ du simplexe $| a_0 \ldots a_n |$. Soit t_0^r un simplexe orienté quelconque du complexe X_0 et t_0^{r-1} une de ses faces. Si l'orientation t^{r+1} d'un simplexe de $\Pi | t_0^r |$ est accordée avec l'orientation t_0^r, l'orientation t^r d'un simplexe de $\Pi | t_0^{r-1} |$ est accordée avec l'orientation t_0^{r-1} et le simplexe $| t^r |$ est une face du simplexe $| t^{r+1} |$, alors la formule (1) découle de la formule

$$(t^{r+1} : t^r) = -(t_0^r : t_0^{r-1}). \tag{1_0}$$

---

*) Il suffit de vérifier l'égalité (1) dans le cas $x^n = t^n$ d'une chaîne consistant d'un seul simplexe; cette vérification s'effectue à l'aide d'un calcul assez long, mais tout à fait automatique (voir par exemple [TC], chap. 7, n° 9.3).

3. Démonstration du théorème fondamental (énoncé au début du paragraphe). Sa première assertion peut être exprimée de la manière suivante :

Théorème 5_Δ. *Si f_0 et f_1 sont deux applications combinatoirement proches du complexe X dans le complexe Y et z est un cycle quelconque du complexe X, alors les cycles f_0z et f_1z sont homologues entre eux dans Y.*

Démonstration. Considérons deux exemplaires X_0 et X_1 du complexe X et les exemplaires correspondants z_0 et z_1 du cycle z et appliquons X_0 par f_0 et X_1 par f_1 dans le complexe Y. Ayant numéroté tous les sommets du complexe X, et donc des complexes X_0 et X_1, considérons le prisme Π de bases X_0 et X_1. Définies respectivement sur X_0 et X_1, les applications f_0 et f_1 qui sont combinatoirement proches, engendrent une application f du prisme Π sur le complexe Y ; l'image de la chaîne Πz_0 par l'application f est une chaîne y du complexe Y. Puisque $fz_0 = f_0z$, $fz_1 = f_1z$ et $\Delta\Pi z_0 = z_0 - z_1$, on a

$$\Delta y = \Delta f\Pi z_0 = f\Delta\Pi z_0 = fz_0 - fz_1 = f_0z - f_1z,$$

i.e. $f_0z - f_1z \sim 0$ dans Y, ce qu'il fallait démontrer.

Démontrons la deuxième assertion de notre théorème qui peut être énoncée comme suit.

Théorème 5_∇. *Si f_0 et f_1 sont des applications simpliciales combinatoirement proches du complexe X dans le complexe Y et z^r est un certain cocycle du complexe Y, alors nous avons, pour les homomorphismes duaux $\overline{f}_0$ et $\overline{f}_1$ (du groupe $Z^r_\nabla Y$ dans $Z^r_\nabla X$), la relation $\overline{f}_0z^r \sim \overline{f}_1z^r$ dans X.*

Démonstration. Considérons à nouveau l'application f du prisme Π de bases X_0 et X_1 dans le complexe Y et construisons comme suit la chaîne x^{r-1} du complexe X vérifiant

$$\nabla x^{r-1} = \overline{f}_0z^r - \overline{f}_1z^r. \tag{3}$$

Soit t^{r-1} un simplexe orienté de dimension $r-1$ du complexe X. L'orientation t^{r-1} engendre une orientation accordée de tous les simplexes de dimension r du prisme $\Pi \mid t^{r-1} \mid \subseteq \Pi$ construit sur ce simplexe. La somme $\sum\limits_{t^r \in \Pi \mid t^{r-1} \mid} (\overline{f}z^r, t^r)$ des valeurs du cocycle $\overline{f}z^r$ sur tous ces simplexes de dimension r sera posée par définition égale à la valeur de la chaîne x^{r-1} sur t_0^{r-1}. Pour démontrer la formule (3) il faut établir que la chaîne $\overline{f}_0z^r - f_1z^r - \nabla x^{r-1}$ est nulle sur chaque simplexe t_0^r de dimension r de la triangulation X, i.e.

$$(\overline{f}_0z^r, t_0^r) - (\overline{f}_1z^r, t_0^r) - \sum_{t^{r-1} < t_0^r} (x^{r-1}, t^{r-1})(t_0^r : t^{r-1}) = 0. \tag{4}$$

Pour s'en apercevoir, considérons tous les simplexes t^{r+1} de dimension $r+1$ du prisme $\Pi \mid t_0^r \mid$ accordés avec l'orientation t_0^r et calculons la somme sur tous les simplexes des expressions

$$(\nabla \bar{f} z^r,\ t^{r+1}) = \sum_{t^r < t^{r+1}} (\bar{f} z^r,\ t^r)(t^{r+1} : t^r)$$

dont chacune est nulle, puisque $\bar{f} z^r$ est un cocycle. En calculant la somme sur ces t^{r+1}, nous voyons que chaque simplexe « intérieur » t^r de dimension r du prisme $\Pi \mid t_0^r \mid$ y apparaît deux fois avec des signes contraires (ce qui découle, par exemple, de la formule (1)), de sorte qu'après simplification le second membre de la formule consiste, d'une part, de deux termes qui correspondent aux bases inférieure et supérieure du prisme $\Pi \mid t_0^r \mid$, i.e. des termes $(\bar{f}_0 z^r,\ t_0^r)$ et $-(\bar{f}_1 z^r,\ t_0^r)$ et, d'autre part, des termes qui correspondent aux simplexes t^r situés sur la « surface latérale » du prisme $\Pi \mid t_0^r \mid$, i.e. des termes $(\bar{f} z^r,\ t^r)(t^{r+1} : t^r)$, où $t^r \in \Pi \mid t^{r-1} \mid$ et t^{r-1} est une face du simplexe t_0^r. Ainsi

$$0 = (\bar{f}_0 z^r,\ t_0^r) - (\bar{f}_1 z^r,\ t_0^r) + \sum_{t^{r-1} < t_0^r} \Big(\sum_{t^r \in \Pi \mid t^{r-1} \mid} (\bar{f} z^r,\ t^r)(t^{r+1} : t^r) \Big),$$

où l'orientation $t^r \in \Pi \mid t^{r-1} \mid$ est accordée à l'orientation t^{r-1}. Il découle de la remarque du n° 2 que $(t^{r+1} : t^r) = -(t_0^r : t^{r-1})$ et par conséquent

$$\sum_{t^r \in \Pi \mid t^{r-1} \mid} (\bar{f} z^r,\ t^r)(t^{r+1} : t^r) =$$

$$= -(t_0^r : t^{r-1}) \sum_{t^r \in \Pi \mid t^{r-1} \mid} (\bar{f} z^r,\ t^r) = -(t_0^r : t^{r-1})(x^{r-1},\ t^{r-1}),$$

d'où l'on déduit l'égalité cherchée (4) et donc l'égalité (3).

§ 5. Groupes d'homologie des compacts (groupes de Brouwer-Vietoris) ; invariance des groupes d'homologie d'un polyèdre

1. Définition des ε-chaînes, des ε-cycles et des ε-homologies d'un compact; Δ_c-cycles véritables et convergents; groupes ΔX et $\Delta_c X$. Appelons *ε-simplexe* de dimension r du compact X tout ensemble de diamètre $<\varepsilon$ qui consiste de $r+1$ points de ce compact ; il est alors naturel d'appeler *ε-complexe* (fini) du compact X tout ensemble (fini) de ses ε-simplexes (qui satisfait, s'il le faut, à la condition d'être complet). Il est naturel d'appeler *étoile* d'un sommet donné d'un ε-complexe l'ensemble de tous les simplexes qui contiennent ce sommet.

Appelons *ε-chaîne* du compact X toute chaîne finie d'un ε-complexe quelconque du compact X. Autrement dit, une ε-chaîne de dimension r du compact X est une forme linéaire finie qui s'écrit $x^r = \sum c_i t_i^r$, où les t_i^r sont des ε-simplexes orientés.

On appellera *support* $|x^r|$ d'une ε-chaîne x^r le ε-complexe complet qui consiste de tous les simplexes apparaissant dans la chaîne x avec des coefficients non nuls et de toutes les faces de ces simplexes.

On définit la frontière de la ε-chaîne $x^r = \sum c_i t_i^r$ de la manière usuelle, i.e. en posant $\Delta x^r = \sum c_i \Delta t_i^r$. Si $\Delta x^r = 0$, alors la ε-chaîne x^r s'appelle *ε-cycle*; le ε-cycle donné du compact s'appelle *ε'-homologue à zéro* (*ε'-frontière*) dans X s'il est une frontière d'une certaine ε'-chaîne de ce compact. Deux ε-cycles z_1 et z_2 sont appelés *homologues* entre eux (notation $z_1 \underset{\varepsilon'}{\sim} z_2$) si leur différence est ε'-homologue à zéro dans X.

Après toutes ces constructions auxiliaires *) passons aux notions fondamentales de cycles véritables de Δ_c-cycles et de Δ_c-homologie. La suite

$$z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots) \tag{1}$$

de ε_k-cycles de dimension r, $\varepsilon_k \to 0$, du compact X s'appelle *cycle véritable* du compact X; le cycle (1) s'appelle *convergent* ou Δ_c-cycle si pour chaque ε tous les cycles de cette suite, à partir d'un certain numéro, sont ε-homologues entre eux dans le compact X.

Un cycle véritable (1) est une *frontière* ou est *homologue à zéro* dans X si pour chaque $\varepsilon > 0$ tous les z_k^r, en commençant par un certain numéro, sont ε-homologues à zéro dans X.

Les cycles véritables, en particulier les Δ_c-cycles, peuvent être ajoutés membre à membre : si $z^r = \{z_k^r\}$, $z'^r = \{z_k'^r\}$ alors $z^r + z'^r = \{z_k^r + z_k'^r\}$; relativement à cette opération, l'ensemble de tous les cycles véritables de dimension r (respectivement de tous les cycles convergents ou Δ_c-cycles du compact X) est un groupe $Z^r X$ (respectivement $Z_c^r X$); il contient le sous-groupe $H^r X$ (respectivement $H_c^r X$) des cycles frontières (convergents). On a les groupes $\Delta^r X = Z^r X - H^r X$ et $\Delta_c^r X = Z_c^r X - H_c^r X$; le dernier s'appelle *$\Delta_c$-groupe de dimension r du compact X ou groupe de Brouwer-Vietoris* de ce compact (relativement au groupe de coefficients donné).

2. Homomorphisme du groupe $\Delta_c X$ dans $\Delta_c Y$ **) engendré par l'application continue $f : X \to Y$ d'un compact; invariance topologique des groupes $\Delta_c X$. Soit f une application continue du compact X dans le compact Y, $\varepsilon > 0$, et $\eta(f, \varepsilon)$ le module de continuité de la

*) Que l'on peut effectuer non seulement pour les compacts, mais aussi pour les espaces métriques quelconques.

**) L'homomorphisme du groupe ΔX dans ΔY se définit d'une manière analogue.

fonction f, i.e.

$$\eta(f, \varepsilon) = \sup_{\rho(x, x') < \varepsilon} \rho(fx, fx')$$

(la borne supérieure est choisie pour l'ensemble de tous les couples (x, x') de points de l'espace X pour lesquels $\rho(x, x') < \varepsilon$).

Puisque l'application $f: X \to Y$ est uniformément continue, on a $\eta(f, \varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Il en découle immédiatement que:

Si

$$z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots)$$

est un cycle véritable (convergent) du compact X, la suite

$$(fz_1^r, fz_2^r, \ldots, fz_k^r, \ldots)$$

est un cycle véritable (convergent) du compact Y, qui sera désigné par fz^r et appelé *image* du cycle z^r par l'application f.

Dans ce cas, si $z^r \sim 0$ dans X, on a $fz^r \sim 0$ dans Y, de sorte que l'application f du groupe Z^rX (Z_c^rX) de tous les cycles véritables (convergents) de dimension r du compact X envoie le sous-groupe H^rX (H_c^rX) de tous les cycles homologues à zéro dans X dans le groupe H^rY (H_c^rY) des cycles (convergents) homologues à zéro dans le compact Y. Par conséquent, toute application continue f du compact X dans le compact Y induit un homomorphisme (que nous désignerons toujours par f) du groupe Δ^rX dans le groupe Δ^rY, et en même temps un homomorphisme du groupe Δ_c^rX dans le groupe Δ_c^rY.

Si f est une application topologique du compact X sur le compact Y, alors l'homomorphisme du groupe Z_c^rX sur le groupe Z_c^rY qu'elle induit est évidemment bijectif, i.e. c'est un isomorphisme du groupe Z_c^rX sur le groupe Z_c^rY qui applique le sous-groupe H_c^rX sur le sous-groupe H_c^rY et par conséquent le groupe Δ_c^rX sur Δ_c^rY. Ainsi, les compacts homéomorphes X et Y ont des groupes Δ_c^rX et Δ_c^rY isomorphes: les groupes de Brouwer-Vietoris d'un compact sont ses invariants topologiques. Tout ceci est évidemment vrai pour tout groupe de coefficients; la situation est analogue pour les groupes Δ^rX.

R e m a r q u e 1. Il faut souligner que non seulement les groupes Δ_c^rX, mais aussi les groupes Z_c^rX et H_c^rX sont des invariants topologiques du compact X: nous avons vu qu'une application topologique f du compact X sur le compact Y induit un isomorphisme du groupe Z_c^rX sur Z_c^rY et de son sous-groupe H_c^rX sur H_c^rY; c'est justement de cette invariance que nous avons déduit l'invariance topologique du groupe quotient $\Delta_c^rX = Z_c^rX - H_c^rX$. Ici le cas des compacts diffère considérablement du cas combinatoire d'un complexe K: ni les groupes Z^rK, ni les groupes H^rK ne possèdent de propriétés d'invariance analogues: les groupes Z^rK et Z^rK' de deux

triangulations distinctes K et K' d'un même polyèdre $X = \widetilde{K} = \widetilde{K}'$ ne sont isomorphes que dans des cas exceptionnels (par exemple, $Z^n K$ et $Z^n K'$ sont isomorphes lorsque K et K' sont deux triangulations isomorphes d'un polyèdre $\widetilde{K} = \widetilde{K}'$ de dimension n).

Comme nous l'avons déjà mentionné, notre but principal est la démonstration de la proposition suivante:

Théorème 6. *Les groupes d'homologie $\Delta^r K$ d'une triangulation quelconque K d'un polyèdre donné $X = \widetilde{K}$ sont isomorphes aux groupes $\Delta_c^r X$.*

En vue de l'invariance topologique des groupes $\Delta_c^r X$ que nous venons d'indiquer, le théorème 6 implique le

Corollaire (théorème d'invariance des groupes d'homologie des polyèdres): *si K et K' sont deux triangulations d'un même polyèdre, ou de deux polyèdres homéomorphes $X = \widetilde{K}$ et $X' = \widetilde{K}'$, alors les groupes $\Delta^r K$ et $\Delta^r K'$ sont isomorphes.*

3. Applications canoniques d'un η-complexe A du compact X sur le nerf N_ω de son recouvrement ω*). Avant de passer à la démonstration du théorème, introduisons la notion importante suivante.

Soient $\omega = \{O_1, \ldots, O_h\}$ un recouvrement ouvert du compact X et η un nombre positif suffisamment petit, à savoir si petit que 2η soit le nombre de Lebesgue du recouvrement ω. Une *application canonique d'un η-complexe A du compact X dans le nerf N_ω du recouvrement* ω est par définition l'application simpliciale $\sigma_\omega : A \to N_\omega$ qui fait correspondre à chaque sommet a_i du complexe A le sommet e_j du nerf N_ω correspondant à un élément $O_j \in \omega$ quelconque (mais bien défini) contenant l'étoile du sommet a_i dans le complexe A **). Il est évident qu'il existe plusieurs applications canoniques du complexe A dans le nerf N_ω, mais deux quelconques d'entre elles sont des applications combinatoirement proches du complexe A dans le complexe N_ω.

Remarque 2. Supposons que le compact X est un polyèdre $X = \widetilde{K}$, et K est sa triangulation. On sait alors que le complexe K est le nerf du recouvrement α formé par les étoiles principales de la triangulation K,

$$K = N_\alpha.$$

Supposons que le η-complexe $K_1 = N_\beta$ est subdivision de la triangulation K. On vérifie aisément que le déplacement canonique

*) Les notions principales relatives aux recouvrements telles que leurs nerfs et leur nombre de Lebesgue sont exposées dans [AP], pp. 66, 115, 203.

**) Comparer au livre [AP], chapitre 4, p. 242.

$\sigma_\beta^\alpha : K_1 \to K$, défini au § 3 (i.e. l'application simpliciale qui fait correspondre à chaque sommet du complexe K_1 un sommet quelconque de son support dans la triangulation K), est toujours une application canonique dans le sens que nous venons de définir.

On peut parler également d'une application canonique dans le nerf N_ω d'une η-chaîne quelconque x du compact X, en sous-entendant dans ce cas l'application canonique du η-complexe $|x|$.

On a le lemme suivant, somme toute évident.

Lemme. *Supposons que z et z' sont deux η-cycles du compact X, η-homologues entre eux. Si 2η est le nombre de Lebesgue du recouvrement $\omega = \{O_1, \ldots, O_h\}$, alors, quelles que soient les applications canoniques σ_ω et σ'_ω des cycles z et z' dans le nerf N_ω, les cycles $\sigma_\omega z$ et $\sigma'_\omega z'$ sont homologues entre eux dans N_ω.*

En effet, soit A un η-complexe quelconque de X tel que les cycles z et z' sont contenus dans A et y sont homologues entre eux (on peut choisir dans le rôle du complexe A, par exemple, $|x|$, où x est une η-chaîne de X quelconque, de frontière $\Delta x = z - z'$).

Considérons une application canonique quelconque $\sum_\omega$ du complexe A dans le nerf N_ω, soumise à la seule condition suivante : pour tout sommet $e \in A$ du complexe $|z|$ nous avons $\sum_\omega e = \sigma_\omega e$. Considérons d'autre part l'application canonique $\sum'_\omega : A \to N_\omega$, soumise à la condition suivante : pour tout sommet $e' \in |z'|$ nous avons $\sum'_\omega e' = \sigma'_\omega e'$. Les applications simpliciales $\sum_\omega$ et $\sum'_\omega$ du complexe A dans N_ω sont combinatoirement proches. Elles appliquent donc tout cycle (ou deux cycles homologues quelconques z et z') du complexe A dans des cycles homologues $\sum_\omega z$ et $\sum'_\omega z'$ du complexe N_ω. Mais $\sum_\omega z = \sigma_\omega z$ et $\sum'_\omega z' = \sigma'_\omega z'$, d'où découle notre assertion.

R e m a r q u e 3. Il découle évidemment de ce que nous venons de démontrer que tout η-cycle du compact X est envoyé par deux applications canoniques quelconques σ_ω et σ'_ω dans deux cycles homologues du nerf N_ω. Soit $z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots)$ un cycle convergent du compact X. Alors, quel que soit η, tous les z_k, à partir d'un certain k, sont des η-cycles et sont η-homologues entre eux. Par conséquent, en effectuant sur tous les z_k^r, à partir d'un certain k, les applications canoniques dans le nerf N_ω, nous obtiendrons des cycles du nerf N_ω homologues entre eux. Ainsi nous avons défini l'opérateur d'application canonique $\sigma_\omega : Z_c^r X \to \Delta^r N_\omega$ qui fait correspondre à chaque cycle véritable z^r du compact X un élément bien défini $\sigma_\omega z^r$ du groupe $\Delta^r N_\omega$. Nous voyons, d'après les considérations précédentes, qu'à deux cycles convergents homologues entre eux z_1^r et z_2^r correspond un même élément $\sigma_\omega z_1^r = \sigma_\omega z_2^r$ du groupe $\Delta^r N_\omega$: nous avons un homomorphisme canonique σ_ω du groupe $\Delta_c^r X$ dans le groupe $\Delta^r N_\omega$.

Supposons que le compact $X = \widetilde{K}$ est un polyèdre et K sa triangulation quelconque, tandis que α est le recouvrement constitué des étoiles principales Oe de la triangulation K. Alors K est le nerf du recouvrement α, $K = N_\alpha$, et nous avons l'*homomorphisme canonique*

$$\sigma_\alpha : \Delta_c^r \widetilde{K} \to \Delta^r K. \tag{2}$$

Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir que cet homomorphisme est un isomorphisme sur le groupe $\Delta^r K$.

Pour démontrer cette dernière assertion, il faudra nous servir du lemme général suivant, qui a de nombreuses applications dans l'étude des homologies d'un compact.

4. Lemme sur le ε'-déplacement d'un ε-cycle. *Dans un compact X (et plus généralement dans un espace métrique quelconque) chaque ε'-déplacement* *) *(des sommets d'un ε-cycle) met en correspondance à cet ε-cycle un $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-cycle qui lui est $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-homologue.*

Nous obtiendrons ce résultat sous forme de cas particulier d'une formule importante.

Soit x une ε-chaîne de X à laquelle nous appliquons le ε'-déplacement de X. Cela signifie que nous faisons correspondre à chaque sommet du complexe $K = |x|$ un point $e' = Se \in X$ éloigné de ce sommet d'une distance inférieure à ε'. Alors chaque simplexe du complexe K, étant un ε-simplexe, aura pour image un certain $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-simplexe de X, de sorte que nous avons une application simpliciale S du complexe K dans un certain $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-complexe K' du compact X. Cette application simpliciale envoie la chaîne x^r du complexe K dans une chaîne Sx^r du complexe K'.

Supposons que les sommets de la chaîne x^r sont numérotés dans un ordre donné une fois pour toutes, et considérons le prisme Π sur le complexe K. Définissons de la manière suivante l'application S' de l'ensemble de tous les sommets du prisme Π dans l'espace X. Si e_i est un sommet de la base inférieure du prisme Π (i.e. le sommet du support de la chaîne x^r **)), nous posons alors $S'e_i = e_i$; tandis que si e_i' est un sommet de la base supérieure du prisme Π et e_i est le sommet correspondant de la base inférieure, nous posons $S'e_i' = Se_i$.

Si $|e_0' \ldots e_k' e_k \ldots e_r|$ est un simplexe du prisme Π, alors son image par l'application S' sera $|Se_0 \ldots Se_k e_k \ldots e_r|$ et son diamètre sera le plus grand des nombres $\rho(e_i, e_j)$, $\rho(e_i, Se_j)$, $\rho(Se_i, Se_j)$, où e_i et e_j sont deux sommets quelconques d'un même simplexe du complexe K. Mais chacun de ces nombres est inférieur

---

*) Les nombres ε et ε' sont des réels positifs quelconques.

**) Nous dirons souvent « sommet (simplexe) de la chaîne x » à la place de « sommet (simplexe) du support de la chaîne donnée x ».

à $\varepsilon + 2\varepsilon'$, de sorte que chaque simplexe du prisme Π a pour image par S' un certain $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-simplexe de l'espace X.

D'autre part, le prisme Πx^r (sur la chaîne x^r) du complexe Π a pour image par l'application simpliciale S' une certaine $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-chaîne qui sera désignée par $\Pi_S x^r$ et qui est un prisme ayant pour bases la chaîne x^r et son ε'-déplacement Sx^r, ou plus brièvement c'est un *prisme de déplacement de la chaîne* x^r.

De la même manière, le prisme $\Pi\Delta x^r$ sur Δx^r (dans le complexe Π) est appliqué par S' sur le prisme $\Pi_S\Delta x^r$ déterminé par Δx^r et $S\Delta x^r$.

Cette application simpliciale S' transforme la relation (1), § 4, p. 111, dans

$$\Delta\Pi_S x^r = x^r - Sx^r - \Pi_S\Delta x^r.$$

C'est justement la formule importante que nous avons mentionnée ci-dessus. En particulier, si x^r est un ε-cycle, alors $\Pi_S\Delta x^r = 0$ et nous avons

$$\Delta\Pi_S x^r = x^r - Sx^r.$$

Puisque $\Pi_S x^r$ est une $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-chaîne, nous obtenons une $(\varepsilon + 2\varepsilon')$-homologie

$$x^r \underset{\varepsilon+2\varepsilon'}{\sim} Sx^r$$

qu'il fallait établir.

5. **Vérification de l'isomorphisme $\Delta_c^r\widetilde{K} = \Delta^r K$.** Passons enfin à la démonstration du fait que dans le cas d'un polyèdre $X = \widetilde{K}$ l'homomorphisme canonique (2) est un isomorphisme sur le groupe $\Delta^r K$. Montrons d'abord que l'homomorphisme σ_α applique le groupe $\Delta_c^r X$ sur le groupe $\Delta^r K$.

Désignons la k-ième subdivision barycentrique de la triangulation K par K_k et considérons un cycle quelconque z_0^r du complexe K et ses subdivisions successives z_k^r dans les complexes K_k. Nous obtenons une suite

$$(3) \qquad (z_0^r, z_1^r, \ldots, z_k^r, \ldots).$$

Puisque le déplacement canonique du complexe K_{k+1} dans K_k (voir § 3) applique le cycle z_{k+1}^r dans z_k^r et puisque ce déplacement réalise une ε_k-homologie avec $\varepsilon_k \to 0$, alors (3) est un Δ_c-cycle du compact X. L'application canonique (2) dans la triangulation K fait correspondre à la classe d'homologie du Δ_c-cycle (3) la classe d'homologie du cycle z_0^r, ce qui démontre que σ_α est une surjection du groupe $\Delta_c^r X$ sur $\Delta^r K$.

Démontrons que l'homomorphisme (2) du groupe $\Delta_c^r X$ sur $\Delta^r K$ est injectif. Supposons donné un Δ_c-cycle

$$(4) \qquad z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots)$$

pour lequel on sait que $\sigma_\alpha z^r = 0$. Il faut en déduire que $z^r \sim 0$ dans X, i.e. que pour tout ε tous les z_k^r à partir d'un certain k sont ε-homologues à zéro dans X. Ainsi, supposons que ε est donné. Choisissons le nombre de Lebesgue $3\eta < \varepsilon$ du recouvrement α et prenons h si grand que les diamètres de toutes les étoiles de la triangulation K_h soient plus petits que h. Choisissons ensuite le nombre de Lebesgue $\eta_h < \eta$ du recouvrement α_h et conservons dans (4) seulement ceux des z_k^r qui sont des η_h-cycles η_h-homologues entre eux dans X.

Choisissons parmi eux un certain z_k^r et considérons l'application canonique $\sigma_h : |z_k^r| \to K_h$. Cette application est un η-déplacement dans X, et il découle donc du lemme que

$$z_k^r \underset{3\eta}{\sim} \sigma_h z_k^r. \tag{5}$$

Le cycle $\sigma_h z_k^r$ est un cycle de la triangulation K_h obtenue en effectuant h fois la subdivision barycentrique de la triangulation K; il découle donc du théorème 3 (§ 3) que $\sigma_h z_k^r$ est homologue dans K à la subdivision $s_h z_\alpha^r$ d'un certain cycle z_α^r du complexe K:

$$\sigma_h z_k^r \sim s_h z_\alpha^r \text{ dans } K_h. \tag{6}$$

Puisque K_h est un η-complexe, il découle de (5) et (6)

$$z_k^r \underset{3\eta}{\sim} \sigma_h z_k^r \underset{\eta}{\sim} s_h z_\alpha^r,$$

et donc

$$z_k^r \underset{3\eta}{\sim} s_h z_\alpha^r. \tag{7}$$

Soit x^{r+1} une 3η-chaîne de X de frontière

$$\Delta x^{r+1} = z_k^r - s_h z_\alpha^r.$$

En considérant l'application canonique σ_α du 3η-complexe $|x^{r+1}|$ (dans le complexe K), on obtient

$$\Delta \sigma_\alpha x^{r+1} = \sigma_\alpha z_k^r - \sigma_\alpha s_h z_\alpha^r,$$

i.e.

$$\sigma_\alpha z_k^r \sim \sigma_\alpha s_h z_\alpha^r \text{ dans } K. \tag{8}$$

Mais d'après la remarque 1 et la formule (1) (§ 3) on a

$$\sigma_\alpha s_h z_\alpha^r = z_\alpha^r,$$

de sorte que l'homologie (8) se récrit sous la forme

$$\sigma_\alpha z_k^r \sim z_\alpha^r \text{ dans } K. \tag{9}$$

Par hypothèse, $\sigma_\alpha z_k^r \sim 0$ dans K et donc $z_\alpha^r \sim 0$ dans K, et par conséquent

$$s_h z_\alpha^r \sim 0 \text{ dans } K_h.$$

Puisque K_h est un η-complexe, on a

$$s_h z_\alpha^r \underset{\eta}{\sim} 0 \text{ dans } X,$$

et donc, d'après (7), on a $z_k^r \underset{3\eta}{\sim} 0$ dans X, et a fortiori $z_k^r \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ dans X (pour tous les k suffisamment grands). Le théorème 6 est démontré.

§ 6. Cycles et homologies relatives (cycles et homologies modulo F)

Soit K un complexe simplicial complet, G un sous-complexe ouvert de K et $F = K \setminus G$ le sous-complexe fermé complémentaire. Nous avons déjà vu que l'on peut envisager les cycles et les homologies dans K et obtenir ainsi le groupe $\Delta^r G$. Néanmoins, on peut obtenir les groupes isomorphes aux groupes $\Delta^r G$ d'une manière différente. Appelons *cycle du complexe K modulo F, ou cycle relatif à F*, toute chaîne du complexe K dont la frontière est contenue par F.

Remarque. On suppose alors que deux cycles modulo F sont égaux s'ils coïncident sur chaque simplexe de G *)

Nous dirons que le cycle z (modulo F) est *homologue à zéro* dans K (modulo F) s'il existe une chaîne x du complexe K dont la frontière dans K est de la forme

$$\Delta x = z + y,$$

où y est une chaîne contenue dans F.

Le groupe quotient du groupe de tous les cycles modulo F de dimension r du complexe K par le sous-groupe des cycles homologues à zéro (modulo F) s'appelle *Δ-groupe de dimension r du complexe K (modulo F)*; il sera désigné par Δ^r (K, mod F). On voit aisément que les groupes Δ^r (K, mod F) et $\Delta^r G$ sont isomorphes **).

Toutes ces notions peuvent être définies dans le cas des ensembles ouverts d'un compact X.

Soit Γ un ouvert du compact X; désignons par Φ le fermé complémentaire $\Phi = X \setminus \Gamma$.

Nous dirons qu'un ε-simplexe du compact X est situé dans Φ lorsque tous ses sommets sont des points de l'ensemble Φ. Une chaîne du compact X est située dans Φ (ou Φ est support

*) Ainsi, un cycle ou, plus généralement, une chaîne modulo F est une classe de toutes les chaînes du complexe K qui coïncident sur G. Par conséquent, en effectuant les calculs avec ces chaînes, nous pouvons ignorer les simplexes de F.

**) Nous avons ici deux points de vue différents: le premier, admis jusqu'ici, consiste à envisager G comme un complexe distinct; le deuxième—à considérer, pour l'étude des propriétés homologiques du sous-complexe ouvert $G \subseteq K$, seulement les chaînes du complexe K. Ce dernier point de vue nous amène aux cycles et aux homologies modulo F.

de cette chaîne) si tous ses simplexes sont situés dans Φ. Une chaîne du compact X s'appelle *ε-cycle* (mod Φ) si elle est une ε-chaîne dont la frontière est située dans Φ; un ε-cycle z (mod Φ) est dit ε'-homologue à zéro (mod Φ) s'il existe une ε'-chaîne x dans X dont la frontière est de la forme

$$\Delta x = z + y,$$

où y est situé dans Φ.

Un cycle véritable (respectivement un Δ_c-cycle) de X (mod Φ) est par définition une suite

$$z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots), \tag{1}$$

où les z_k^r sont des ε_k-cycles (mod Φ), $\varepsilon_k \to 0$, et dans le cas d un Δ_c-cycle, on stipule que pour tout $\varepsilon > 0$ tous les z_k^r (à partir d'un certain k) sont ε-homologues entre eux dans X, mod Φ.

Un cycle véritable (respectivement un Δ_c-cycle) (mod Φ) (1) est dit homologue à zéro dans X, mod Φ, si pour tout $\varepsilon > 0$ tous les z_k^r (à partir d'un certain k) sont ε-homologues à zéro dans X, mod Φ.

On effectue la somme de Δ_c-cycles (mod Φ) de la même manière que celle des Δ_c-cycles usuels, i.e. membre à membre. Les Δ_c-cycles de dimension r (mod Φ) forment alors un groupe Z_c^r (X, mod Φ) qui contient le sous-groupe H_c^r (X, mod Φ) des cycles homologues à zéro dans X, mod Φ; le groupe quotient Z_c^r (X, mod Φ) — H_c^r (X, mod Φ) s'appelle Δ_c^r-groupe de dimension r du compact X, mod Φ, et sera désigné par Δ_c^r (X, mod Φ). Le groupe des coefficients peut être quelconque.

§ 7. Cycles à coefficients variables ; théorème de convergence

1. Cycles à coefficients variables; cycles exponentiels. En généralisant la notion de cycle véritable, on peut obtenir la notion de cycle à coefficients variables, qui aura des applications importantes à la théorie homologique de la dimension (au chapitre 4).

Nous appellerons *cycle à coefficients variables* du compact X *) la suite

$$z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots),$$

où z_k^r est un δ_k-cycle modulo m_k (i.e. à groupe de coefficients I_{m_k}) dans X et $\delta_k \to 0$.

Ici les nombres m_k dépendent bien entendu de k.

---

*) Nous nous servirons également par la suite des *cycles relatifs à coefficients variables*; le lecteur donnera sans difficulté les définitions correspondantes (comme au § 6).

En particulier, si tous les m_k sont des puissances d'un même entier naturel $s \geqslant 2$, $m_k = s^{\nu_k}$, alors le cycle z^r est appelé cycle *exponentiel* et le nombre s, sa *dominante*.

Nous dirons que le cycle z^r à coefficients variables est *homologue à zéro* dans X si

$$z_k^r \underset{\varepsilon_k}{\sim} 0, \ \varepsilon_k \to 0, \ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

i.e. s'il existe dans X des ε_k-chaînes x_k^{r+1}, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\varepsilon_k \to 0$ (respectivement à groupes de coefficients I_{m_k}) ayant pour frontières les cycles $\Delta x_k^{r+1} = z_k^r$.

La considération des cycles à coefficients variables et en particulier des cycles exponentiels permet dans certains cas d'approfondir l'étude des propriétés dimensionnelles des compacts (voir par exemple les travaux de M. Bokstein et V. Boltianski). Il faut toutefois comprendre que les cycles à coefficients variables se réduisent facilement aux cycles véritables pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$. En effet, supposons que dans la suite z^r nous avons

$$z_k^r = \sum_i a_i^{(k)} t_i^r,$$

où les coefficients $a_i^{(k)}$ sont des classes de nombres entiers modulo m_k. En prenant dans chaque classe $a_i^{(k)}$ le plus petit entier non négatif $a_i'^{(k)}$, posons $a_i''^{(k)} = \frac{a_i'^{(k)}}{m_k}$ et considérons l'élément $\bar{a}_i^{(k)}$ du groupe $\mathfrak{R}_1$ (i.e. la classe des nombres rationnels équivalents entre eux modulo 1) qui contient le nombre $a_i''^{(k)}$. Alors, comme on voit facilement, $\sum \bar{a}_i^{(k)} t_i^r$ est un δ_k-cycle (pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$) que nous désignerons par $\bar{z}_k^r$, tandis que

$$\bar{z}^r = (\bar{z}_1^r, \bar{z}_2^r, \ldots, \bar{z}_k^r, \ldots)$$

est un cycle véritable du compact X (à groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$) que nous appellerons cycle *associé* au cycle z^r à coefficients variables.

La notion de convergence pour les cycles à coefficients variables n'apparaît pas immédiatement (quoiqu'une notion analogue peut être définie). Néanmoins, le cycle véritable, pour un groupe de coefficients « constant », peut être convergent, et ceci est parfois très important. On peut généraliser cette notion aux cycles convergents — au moins pour les groupes de coefficients les plus importants à savoir I_m, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, R, $\varkappa$, en se servant du théorème suivant, qui a de nombreuses applications.

2. Théorème de convergence. Théorème 7. *Soient X un compact, Φ un ensemble fermé de X (éventuellement vide) et ε un nombre positif donné. Soit $\mathfrak{A}$ un des groupes I_m, $m = 2, 3, 4, \ldots$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, R ou $\varkappa$.*

Il existe alors un $\sigma_\varepsilon > 0$ *tel que tout* σ_ε*-cycle* $z^r_{\sigma_\varepsilon}$ *du compact* X mod Φ *pour le groupe de coefficients* $\mathfrak{A}$ *est* ε*-homologue dans* X mod Φ *à un certain cycle convergent* (mod Φ):

$$z^r = (z^r_1,\ z^r_2,\ \ldots,\ z^r_k,\ \ldots)$$

pour le même groupe de coefficients, dans ce sens que pour tout K *on a*

$$z^r_{\sigma_\varepsilon} \underset{\varepsilon}{\sim} z^r_k \quad \textit{dans } X \bmod \Phi.$$

Commençons la démonstration du théorème par l'assertion suivante.

Théorème 8 (théorème de rapetissage). *Soit* $\mathfrak{A}$ *un des groupes* I_m, $m \geqslant 2$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, R *ou* $\varkappa$. *Supposons en outre que* X *est un compact et* Φ *un sous-ensemble fermé de* X. *Pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\sigma_\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout* $\delta > 0$, *tout* σ_ε*-cycle de* X mod Φ *sera* ε*-homologue dans* X mod Φ *à un certain* δ*-cycle.*

Pour simplifier les raisonnements qui suivent, nous entendrons par cycles et homologies les cycles et les homologies dans X mod Φ.

Démonstration du théorème de rapetissage. Envisageons tout d'abord un nombre positif η et un certain $\eta/3$-filet A de X (i.e. un sous-ensemble fini $A \subseteq X$ tel que pour chaque point a de X il existe un point de A à une distance inférieure à $\eta/3$ de a). Supposons que ce filet A satisfait à deux conditions suivantes:

1. Les points de A qui appartiennent à Φ forment un $\eta/3$-filet A' de Φ.
2. Les points de A situés dans $X \setminus \Phi$ (i.e. les points de l'ensemble $A \setminus A'$) forment un $\eta/3$-filet de $[X \setminus \Phi]$.

Un sous-ensemble de l'ensemble A sera considéré comme l'ensemble des sommets d'un simplexe si et seulement si son diamètre est $< \eta$. Nous obtenons ainsi un complexe $K_\eta(A)$ constitué par des η-simplexes. Puisque par la suite le choix du filet A n'est pas important, contrairement à celui du nombre η, nous écrirons simplement K_η à la place de $K_\eta(A)$. Les simplexes du complexe K_η dont tous les sommets appartiennent à Φ forment un sous-complexe K'_η du complexe K qui est un η-complexe de Φ.

Le support $|z|$ d'un $\eta/3$-cycle quelconque z, mod Φ, du compact X (pour un groupe de coefficients quelconque) peut être appliqué simplicialement sur un certain cycle mod K'_η du complexe K_η, en remplaçant chaque sommet du cycle z par un certain point de l'ensemble A situé à une distance inférieure à $\eta/3$ de ce sommet, de manière à faire correspondre aux points de A' (respectivement de $A \setminus A'$) les points de Φ (respectivement de $X \setminus \Phi$). Cette application sera appelée *projection* du complexe $|z|$ (resp. du cycle z) dans le complexe K_η.

Passons à la démonstration du théorème de rapetissage.

3. Groupes de coefficients I_m et $\mathfrak{R}$. Posons $\eta = \varepsilon$ et envisageons les complexes K_ε et K'_ε. Pour $\delta < \frac{\eta}{3}$, chaque δ-cycle mod Φ (pour le groupe de coefficients $\mathfrak{A} = I_m$, respectivement $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$) est ε-homologue à un certain cycle mod K' du complexe K_ε. Il en découle que pour $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ le nombre maximal des δ-cycles indépendants dans le sens de la ε-homologie est fini *). Désignons ce nombre par $p(\delta, \varepsilon)$. Puisque le nombre $p(\delta, \varepsilon)$ ne peut que décroître lorsque δ décroît, il existe un σ_ε tel que $p(\delta, \varepsilon) = p(\sigma_\varepsilon, \varepsilon)$ quel que soit $\delta < \sigma_\varepsilon$. Supposons maintenant que nous avons choisi un σ_ε-cycle z quelconque et un $\sigma < \sigma_\varepsilon$ quelconque. Choisissons des σ-cycles indépendants (respectivement différents dans le sens des ε-homologies **)) $z_1, \ldots, z_p$, où l'on a $p = p(\sigma, \varepsilon) = p(\sigma_\varepsilon, \varepsilon)$. Puisque les z_i sont de toute manière des σ_ε-cycles, et puisque aucun ensemble de $p + 1$ cycles ne peut être indépendant (respectivement constitué de cycles distincts deux à deux) dans le sens des ε-homologies, le cycle z doit être ε-homologue à une certaine combinaison linéaire des cycles $z_1, \ldots$ $\ldots, z_p$ (respectivement à un certain z_i), i.e. à un certain σ-cycle, de sorte que le théorème de rapetissage est démontré pour les groupes de coefficients $\mathfrak{R}$ et I_m.

4. Groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$. De même que pour les notions introduites au § 7 du chapitre 1 pour les complexes finis, nous appellerons maintenant tout δ-cycle z_1 relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, cycle du premier type si on peut l'obtenir à partir d'un cycle z pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$ en remplaçant les coefficients des simplexes du cycle z par les résidus modulo 1 correspondants. Nous écrivons alors $z_1 = \tau_1 z$. On déduit immédiatement du théorème de rapetissage, démontré pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$, la validité du

Lemme. *Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\sigma_\varepsilon > 0$ tel que chaque σ_ε-cycle du premier type est ε-homologue, pour tout $\sigma > 0$, à un certain σ-cycle (du premier type).*

En effet, supposons que $z_1 = \tau_1 z$ est un σ_ε-cycle du premier type (le nombre σ_ε étant défini de la même manière que ci-dessus pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$) et

$$z \underset{\varepsilon}{\sim} z' \text{ (pour } \mathfrak{R}).$$

---

*) Dans le cas où le groupe de coefficients est un groupe fini (en particulier, le groupe I_m), l'ensemble de toutes les chaînes (et a fortiori de tous les cycles) d'un complexe fini quelconque (en particulier, de K_ε) sera également un ensemble fini. Par conséquent, il existe un nombre p' maximal tel qu'il n'y a pas dans x plus de p' δ-cycles non ε-homologues entre eux. Dans le cas du groupe de coefficients I_m, ce nombre p' sera désigné par $p_m(\delta, \varepsilon)$.

**) I. e. non ε-homologues deux à deux.

Alors on a également $z_1 = \tau_1 z \underset{\varepsilon}{\sim} \tau_1 z'$ pour $\mathfrak{R}_1$, ce qui signifie (si l'on a choisi pour z un σ-cycle quelconque) que le lemme est démontré.

Nous pouvons maintenant terminer rapidement la démonstration du théorème de rapetissage pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$.

Supposons que le nombre ε est donné. Choisissons $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$ de sorte que chaque σ_1-cycle du premier type pour tout $\sigma < \sigma_1$ soit ε-homologue à un certain σ-cycle *). Considérons ensuite un $\sigma_1/3$-filet et construisons les complexes correspondants $K = K_{\sigma_1}$ et $K' = K'_{\sigma_1} \subseteq K$. Puisque chaque $\sigma_1/3$-cycle z de l'espace peut être projeté sur un certain cycle du complexe K, nous avons l'homologie

$$z \underset{\sigma_1/3}{\sim} z_0, \tag{1}$$

où z_0 est un cycle du complexe K **). Ce cycle appartient à l'une des classes d'équivalence $v_1, \ldots, v_s$ (le nombre de ces classes est fini d'après le § 4 du chapitre 1) qu'engendre le sous-groupe des cycles du premier type dans le groupe de tous les cycles du complexe K. Il est alors évident que cette classe est bien définie par le cycle z; désignons l'ensemble de tous les cycles z pour lesquels $z_0 \in v_h$ par u_h, $h = 1, \ldots, s$.

Pour chaque $\delta \leqslant \frac{\sigma_1}{3}$ désignons par u_h^δ l'ensemble (éventuellement vide) des δ-cycles contenus dans u_h. Lorsque δ décroît, l'ensemble u_h^δ ne peut croître et, par conséquent, dans les cas où — pour un h fixe — l'ensemble u_h^δ est vide, il existe un nombre δ_h tel que les ensembles u_h^δ sont vides pour tous les $\delta \leqslant \delta_h$; le nombre h prend une quantité finie de valeurs, et il existe donc un $\sigma_2 \leqslant \frac{\sigma_1}{3}$ tel que si $1, 2, \ldots, s'$ sont ceux des indices $1, 2, \ldots, s$ pour lesquels les ensembles $u_1^{\sigma_\varepsilon}, \ldots, u_{s'}^{\sigma_\varepsilon}$ sont non vides, alors chacun des ensembles $u_1, \ldots, u_{s'}$ contient des σ-cycles pour tout σ suffisamment petit.

Supposons maintenant que z est un σ_ε-cycle appartenant par exemple à u_1. Pour chaque $\sigma < \sigma_\varepsilon$ aussi petit que l'on veut, il existe alors dans u_1 un certain σ-cycle z' qui satisfait à l'homologie

$$z' \underset{\sigma_1}{\sim} z'_0, \tag{1'}$$

où z'_0 appartient à la même classe v_1 que z_0 ; par conséquent, $z_0 - z'_0$ est un cycle du premier type et même un σ_1-cycle. Il existe alors, d'après le lemme, un σ-cycle z'' tel que

$$z_0 - z'_0 \underset{\varepsilon}{\sim} z''. \tag{2}$$

*) Le groupe de coefficients est toujours $\mathfrak{R}_1$.

**) Il s'agit ici de cycles et d'homologies de K mod K'. Il faut prendre en considération que les sommets de K' sont dans Φ.

Les relations (1), (1′) et (2) impliquent

$$z - z' \underset{\varepsilon}{\sim} z''$$

et donc

$$z \underset{\varepsilon}{\sim} z' + z''.$$

Puisque z' et z'' sont des σ-cycles, le théorème de rapetissage est démontré pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$.]

5. Groupes de coefficients R et $\varkappa$. Notre démonstration du théorème de rapetissage au numéro 3 pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$ était basée sur le seul fait que le nombre de cycles homologiquement indépendants d'un complexe fini à coefficients $\mathfrak{R}$ est fini. Mais pour le groupe R, comme nous l'avons vu au chapitre 1, p. 44, cela est également vrai.

La démonstration pour le groupe de coefficients $\varkappa$ répète mot pour mot la démonstration pour $\mathfrak{R}_1$, à condition de remplacer partout $\mathfrak{R}$ par R, $\mathfrak{R}_1$ par $\varkappa$ et la projection $\tau_1 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$ par la projection $\pi : R \to \varkappa$. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer la démonstration.

6. Démonstration du théorème de convergence. Passons enfin à la démonstration de l'assertion suivante.

Le théorème de convergence est valable pour tout groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ pour lequel on a le théorème de rapetissage.

Démonstration. Posons $\delta_0 = \varepsilon$, $\delta_1 = \sigma_\varepsilon$ (où σ_ε se définit comme dans le théorème de rapetissage) et choisissons des nombres positifs $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k, \ldots$ tels que pour chaque k nous ayons les inégalités

$$\delta_{k+1} < \frac{\delta_k}{2}, \quad \delta_{k+1} < \sigma_{\delta_k}$$

(σ se définit toujours comme dans le théorème de rapetissage). Désignons par z_1 un σ_ε-cycle choisi une fois pour toutes et supposons que le δ_k-cycle z_k est déjà construit. Il existe, d'après le théorème de rapetissage, un tel δ_{k+1}-cycle z_{k+1} qui est δ_{k-1}-homologue au cycle z_k. Ainsi, on a une suite

$$z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, \tag{3}$$

z_k étant un δ_k-cycle et $z_k \underset{\delta_{k-1}}{\sim} z_{k+1}$. Puisque $\delta_k \to 0$, la suite (3) est un cycle véritable convergent qui est ε-homologue au σ_ε-cycle z_1 donné.

Le théorème de convergence peut évidemment être énoncé sous la forme suivante, souvent commode pour les applications.

Théorème 7′. *Soit X un compact d'un espace euclidien ou hilbertien et Φ un sous-ensemble fermé de X. Soit OX un voisinage donné de l'ensemble X (dans l'espace euclidien ou hilbertien que l'on envisage).*

Il existe alors un nombre $\sigma > 0$ (*qui dépend du choix du voisinage* OX) *tel que* (*pour les groupes de coefficients* I_m, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, R, $\varkappa$) *chaque* σ-*cycle de* X mod Φ *est homologue dans* OX mod Φ *à un certain cycle* mod Φ *convergent dans* X.

Enfin, puisque chaque cycle polyédral*) situé dans un σ-voisinage de l'ensemble X, envisagé dans une subdivision suffisamment fine, peut être envoyé par un σ-déplacement (qui induit une homologie dans OX pour σ suffisamment petit) dans un 2σ-cycle du compact X, on a le

Corollaire 1 (du théorème de convergence). *Supposons que* X Φ, OX *ont la même signification que précédemment* (*le compact* X *étant un sous-ensemble fermé d'un espace euclidien* R^n). *Il existe alors un* $\sigma > 0$ *tel que chaque cycle polyédral* z, *situé dans un* σ-*voisinage de l'ensemble* X *dans* R^n, *est homologue dans* $O(X, \varepsilon)$ *à un certain cycle convergent*

$$\bar{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots)$$

du compact X (*i.e. pour chaque* z_k *il existe une chaîne* x_k *contenue dans* $O(X, \varepsilon)$ *telle que* $\Delta x_k = z - z_k$).

Corollaire 2 (du théorème de convergence). *Soit* $\mathfrak{A}$ *un groupe de coefficients pour lequel le théorème de convergence est valable. Supposons que le compact* X *possède un cycle relatif de dimension* n (*pour le groupe de coefficients* $\mathfrak{A}$)

$$z^n = (z_1^n, z_2^n, \ldots, z_k^n, \ldots), \text{ mod } \Phi,$$

tel que pour un certain $\varepsilon > 0$ *le cycle* z_k^n *n'est pas homologue à zéro dans* X mod Φ **) *pour tous les* k, *tandis que le cycle* $z_k^{n-1} \equiv \Delta z_k^n$ *n'est pas* ε-*homologue à zéro dans* Φ. *Alors* X *contient un cycle convergent relatif*

$$y^n = (y_1^n, y_2^n, \ldots, y_k^n, \ldots) \text{ mod } \Phi,$$

non ε-*homologue à zéro dans* X mod Φ, *pour lequel*

$$\Delta y^n \equiv (\Delta y_1^n, \Delta y_2^n, \ldots, \Delta y_k^n, \ldots)$$

est un cycle convergent de Φ, *non* ε-*homologue à zéro dans* Φ (*et évidemment homologue à zéro dans* X).

---

*) Une chaîne polyédrale x située dans un ensemble ouvert $\Gamma \subseteq R^n$ est une forme linéaire $x = \sum \alpha_i t_i^r$, où t_i^r sont des simplexes de Γ. Ici par simplexe de dimension r de Γ on veut dire l'ensemble contenant $r+1$ points et possédant une enveloppe convexe (le corps du simplexe) contenue dans Γ. L'orientation du simplexe t^r, de même que les notions telles que bord d'une chaîne, cycle, homologie, se définissent automatiquement. Remarquons que, contrairemen, aux chaînes de triangulations, les simplexes d'une chaîne polyédrale peuvent avoir des points communs.

**) Un tel cycle sera dit *complètement non homologue à zéro*. Remarquons que tout cycle convergent non homologue à zéro est automatiquement complètement non homologue à zéro.

En effet, choisissons d'après le théorème de convergence le nombre σ_ε pour ε donné. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que tous les z_k^n sont des σ_k-cycles. Alors, d'après le théorème de convergence, il existe un cycle relatif convergent

$$y^n = (y_1^n, y_2^n, \ldots, y_k^n, \ldots), \mod \Phi,$$

ε-homologue dans X mod Φ au cycle z_1^n et par conséquent non ε-homologue à zéro dans X mod Φ. La première assertion du corollaire est démontrée.

Démontrons maintenant que l'on a (pour tous les k)

$$\Delta y_k^n \underset{\varepsilon}{\sim} \Delta z_1^n \text{ dans } \Phi. \tag{4}$$

En effet, puisque $y_k^n \underset{\varepsilon}{\sim} z_1^n$ dans X mod Φ, il existe une ε-chaîne x_k^{n+1} dans X pour laquelle

$$\Delta x_k^{n+1} = y_k^n - z_1^n - u_k^n,$$

où u_k^n est une ε-chaîne située dans Φ. Alors

$$0 \equiv \Delta\Delta x_k^{n+1} = \Delta y_k^n - \Delta z_1^n - \Delta u_k^n,$$

i.e.

$$\Delta y_k^n - \Delta z_1^n = \Delta u_k^n,$$
$$\Delta y_k^n \underset{\varepsilon}{\sim} \Delta z_1^n \text{ dans } \Phi,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Puisque Δz_k^n n'est pas ε-homologue à zéro sur Φ (quel que soit k), il découle de notre démonstration que Δy_k^n n'est pas ε-homologue à zéro sur Φ (quel que soit k). Il reste à démontrer que

$$y^{n-1} \equiv (\Delta y_1^n, \Delta y_2^n, \ldots, \Delta y_k^n, \ldots)$$

est un cycle convergent sur Φ. Puisque y^n est un cycle relatif convergent sur X mod Φ, alors pour tout $\eta > 0$ et pour tous les entiers p et q suffisamment grands, il existe une η-chaîne $x_{p,q}^{n+1}$ sur X pour laquelle

$$\Delta x_{p,q}^{n+1} = y_p^n - y_q^n - u_{p,q}^n,$$

où $u_{p,q}^n$ est une η-chaîne de Φ. Alors, en raisonnant comme précédemment, nous obtenons

$$0 \equiv \Delta\Delta x_{p,q}^{n+1} = \Delta y_p^n - \Delta y_q^n - \Delta u_{p,q}^n,$$

i.e.

$$\Delta u_{p,q}^n = \Delta y_p^n - \Delta y_q^n,$$

ce qui démontre la convergence du cycle $y^{n-1} = \{\Delta y_k^n\}$ et donc le corollaire 2 du théorème de convergence.

§ 8. Classification homologique et homotopique des applications d'un compact dans un autre ; cycles continus

Les applications f_0 et f_1 du compact X dans le compact Y sont dites *homologues* entre elles (ou appartenant à une même classe d'homologie) relativement à un groupe de coefficients donné $\mathfrak{A}$ si ces deux applications induisent pour tout r le même homomorphisme $f = f_0 = f_1$ du groupe $\Delta_c^r(X, \mathfrak{A})$ dans le groupe $\Delta_c^r(Y, \mathfrak{A})$.

Deux applications homologues entre elles relativement à tout groupe de coefficients sont dites *complètement homologues*.

Nous donnerons maintenant, pour le cas des compacts, une démonstration élémentaire d'un théorème démontré dans un cas plus général au chapitre 6.

Théorème 9. *Deux applications f_0 et f_1 du compact X dans le compact Y, homotopes entre elles, sont complètement homologues entre elles.*

Soient f_0 et f_1 deux applications continues homotopes du compact X dans le compact Y. Pour démontrer qu'elles sont complètement homologues, il suffit d'établir que pour tout cycle véritable (relativement à un groupe de coefficients quelconque)

$$z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots)$$

du compact X les cycles véritables $f_0 z^r$ et $f_1 z^r$ sont homologues entre eux dans Y. Et pour cela il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un k_ε tel que, quel que soit $k > k_\varepsilon$, on a

$$f_0 z_k^r \underset{\varepsilon}{\sim} f_1 z_k^r.$$

Passons à la démonstration de cette dernière assertion. Soit f_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ une déformation *) de l'application f_0 dans f_1. Considérons un nombre positif δ si petit que les inégalités $\rho(p', p'') < \delta$ dans X et $|\theta' - \theta''| < \delta$ impliquent

$$\rho(f_{\theta'} p', f_{\theta''} p'') < 1/3\varepsilon \text{ dans } Y. \tag{1}$$

Choisissons maintenant un nombre k_δ si grand que pour $k > k_\delta$ le cycle z_k^r soit un δ-cycle.

Prenons $k > k_\delta$ et numérotons dans un ordre quelconque tous les sommets du complexe $|z_k^r|$; désignons-les par $a_1, \ldots, a_\mu$. Soit maintenant Π_k le prisme construit sur le complexe $|z_k^r|$. Divisons maintenant le segment $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ en segments égaux

$$(0, \theta_1), (\theta_1, \theta_2), \ldots, (\theta_{s-1}, 1)$$

*) Voir [AP], p. 228.

de longueur inférieure à δ ; ayant posé $\theta_0 = 0$ et $\theta_s = 1$, démontrons pour tout $i = 0, 1, \ldots, s-1$ la relation

$$f_{\theta_{i+1}} z_k^r - f_{\theta_i} z_k^r \underset{\varepsilon}{\sim} 0. \tag{2}$$

Considérons l'application g de l'ensemble des sommets a_ν et b_ν respectivement des bases inférieure et supérieure du prisme Π_k définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(a_\nu) = f_{\theta_i}(a_\nu), \\ g(b_\nu) = f_{\theta_{i+1}}(a_\nu), \end{cases} \qquad \nu = 1, \ldots, \mu.$$

On déduit facilement de la définition du nombre δ (condition (1)) que l'application g envoie chaque simplexe du complexe Π_k dans un ε-simplexe du compact Y ; si nous désignons par $\Pi\, z_k^r$ le prisme sur la chaîne z_k^r dans le complexe Π_k, alors l'application simpliciale g envoie la chaîne Πz_k^r dans une ε-chaîne $g\Pi z_k^r$ et l'on a

$$\Delta g \Pi z_k^r = f_{\theta_{i+1}} z_k^r - f_{\theta_i} z_k^r.$$

Ainsi la formule (2) est démontrée. Si l'on écrit les homologies (2) pour $i = 0, 1, \ldots, s-1$ et l'on ajoute, il résulte

$$f_1 z_k^r - f_0 z_k^r \underset{\varepsilon}{\sim} 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous venons de démontrer le théorème suivant.

Théorème 9′. *Si f_0 et f_1 sont des applications homotopes du compact X dans le compact Y, et z^r est un cycle véritable du compact X, alors les cycles véritables $f_0 z^r$ et $f_1 z^r$ sont homologues entre eux dans Y.*

Les notions suivantes se rapportent au résultat obtenu.

Supposons donnés le compact X, son sous-ensemble fermé Φ, le cycle véritable z du compact Φ, l'application continue f_0 du compact Φ dans un compact Y et une déformation f_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ de cette application. La famille des cycles véritables $f_\theta(z)$ du compact Y, ordonnée par le paramètre θ, s'appelle *déformation de l'application f_0 du cycle véritable z*. En particulier, si $X = Y$ et f_0 est l'application identique de Φ dans X, alors la déformation de l'application f_0 du cycle véritable z s'appelle simplement *déformation du cycle véritable z* dans le compact X. Le théorème 9′ implique le

Théorème 9″. *Tout cycle véritable z du compact X a pour image par une déformation dans le compact X un cycle qui lui est homologue dans X.*

Remarque fondamentale. Soient $X = \widetilde{K}$ un polyèdre, z_0 un cycle de la triangulation K ; désignons comme toujours par K_h la h-ième subdivision barycentrique du complexe K et par

$z_h = s_h z_0$ la subdivision correspondante du cycle z_0. Envisageant K_h comme complexe des sommets correspondants, nous obtenons le cycle convergent

$$z = (z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots)$$

du compact X identifions ce cycle véritable avec le cycle z_0.

Après cette convention, il est naturel d'appeler image fz_0 du cycle z_0 par l'application continue f du polyèdre $X = \tilde{K}$ dans le compact Y le cycle véritable

$$fz = (fz_0, fz_1, \ldots, fz_k, \ldots).$$

Dans le même ordre d'idées, introduisons la définition générale suivante.

Le cycle z_Y convergent du compact Y s'appelle *cycle continu* s'il peut être représenté sous la forme

$$z_Y = fz_K, \tag{3}$$

i.e. comme image continue d'un cycle z_K d'une certaine triangulation K par une application continue $f : \tilde{K} \to Y$. La représentation (3) s'appelle *représentation paramétrique* du cycle continu donné.

Tout ce qui a été dit se généralise sans difficulté au cas des cycles et des homologies relatives. Supposons donnée une application continue φ du compact X dans un compact Y qui applique un sous-ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ dans un sous-ensemble fermé $\Psi \subseteq Y$. De telles applications seront appelées brièvement (Φ, Ψ)-*applications* et s'écriront ainsi : $\varphi : X \to Y$, $\Phi \to \Psi$. Nous pouvons envisager également une (Φ, Ψ)-*déformation* de l'application $\varphi_0 : X \to Y$, $\Phi \to \Psi$ dans l'application $\varphi_1 : X \to Y$, $\Phi \to \Psi$ en entendant par cela une famille de (Φ, Ψ)-applications $\varphi_\theta : X \to Y$, $\Phi \to \Psi$ qui dépendent continûment du paramètre θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Les applications φ_0 et φ_1, liées par une (Φ, Ψ)-déformation, sont dites (Φ, Ψ)-*homotopes* entre elles.

Pour chaque (Φ, Ψ)-application $\varphi : X \to Y$, $\Phi \to \Psi$, tout cycle véritable (convergent) z_X^r dans X mod Φ est envoyé dans un cycle véritable (convergent) $z_Y^r = fz_X^r$ du compact Y mod Ψ et tout cycle homologue à zéro dans X mod Φ est envoyé dans un cycle homologue à zéro dans Y mod Ψ. Par conséquent, la (Φ, Ψ)-application φ donnée induit un homomorphisme de même nom du groupe Δ_c^r $(X, \text{mod } \Phi)$ dans le groupe Δ_c^r $(Y, \text{mod } \Psi)$; on peut donc toujours envisager l'équivalence homologue de deux (Φ,Ψ)-applications du compact X dans le compact Y. Une modification facile de la démonstration du théorème 9 permet d'obtenir le

Théorème 10. *Deux applications $\varphi_0 : X \to Y$, $\Phi \to \Psi$ et $\varphi_1 : X \to Y$, $\Phi \to \Psi$ homotopes entre elles du compact X dans le compact Y sont complètement homologues entre elles.*

§ 9. Approximation simpliciale d'une application continue d'un polyèdre dans un autre ; degré d'une application

1. Approximation simpliciale d'une application continue. Nous savons déjà qu'une application simpliciale f d'une triangulation K_α dans une triangulation K_β induit une application continue $\tilde{f}$ du polyèdre $\tilde{K}_\alpha$ dans le polyèdre $\tilde{K}_\beta$, définie sur chaque simplexe $T = |e_0 \ldots e_r| \in K_\alpha$ comme application affine de ce simplexe sur le simplexe fT engendrée par l'application $e_i \to fe_i$ de ses sommets. On dit que *l'application $\tilde{f}$ est l'application simpliciale du polyèdre $X = \tilde{K}_\alpha$ dans le polyèdre $Y = \tilde{K}_\beta$ induite par l'application simpliciale f de la triangulation K_α dans la triangulation K_β.*

Supposons donnée une certaine application continue φ du polyère X dans le polyèdre Y. Soit $\tilde{f}: X \to Y$ une application simpliciale induite par l'application simpliciale $f: K_\alpha \to K_\beta$ d'une triangulation K_α du polyèdre X dans une triangulation K_β du polyèdre Y.

L'application $\tilde{f}$ (et aussi l'application f) s'appelle *approximation simpliciale* de l'application φ relativement à la triangulation K_β du polyèdre Y si pour chaque point $x \in X$ le support *) T_β^{fx} du point fx dans le complexe K_β est une face propre ou impropre du support $T_\beta^{\varphi x}$ (dans le complexe K_β) du point φx.

Si K_α contient un sous-complexe **) Φ_α et K_β un sous-complexe Ψ_β, et l'application φ est une $(\tilde{\Phi}_\alpha, \tilde{\Psi}_\beta)$-application (i.e. $\varphi\tilde{\Phi}_\alpha \subseteq \tilde{\Psi}_\beta$), alors l'approximation simpliciale $f: K_\alpha \to K_\beta$ de l'application φ s'appelle $(\Phi_\alpha, \Psi_\beta)$— *approximation* lorsque $f\Phi_\alpha \subseteq \Psi_\beta$. Dans ce cas l'application $f: \Phi_\alpha \to \Psi_\beta$ est automatiquement une approximation simpliciale de l'application $\varphi: \tilde{\Phi}_\alpha \to \tilde{\Psi}_\beta$.

Théorème 11 (de Brouwer-Hopf). *Pour chaque application continue φ du polyèdre $X = \tilde{K}$ dans le polyèdre $\varphi\tilde{K}_\beta$ il existe une approximation simpliciale f de cette application ; f est alors une application simpliciale $f: K_\alpha \to K_\beta$, où K_β est une triangulation quelconque du polyèdre Y et K_α une subdivision suffisamment fine de la triangulation K du polyèdre X* ***). *Si les sous-complexes $\Phi_K \subseteq K$, $\Psi_\beta \subseteq K_\beta$ sont donnés et φ est une $(\Phi_K, \tilde{\Psi}_\beta)$-application, alors on peut choisir l'approximation $f: K_\alpha \to$*

---

*) Rappelons que le support d'un point dans un complexe est le seul simplexe qui contient ce point.

**) Sauf mention du contraire, tous les sous-complexes considérés dans ce paragraphe seront *fermés*.

***) Pour K_α on peut prendre toute triangulation du polyèdre X suffisamment fine.

$\to K_\beta$ *comme étant une* $(\Phi_\alpha, \Psi_\beta)$*-approximation, où* $\Phi_\alpha \subseteq K_\alpha$ *est la subdivision du sous-complexe* $\Phi_K \subseteq K$ *obtenue en passant de* K *à* K_α.

Avant de démontrer le théorème d'existence des approximations simpliciales, indiquons-en deux propriétés importantes.

P r e m i è r e p r o p r i é t é. Chaque approximaton simpliciale $\tilde{f}: \tilde{K}_\alpha \to \tilde{K}_\beta$ est homotope à l'application φ; de plus, si φ est une $(\tilde{\Phi}_\alpha, \tilde{\Psi}_\beta)$-application et f son $(\Phi_\alpha, \Psi_\beta)$-approximation, alors l'application $\tilde{f}$ est $(\tilde{\Phi}_\alpha, \tilde{\Psi}_\beta)$-homotope à l'application φ.

Cette propriété découle immédiatement du fait que pour chaque point $x \in X$ (respectivement $x \in \tilde{\Phi}_\alpha$) il existe un simplexe $T_\beta \in K_\beta$ (respectivement $T_\beta \in \Psi_\beta$) tel que les deux points φx et fx sont contenus dans l'adhérence du simplexe T_β.

On déduit également de cette assertion la

D e u x i è m e p r o p r i é t é. Si tous les simplexes du complexe K_β sont de diamètre inférieur à $\varepsilon > 0$, alors $\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon$ quel que soit $x \in X$.

Venons-en à la démonstration du théorème. Pour considérer directement le cas des $(\tilde{\Phi}_\alpha, \tilde{\Psi}_\beta)$-applications, démontrons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme. *Supposons donnés un polyèdre* $X = \tilde{K}$, *un polyèdre* $Y = \tilde{K}_\beta$, *des sous-complexes* $\Phi \subseteq K$, $\Psi_\beta \subseteq K_\beta$, *et une* $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}_\beta)$*-application continue* $\varphi: X \to Y$, $\tilde{\Phi} \to \tilde{\Psi}_\beta$. *Soit* K_α *une subdivision suffisamment fine de la triangulation* K *et* $\Phi_\alpha \subseteq K_\alpha$ *la subdivision correspondante du sous-complexe* $\Phi \subseteq K$. *Alors l'image* $\varphi\tilde{O}e_\alpha^i$ *de toute étoile* Oe_α^i *du sommet* e_α^i *du complexe* K_α *est contenue dans une certaine étoile* Oe_β^j *du complexe* K_β, *et l'on peut supposer que* e_β^j *est un sommet du complexe* Ψ_β, *à condition que* e_α^i *soit un sommet du complexe* Φ_α.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que V est le voisinage dans Y du polyèdre $\tilde{\Psi}_\beta$ obtenu en prenant la réunion de toutes les étoiles (relativement à K_β) des sommets du sous-complexe $\Psi_\beta \subseteq K_\beta$. Soit U un voisinage dans $\tilde{X}$ du polyèdre $\tilde{\Phi}$ si petit que $\varphi[U] \subseteq V$. Désignons par ω' l'ensemble de toutes les étoiles $\tilde{O}e_\beta^j \subseteq Y$, où $e_\beta^j \in \Psi_\beta$. Alors ω' recouvre le compact $\varphi[U] \subseteq V \subseteq Y$. Désignons par η le nombre positif jouant le rôle de nombre de Lebesgue aussi bien du complexe K_β (i. e. du recouvrement ω du polyèdre Y consistant de toutes les étoiles $\tilde{O}e_\beta^j$ des sommets e_β^j de ce complexe) que du recouvrement ω' (du compact $\varphi\,[U]$). Soit K_α une subdivision si fine de la triangulation K que l'image $\varphi\tilde{O}e_\alpha^i$ de toute étoile de cette subdivision est de diamètre inférieur à η, et soit Φ_α la subdivision de Φ correspondante telle que l'on ait $\tilde{O}e_\alpha^r \subseteq U$ pour $e_\alpha^r \in \Phi_\alpha$. Alors cha-

cun des ensembles $\varphi\widetilde{O}e_\alpha^i$ est contenu dans une certaine étoile $\widetilde{O}e_\beta^j$ du complexe K_β. Donc, si $e_\alpha^i \in \Phi_\alpha$, l'ensemble $\varphi\widetilde{O}e_\beta^j$ est contenu dans le complexe $\varphi[U]$ et a un diamètre égal au nombre de Lebesgue du recouvrement ω' de ce compact; $\varphi\widetilde{O}e_\beta^j$ est donc contenu dans un certain élément du recouvrement ω' de ce compact, i.e. dans l'étoile $\widetilde{O}e_\beta^j$ d'un certain sommet e_β^j du complexe Ψ_β. Le lemme est démontré.

Faisons maintenant correspondre à chaque sommet $e_\alpha^i \in K_\alpha$ un certain sommet $fe_\alpha^i = e_\beta^{j(i)}$ du complexe K_β de manière à avoir $\varphi\widetilde{O}e_\alpha^i \subseteq \widetilde{O}e_\beta^{j(i)}$ et $e_\beta^{j(i)} \in \Psi_\beta$ dès que $e_\alpha^i \in \Phi_\alpha$. L'application des sommets obtenue $e_\alpha^i \to e_\beta^{j(i)}$ définit une application simpliciale $f: K_\alpha \to K_\beta$, $\Phi_\alpha \to \Psi_\beta$. En effet, étant donné un simplexe $T_\alpha^r = |e_\alpha^{i_0} \ldots e_\alpha^{i_r}|$, les étoiles $\widetilde{O}e_\alpha^{i_0}, \ldots, \widetilde{O}e_\alpha^{i_r}$ ont une intersection non vide $\widetilde{O}\,|e_\alpha^{i_0} \ldots e_\alpha^{i_r}|$ dont l'image $\varphi\widetilde{O}\,|e_\alpha^{i_0} \ldots e_\alpha^{i_r}|$ est contenue dans l'intersection $\widetilde{O}e_\beta^{j(i_0)} \cap \ldots \cap \widetilde{O}e_\beta^{j(i_r)}$ qui ne peut donc être vide; par conséquent, $e_\beta^{j(i_0)}, \ldots, e_\beta^{j(i_r)}$ sont les sommets d'un simplexe $T_\beta = fT_\alpha$ du complexe K_β. Alors $e_\alpha^i \in \Phi_\alpha$ implique $fe_\alpha^i \in \Psi_\beta$ de sorte que $f\Phi_\alpha \subseteq \Psi_\beta$.

Démontrons que l'application simpliciale $f_\beta: \widetilde{K}_\alpha \to \widetilde{K}_\beta$, $\Phi_\alpha \to \Psi_\beta$ que nous avons construite est effectivement une approximation de l'application φ (relativement à la triangulation K_β).

Supposons que le simplexe $T_\alpha = |e_\alpha^0 \ldots e_\alpha^r|$ est le support dans K_α d'un point quelconque $x \in X = \widetilde{K}_\alpha$. Alors le support du point fx est un simplexe T_β^{fx} dont les sommets sont $e_\beta^{j(0)}, \ldots, e_\beta^{j(r)}$ (certains d'entre eux peuvent coïncider, ce qui nous ne dérange aucunement). Par construction de l'application f, nous avons

$$\varphi\widetilde{O}e_\alpha^i \subseteq \widetilde{O}e_\beta^{j(i)} \quad \text{pour } i = 0, \ldots, r,$$

et donc

$$\varphi x \in \varphi\widetilde{O}e_\alpha^0 \cap \ldots \cap \widetilde{O}e_\alpha^r \subseteq \widetilde{O}e_\beta^{j(0)} \cap \ldots \cap \widetilde{O}e_\beta^{j(r)} = \widetilde{O}T_\beta^{fx}.$$

Désignant par $T_\beta^{\varphi x}$ le support du point φx dans K_β, nous voyons que $T_\beta^{\varphi x} \subseteq \widetilde{O}T_\beta^{fx}$, i.e. $T_\beta^{\varphi x} \in OT_\beta^{fx}$, ce qui signifie justement que T_β^{fx} est une face propre ou impropre du simplexe $T_\beta^{\varphi x}$. Le théorème est démontré.

La remarque suivante nous servira au chapitre 7.

Remarque. Supposons que, dans le théorème de l'approximation simpliciale, l'application φ était déjà simpliciale sur le sous-complexe fermé $A \subseteq K$ de la triangulation K du polyèdre X. L'analyse de la démonstration nous montre que l'approximation simpliciale f de l'application φ peut être soumise à la condition supplémentaire suivante: f coïncide avec l'application donnée sur A, et en plus, le complexe A n'est pas subdivisé.

Si l'on ne cherche pas à éviter la subdivision de A, cette remarque est simplement évidente: il suffit de prendre pour images des sommets de la subdivision A_α du complexe A leurs images par φ.

Il est également facile de se passer de la subdivision de A. En effet, il importait dans la démonstration que les étoiles de la subdivision K_α aient pour images les étoiles des sommets de la triangulation K_β. Pour les sommets des étoiles de A (relativement au complexe A) ceci reste vrai déjà pour le complexe K non subdivisé. Par conséquent, certains voisinages dans X de ces étoiles sont appliqués dans les étoiles des sommets de la triangulation K_β. En choisissant une subdivision K_α suffisamment fine, sans subdiviser les simplexes de A *), on peut obtenir que l'étoile du sommet $e \in A$ soit située dans le voisinage choisi de cette étoile et s'applique donc dans l'étoile d'un certain sommet de K_β. Pour les sommets qui n'appartiennent pas à A le raisonnement reste le même qu'auparavant.

2. Autres propriétés des approximations simpliciales. Conservons toutes les notations du n° 1 (le groupe de coefficients est quelconque mais choisi une fois pour toutes).

Comme toute application simpliciale, l'application simpliciale construite $f:K_\alpha \to K_\beta$, $\Phi_\alpha \to \Psi_\beta$ induit un homomorphisme $f \equiv \equiv f_\beta^\alpha:\Delta^r(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha) \to \Delta^r(K_\beta, \bmod \Psi_\beta)$ des groupes d'homologie relatifs correspondants (voir § 8 du présent chapitre). D'autre part, en vertu du théorème 10, les applications $\tilde{f}:\tilde{K}_\alpha \to \tilde{K}_\beta$, $\tilde{\Phi}_\alpha \to \tilde{\Psi}_\beta$ et $\varphi:\tilde{K}_\alpha \to \tilde{K}_\beta$, $\tilde{\Phi}_\alpha \to \tilde{\Phi}_\beta$ $(\Phi_\alpha, \Psi_\beta)$-homotopes induisent le même homomorphisme

$$\varphi = \tilde{f}_\beta^\alpha : \Delta_c^r(\tilde{K}_\alpha, \bmod \tilde{\Phi}_\alpha) \to \Delta_c^r(\tilde{K}_\beta, \bmod \tilde{\Psi}_\beta).$$

Mais les groupes $\Delta_c^r(X, \bmod \tilde{\Phi}_\alpha)$ et $\Delta^r(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$ (respectivement $\Delta_c^r(Y, \bmod \tilde{\Psi}_\beta)$ et $\Delta^r(K_\beta, \bmod \Psi_\beta)$) sont liés par les isomorphismes de déplacement canonique **) $\sigma_\alpha : \Delta_c^r(X, \bmod \tilde{\Phi}_\alpha) \to \Delta^r \times \times (K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$ (respectivement $\sigma_\beta : \Delta_c^r(Y, \bmod \Psi_\beta) \to \Delta^r(K_\beta, \bmod \Psi_\beta)$. Il découle de la définition même de ces isomorphismes canoniques qu'ils sont liés entre eux par les isomorphismes $\varphi : \Delta_c^r(X, \bmod \tilde{\Phi}_\alpha) \to \Delta_c^r(Y, \bmod \tilde{\Psi}_\beta)$ et $f : \Delta^r(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha) \to \to \Delta^r(K_\beta, \bmod \Psi_\beta)$ en ce sens que pour chaque $\zeta_X^r \in \Delta_c^r(X, \bmod \tilde{\Phi}_\alpha)$ (respectivement $\zeta_\alpha^r \in \Delta^r(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$), on a $\varphi\zeta_X^r = \sigma_\beta^{-1} f \sigma_\alpha \zeta_X^r \in \Delta_c^r \times \times (Y, \bmod \tilde{\Psi})$ (respectivement $f\zeta_\alpha^r = \sigma_\beta \varphi \sigma_\alpha^{-1} \zeta_\alpha^r \in \Delta^r(K_\beta, \bmod \Psi)$).

Autrement dit, le diagramme

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \Delta_c^r(X, \bmod \tilde{\Phi}_\alpha) & \xrightarrow{\varphi} & \Delta_c^r(Y, \bmod \tilde{\Psi}_\beta) \\ \sigma_\alpha^{-1}\uparrow\downarrow\sigma_\alpha & & \sigma_\beta\downarrow\uparrow\sigma_\beta^{-1} \\ \Delta^r(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha) & \xrightarrow{f_\beta^\alpha} & \Delta^r(K_\beta, \bmod \Psi_\beta) \end{array}$$

est commutatif.

*) On peut le faire, par exemple, en effectuant un nombre suffisant de subdivisions barycentriques du complexe K, modulo le sous-complexe A (voir p. 363).

**) Nous avons défini l'isomorphisme de déplacement canonique au § 3 du présent chapitre uniquement pour le cas absolu (i. e. le cas $\Psi = \Lambda$). Le lecteur saura effectuer sans difficulté la construction correspondante pour les groupes relatifs.

D'autre part, chaque classe $\zeta_X^r \in \Delta_c^r(X, \bmod \widetilde{\Phi}_\alpha)$ contient un cycle convergent de la forme

$$z_X^r = (z_\alpha^r, z_{\alpha 1}^r, z_{\alpha 2}^r, \ldots),$$

où z_α^r est un certain cycle de la triangulation K_α, mod Φ_α, et $z_{\alpha 1}^r, z_{\alpha 2}^r, \ldots$ sont ses subdivisions barycentriques successives. Alors, si

$$f z_\alpha^r = z_\beta^{r'} \in Z^r(K_\beta, \bmod \Psi_\beta),$$

tandis que $z_{\beta h}^{r'}$ est la h-ième subdivision barycentrique du cycle z_β^r, alors

$$\varphi z_X^r \sim f z_X^r = (f z_{\alpha 1}^r, f z_{\alpha 2}^r, \ldots, f z_{\alpha h}^r, \ldots) = \tag{2}$$
$$= (z_\beta^r, z_{\beta 1}^r, \ldots, z_{\beta h}^r, \ldots).$$

3. Degré d'une application. Soient $Y = \widetilde{K}_\beta$ une pseudo-variété orientée de dimension n, K_β une pseudo-variété combinatoire qui est la triangulation de la pseudo-variété $Y = \widetilde{K}_\beta$, et z_β^n une orientation de la pseudo-variété combinatoire K_β. Les sous-complexes Φ_α et Ψ_β sont vides. On se donne, comme toujours, une application continue $\varphi : X \to Y$ et son approximation simpliciale $f : K_\alpha \to K_\beta$, où K_α est une triangulation suffisamment fine du polyèdre $X = K_\alpha$. Supposons que la classe d'homologie $\zeta_X^n \in \Delta_c^n(X, I)$ et le cycle $z_\alpha^n \in Z^n(K_\alpha, I)$ sont liés par la condition suivante : la classe ζ_X^n contient le cycle convergent

$$z_X^n = (z_\alpha^n, z_{\alpha 1}^n, \ldots, z_{\alpha h}^n, \ldots),$$

où comme toujours $z_{\alpha h}^n$ est la h-ième subdivision barycentrique du cycle z_α^n.

Désignons par ζ_Y^n celui des deux éléments générateurs du groupe cyclique infini $\Delta_c^n(Y, I)$ qui contient le cycle véritable

$$z_Y^n = (z_\beta^n, z_{\beta 1}^n, \ldots, z_{\beta h}^n)$$

(alors l'autre élément générateur, $-\zeta_Y^n$ du groupe $\Delta_c^n(Y, I)$ contient le cycle véritable $-z_Y^n$). La classe d'homologie ζ_Y^n sera appelée *orientation invariante de la pseudo-variété Y correspondant à l'orientation choisie z_β^n* de sa triangulation K_β. Dans ces conditions nous avons

$$\varphi \zeta_X^n = \gamma \zeta_Y^n, \tag{3}$$

où γ est un certain nombre entier complètement défini par la donnée de la classe d'homologie ζ_X^n du cycle z_X^n, de l'application $\varphi : X \to Y$ et de l'orientation ζ_Y^n (ou z_β^n) ; la valeur absolue du nombre γ ne dépend que de ζ_X^n et φ ; elle est indépendante de l'orientation de Y.

On déduit de la formule (2) que la formule (3) implique également

$$fz_\alpha^n = \gamma z_\beta^n \tag{3'}$$

et par conséquent les deux définitions ci-dessous sont valables.

(a) *Le nombre* γ *est égal au nombre de fois que l'image par l'application* φ *du cycle véritable* z_X^n *de la classe d'homologie* $\zeta_X^n \in \Delta_c^n(X, I)$ *recouvre la pseudo-variété orientée* Y :

(b) *le nombre* γ *est égal au nombre de fois que l'image par toute approximation simpliciale* $f: K_\alpha \to K_\beta$ *de l'application* φ *du cycle* z_α^n *recouvre la pseudo-variété orientée* K_β.

Les formules (3), (3') sont valables également pour tout élément ζ_X^n du groupe $\Delta^n(X, I_m)$, i.e. pour tout cycle véritable z_X^n modulo m, à condition que le coefficient γ, appelé *degré modulo m*, est un résidu modulo m *).

Remarque. Si $X = \widetilde{K}_\alpha$ et $Y = \widetilde{K}_\beta$ sont des pseudo-variétés orientées de dimension n, $\zeta_X^n \in \Delta_c^n(X, I)$, $\zeta_Y^n \in \Delta_c^n(Y, I)$ sont leurs orientations invariantes, z_α^n et z_β^n les orientations correspondantes des pseudo-variétés combinatoires K_α et K_β, alors le nombre γ déterminé par la formule (3) s'appelle *degré de l'application continue* $\varphi: X \to Y$. Le degré est un invariant homologique de l'application φ, i.e. il ne varie pas lorsqu'on passe de l'application $\varphi: X \to Y$ à l'application $\varphi_1: X \to Y$ qui lui est homologue (d'où il découle, en particulier, que deux applications homotopes $\varphi: X \to Y$ et $\varphi_1: X \to Y$ ont le même degré). La formule (3') implique que le degré d'une application continue φ de la pseudo-variété $X = \widetilde{K}_\alpha$ dans la pseudo-variété $Y = \widetilde{K}_\beta$ coïncide avec le degré (défini au § 9 du chapitre 1) de toute application simpliciale $f: K_\alpha \to K_\beta$ qui soit une approximation simpliciale de φ (théorème de Brouwer sur l'invariance du degré d'une application).

§ 10. Applications dans une pseudo-variété à bord

1. Degré de l'application $f: X \to Y$. Dans ce paragraphe, nous entendons par pseudo-variété toute pseudo-variété Y orientée de dimension n, à bord (non vide). Le bord de la pseudo-variété $Y = \widetilde{K}_\beta$ sera désigné par $Y' = \widetilde{K}'_\beta$. Le groupe de coefficients, sauf mention du contraire, est quelconque mais choisi une fois pour toutes. La triangulation K_β de la pseudo-variété Y est tout à fait arbitraire.

Tous les simplexes $|t_{\beta i}^n| \in K_\beta$ de dimension n sont orientés de la même manière, de sorte que la chaîne $z_\beta^n = \sum_i t_{\beta i}^n$ est un cycle

*) On définit de la même manière le degré d'une application relativement à un groupe de coefficients arbitraire.

mod K'_β de la pseudo-variété combinatoire K_β qui est l'élément générateur du groupe $Z^n(K_\beta, \text{mod } K'_\beta)$; le cycle relatif z^n_β s'appelle *orientation de la pseudo-variété* K_β ; il est bien défini si l'on se donne un simplexe $t^n_{\beta 0}$ de dimension n du complexe K orienté une fois pour toutes ($t^n_{\beta 0}$ est un terme du cycle z^n_β à coefficient $+1$). L'orientation de la pseudo-variété combinatoire K_β est également déterminée par le cycle convergent *)

$$z^n_Y = (z^n_\beta,\ z^n_{\beta 1}, \ldots, z^n_{\beta h}, \ldots), \tag{1}$$

que l'on appelle cycle *fondamental* ou *cycle d'orientation véritable* de la pseudo-variété $Y = \widetilde{K}_\beta$. La classe d'homologie ζ^n_Y du cycle relatif z^n_Y est l'élément générateur du groupe $\Delta^n(Y, \text{mod } Y')$.

Faisant correspondre au cycle relatif z^n_β du complexe K_β le cycle relatif convergent (1) de la pseudo-variété Y, nous obtenons (n° 5, § 5) un isomorphisme naturel du groupe $\Delta^n(K_\beta, \text{mod } K'_\beta)$ sur $\Delta^n_c(Y, \text{mod } Y')$.

Considérons maintenant la pseudo-variété combinatoire C_β qui satisfait aux conditions

$$|t^n_{\beta 0}| \in C_\beta \subseteq K_\beta \setminus K'_\beta. \tag{2}$$

Posons $\Psi_\beta = [K_\beta \setminus C_\beta]$; en considérant chaque cycle de dimenson n du complexe K_β, mod K'_β comme étant un cycle du même complexe K_β mais envisagé modulo Ψ_β, nous obtenons un isomorphisme naturel entre les groupes $\Delta^n(K_\beta, \text{mod } K'_\beta)$ et $\Delta^n(K_\beta, \text{mod } \Psi_\beta)$. Nous avons également un isomorphisme naturel entre les groupes $\Delta^n_c(Y, \text{mod } Y')$ et $\Delta^n_c(Y, \text{mod } \widetilde{\Psi}_\beta)$. On l'obtient en considérant chacun des éléments du cycle fondamental (1) comme étant un cycle du complexe $K_{\beta h}$, mod $\Psi_{\beta h}$ (comme nous l'avons déjà mentionné, $K_{\beta h}$, $\Psi_{\beta h}$, etc., sont les h-ièmes subdivisions barycentriques des complexes K_β, Ψ_β, etc.).

L'application obtenue du groupe $\Delta^n_c(Y, \text{mod } Y')$ dans $\Delta^n_c(Y, \text{mod } \widetilde{\Psi}_\beta)$ est évidemment un monomorphisme dans le groupe $\Delta^n_c(Y, \text{mod } \widetilde{\Psi}_\beta)$. Ce monomorphisme est une surjection sur $\Delta^n_c(Y, \text{mod } \widetilde{\Psi}_\beta)$, puisque chaque classe d'homologie de $\Delta^n_c(Y, \text{mod } \widetilde{\Psi}_\beta)$ contient un cycle relatif de la forme

$$z^n_Y = (z^n_{C_1},\ z^n_{C_2}, \ldots, z^n_{C_h}, \ldots), \tag{3}$$

où z^n_Y est maintenant un cycle de la pseudo-variété combinatoire C_β modulo son bord C'_β, le cycle z_{C_h} se prolonge de manière unique jusqu'à un cycle $z^n_{\beta h}$ du complexe K_β modulo son bord K'_β, de sorte que le cycle (3) coïncide modulo $\widetilde{\Psi}_\beta$ avec le cycle (1).

---

*) Ici et par la suite, dans des cas analogues, $z^n_{\beta h}$ est la h-ième subdivision barycentrique de la chaîne z_β.

Ainsi, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n(K_\beta, \bmod K'_\beta) & \rightleftarrows & \Delta^n_c(Y, \bmod Y') \\ \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow \\ \Delta^n(K_\beta, \bmod \Psi_\beta) & \rightleftarrows & \Delta^n_c(Y, \bmod \widetilde{\Psi}_\beta) \end{array}$$

dans lequel les flèches désignent des isomorphismes naturels.

Considérons, en plus des pseudo-variétés $Y = \widetilde{K}_\beta$, $Y_0 = \widetilde{C}_\beta$, $C_\beta \subseteq K_\beta \setminus K'_\beta$, le polyèdre $X = \widetilde{K}_\alpha$ (dans une triangulation quelconque K_α); supposons que Φ_α est un sous-complexe de la triangulation K_α. Désignons toujours par Ψ_β le sous-complexe $[K_\beta \setminus C_\beta]$ et supposons donnée une application continue

$$\varphi : X \to Y, \quad \widetilde{\Phi}_\alpha \to \widetilde{\Psi}_\beta.$$

En passant s'il le faut à une subdivision suffisamment fine du complexe K_α, que nous désignerons toujours par K_α, nous obtenons une application simpliciale

$$f : K_\alpha \to K_\beta, \quad \Phi_\alpha \to \Psi_\beta$$

qui est une approximation de φ; elle est donc $(\widetilde{\Phi}_\alpha, \Psi_\beta)$-homotope à φ. Par conséquent, les applications φ et $\widetilde{f}$ induisent un même homomorphisme du groupe $\Delta^r_c(X, \bmod \widetilde{\Phi}_\alpha)$ dans le groupe $\Delta^r_c(Y, \bmod \widetilde{\Psi}_\beta)$.

Soit $z^n_\alpha = \Sigma a_{\alpha i} t^n_{\alpha i}$ une chaîne du complexe K_α relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ *) dont la frontière est contenue par Φ_α (i.e. un cycle relatif $z^n_\alpha \in Z^n(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$). Les applications φ et $\widetilde{f}$ font correspondre à la classe d'homologie ζ^n_X du cycle relatif véritable

$$z^n_X = (z^n_\alpha, z^n_{\alpha 1}, \ldots, z^n_{\alpha h}, \ldots) \tag{4}$$

la même classe d'homologie

$$\eta^n_Y = \varphi\zeta^n_X = \widetilde{f}\zeta^n_X = \gamma\zeta^n_Y, \tag{5}$$

où ζ^n_Y est la classe d'homologie mod $\widetilde{\Psi}_\beta$ du cycle (1), tandis que γ est un élément du groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ qui ne dépend que de la classe d'homologie $\zeta^n_X \in \Delta^n(X, \bmod \widetilde{\Phi}_\alpha)$ du cycle z^n_α (mod Φ_α) et du choix de l'orientation de la pseudo-variété Y (en passant à l'orientation opposée, on transforme γ dans $-\gamma$).

La classe d'homologie η^n_Y (mod $\widetilde{\Psi}_\beta$) contient le cycle relatif

$$\widetilde{f}z^n_X = (\widetilde{f}z^n_\alpha, \widetilde{f}z^n_{\alpha 1}, \ldots, \widetilde{f}z^n_{\alpha h}, \ldots).$$

Mais $\widetilde{f}z^n_\alpha = fz^n_\alpha$ est le cycle z^n_β (mod Ψ_β) pris avec un certain coefficient $\delta \in \mathfrak{A}$, tandis que $\widetilde{f}z^n_{\alpha h}$ est la h-ième subdivision barycentrique

*) En fait, nous n'aurons affaire qu'au groupe de coefficients suivants: I, I_m, $\mathfrak{R}_1$, R, $\varkappa$ (voir § 4 du chapitre 1).

du cycle $\widetilde{f}z^n_\alpha$. Ainsi,

$$\widetilde{f}z^n_X = \delta\,(z^n_\beta,\ z^n_{\beta 1},\ \ldots,\ z^n_{\beta h},\ \ldots)$$

et sa classe d'homologie est $\delta\,\zeta^n_Y$, de sorte que $\eta^n_Y = \delta\,\zeta^n_Y = \gamma\,\zeta^n_Y$, d'où l'on déduit $\delta = \gamma$, et donc le coefficient γ se détermine uniquement à partir de l'équation

$$fz^n_\alpha = \gamma z^n_\beta \pmod{\Psi_\beta}. \tag{6}$$

Autrement dit, *le coefficient γ est défini de manière invariante par l'égalité*

$$\varphi\zeta^n_X = \gamma\zeta^n_Y \pmod{\widetilde{\Psi}_\beta} \tag{7}$$

et peut être également défini par l'égalité (6) *comme le degré, ou la multiplicité, avec lequel l'image du cycle relatif* $z^n_\alpha \pmod{\Phi_\alpha}$ *par l'application f, qui est une* $(\widetilde{\Phi}_\alpha,\ \widetilde{\Psi}_\beta)$*-approximation simpliciale (quelconque) de l'application* φ, *recouvre la pseudo-variété* C_β. Mais alors γ est aussi la multiplicité avec laquelle l'image de la chaîne z^n_α par l'application f recouvre le simplexe $|t^n_{\beta 0}| \in C_\beta$, pris avec la même orientation $t^n_{\beta 0}$ qu'il possède en tant que terme de la chaîne $fz^n_\alpha = \gamma \sum t^n_{\beta j}$. Pour chaque simplexe $t^n_{\alpha i}$ de la chaîne $z^n_\alpha = \sum \alpha_i t^n_{\alpha i}$ posons maintenant $d_i = 1$ si $ft^n_{\alpha i} = t^n_{\beta 0}$; $d_i = -1$ si $ft^n_{\alpha i} = -t^n_{\beta 0}$; $d_i = 0$ si $f|t^n_{\alpha i}| \neq |t^n_{\beta j}|$.

Alors

$$\gamma = \sum d_i a_i. \tag{8}$$

Supposons maintenant que C'_β est une autre pseudo-variété qui satisfait aux conditions $C'_\beta \subseteq K_\beta \setminus K'_\beta$, $|t^n_{\beta 0}| \in C'_\beta$ et $\varphi\widetilde{\Phi}_\alpha \subseteq \subseteq [K_\beta \setminus C'_\beta]$.

Posons $Y'_0 = \widetilde{C}'_\beta$, $\Psi'_\beta = [K_\beta \setminus C'_\beta]$ et écrivons la formule

$$\varphi\zeta'_X = \gamma'\zeta^n_Y \pmod{\widetilde{\Psi}'_\beta}, \tag{7'}$$

analogue à la formule (7). On voit facilement que $\gamma = \gamma'$. En effet, en désignant par Ψ_0 le complément du simplexe ouvert $|\,t_{\beta 0}\,|$ dans le polyèdre $Y = \widetilde{K}_\beta$, nous déduisons des égalités (7) et (7') les égalités

$$\varphi\zeta^n_X = \gamma\zeta^n_Y \pmod{\Psi_0},\quad \varphi\zeta^n_X = \gamma'\zeta^n_Y \pmod{\Psi_0}$$

qui impliquent $\gamma\zeta^n_Y = \gamma'\zeta^n_0 \pmod{\Psi_0}$ et donc $\gamma = \gamma'$.

R e m a r q u e. L'égalité $\gamma' = \gamma$ se déduit aussi directement de la formule (8).

2. Degré d'une application au point $o \in Y$. Supposons donnés un point o de la pseudo-variété Y, non situé sur son bord Y', et un polyèdre X avec son sous-polyèdre Φ qui est le support d'un certain sous-complexe d'une triangulation de ce polyèdre X. Supposons ensuite que l'on se donne une application continue $\varphi : X \to Y$ pour laquelle $\varphi\Phi \subseteq Y \setminus o$. Enfin, supposons donnée une triangulation K_α du polyèdre X, telle que le support du sous-complexe Φ_α soit le polyèdre Φ, et choisissons dans la triangulation K_α une chaîne x_α^n de dimension n dont la frontière est contenue dans Φ_α (de sorte que $x_\alpha^n \in Z^n(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$). En subdivisant s'il le faut, on peut supposer la triangulation K_α aussi fine que l'on veut. Nous supposons que la triangulation K_β de la pseudo-variété Y satisfait à la condition suivante : le support du point o dans le complexe K_β est un simplexe de dimension n, noté $| t_{\beta 0}^n |$, dont l'adhérence n'a pas de point commun avec un certain sous-polyèdre $\widetilde{\Psi}_\beta$, $\Psi_\beta \subseteq K_\beta$ qui contient l'ensemble $\varphi\widetilde{\Phi}_\alpha$. A part cela, la triangulation K_β est arbitraire. L'ayant choisie, nous exigeons que la triangulation K_α soit si fine que l'application $\varphi : X \to Y$, $\widetilde{\Phi}_\alpha \to \widetilde{\Psi}_\beta$ possède une approximation simpliciale $f : K_\alpha \to K_\beta$, $\Phi_\alpha \to \Psi_\beta$. Alors, quelle que soit la pseudo-variété $C_\beta \subseteq K_\beta$ qui satisfait à la condition $\Psi_\beta \subseteq [K_\beta \setminus C_\beta] = \Psi_{\beta 0}$ (une telle pseudo-variété sera, par exemple, l'adhérence du simplexe $| t_{\beta 0} |$), les égalités (6), (7), ainsi que (8) déterminent un élément du groupe de coefficients $\gamma = \gamma_\varphi(o, x_\alpha^n) = \gamma_f(o, x_\alpha^n)$ (dans (6), (7) il faut prendre les deuxièmes membres respectivement modulo $\Psi_{\beta 0}$ et modulo $\widetilde{\Psi}_{\beta 0}$). Le coefficient γ ne dépend pas du choix de la triangulation K_β et de la pseudo-variété C_β (dans le cadre des conditions imposées à K_β et à C_β) ; on l'appelle *degré* (ou *multiplicité*) avec lequel l'image de la chaîne $x_\alpha^n \in Z^n(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$ par l'application continue $\varphi : X \to Y$ *recouvre le point* $o \in Y$. Il est alors évident que pour deux chaînes $x_\alpha^n \in Z^n(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$ et $x_\alpha'^n \in Z^n(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$ on a

$$\gamma(o, x_\alpha^n + x_\alpha'^n) = \gamma(o, x_\alpha^n) + \gamma(o, x_\alpha'^n).$$

Démontrons l'assertion suivante.

A. *Si le bord d'une pseudo-variété $Y = \widetilde{K}_\beta$ est non vide, et z_α^n est un cycle de la triangulation $K_\alpha : \Delta z_\alpha^n = 0$, alors le degré γ avec lequel l'image du cycle z_α^n par l'application φ recouvre le point o est nul.*

En effet, par l'application simpliciale f, le cycle z_α^n a pour image le cycle $fz_\alpha^n = \gamma z_\beta^n$ du complexe K_β. Mais K_β, étant une pseudo-variété à bord, ne contient aucun cycle de dimension n non nul et par conséquent $\gamma = 0$.

On peut maintenant obtenir les propositions B et C.

B. *Le degré avec lequel l'image par l'application $\varphi : \widetilde{K}_\alpha \to \widetilde{K}_\beta$; $\Phi_\alpha \to \Psi_\beta$ de la chaîne donnée $x_\alpha^n \in Z^n(K_\alpha, \bmod \Phi_\alpha)$ recouvre le point o ne dépend que de la frontière $z_\alpha^{n-1} = \Delta x_\alpha^n \in Z^{n-1}\Psi_\alpha$ de la chaîne x_α^n,*

i.e. est le même pour toutes les chaînes $x_\alpha^n \in L^n K_\alpha$ *à frontière donnée* $z_\alpha^{n-1} = \Delta x_\alpha^n$. On l'appelle par conséquent tout aussi bien *ordre du point o relativement au cycle continu* φz_α^{n-1} ; *il est défini pour tous les cycles* $z_\alpha^{n-1} \in Z^{n-1}\Phi_\alpha$ *homologues à zéro dans* K_α.

En effet, supposons que nous avons, en plus de la chaîne x_α^n une autre chaîne $y_\alpha^n \in L^n K_\alpha$ à frontière

$$\Delta y_\alpha^n = \Delta x_\alpha^n = z_\alpha^{n-1}.$$

Alors $z_\alpha^n = x_\alpha^n - y_\alpha^n \in Z^n K_\alpha$ et, d'après les considérations précédentes, $\gamma_\varphi(o, z_\alpha^n) = 0$. Mais, évidemment, $\gamma_\varphi(o, z_\alpha^n) = \gamma_\varphi(o, x_\alpha^n) - \gamma_\varphi(o, y_\alpha^n)$, de sorte que $\gamma_\varphi(o, x_\alpha^n) = \gamma_\varphi(o, y_\alpha^n)$, ce qu'il fallait démontrer.

C. *Si* $x_\alpha^n \sim 0$ *dans* K_α, mod Ψ_α, *alors* $\gamma_\varphi(o, x_\alpha^n) = 0$.

En effet, soit $x_\alpha^{n+1} \in L^{n+1} K_\alpha$ une chaîne de dimension $n+1$ pour laquelle

$$\Delta x_\alpha^{n+1} = x_\alpha^n + y_\alpha^n, \text{ où } y_\alpha^n \text{ est contenu sur } \Psi_\alpha.$$

Alors $\Delta x_\alpha^{n+1} = x_\alpha^n + y_\alpha^n$ est un cycle de dimension n dans K_α dont l'image par l'application f recouvre, en vertu de la proposition A, le simplexe $t_{\beta 0}^n$ avec degré zéro. Mais puisque l'application f envoie la chaîne y_α^n dans le complexe Ψ_β, le degré avec lequel x_α^n recouvre le simplexe $t_\beta^n \in K'_\beta$ est égal au degré avec lequel ce même simplexe est recouvert par le cycle $x_\alpha^n + y_\alpha^n$, i.e. est nul.

3. Ordre d'un point relativement à un cycle continu de dimension $n-1$ dans un simplexe de dimension n. Soit $\bar{Q}^n$ un simplexe fermé de dimension n dans R^n ; son intérieur est le simplexe ouvert Q^n. Supposons donné dans Q^n un cycle continu de dimension $n-1$ dans sa représentation paramétrique $\varphi_0 z_\alpha^{n-1}$ relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{A}$. Cela signifie que dans une triangulation Ψ_α, située dans un certain $R^m \supseteq R^n$, on a un cycle z_α^{n-1} et une application continue $\varphi_0 : \tilde{\Psi}_\alpha \to Q^n$. Soit $o \in Q^n$ un certain point qui n'appartient pas à l'ensemble $\varphi_0 \tilde{\Psi}_\alpha$. On peut alors définir un élément γ du groupe $\mathfrak{A}$, que l'on appelle *ordre du point o relativement au cycle continu* $\varphi_0 z_\alpha^{n-1}$. Choisissons une triangulation K_α (dans un certain $R^\mu \supseteq R^m \supseteq R^n$) qui contient Ψ_α sous forme de sous-complexe et satisfait à la condition $z_\alpha^{n-1} \sim 0$ dans K_α (pour K_α on peut choisir, par exemple, un cône construit sur Ψ_α). Prolongeons l'application $\varphi_0 : \Psi_\alpha \to \bar{Q}^n$ jusqu'à une application continue $\varphi : \tilde{K}_\alpha \to \bar{Q}^n$. Soit x_α^n une chaîne du complexe K_α, dont la frontière est le cycle z_α^{n-1}. Alors le degré γ avec lequel l'image par l'application $\varphi : \tilde{K}_\alpha \to \bar{Q}^n$ de la chaîne x_α^n recouvre le point o (i.e. le simplexe quelconque $\bar{Q}'^n$, $o \in Q'^n \subset Q^n \setminus \varphi_0 \tilde{\Psi}$) s'avère défini, et ce degré est appelé *ordre du point o relativement au cycle continu* $\varphi_0 z_\alpha^{n-1}$. On vérifie facilement que notre définition est correcte,

i.e. elle ne dépend ni du choix de la triangulation $K_\alpha \supseteq \Psi_\alpha$, ni du choix du prolongement continu $\varphi : \widetilde{K}_\alpha \to \bar{Q}^n$ de l'application $\varphi_0 : \widetilde{\Psi}_\alpha \to \bar{Q}^n$, ni enfin du choix de la chaîne x_α^n dont la frontière est z^{n-1}.

En effet, on voit tout d'abord que le degré γ que nous venons de définir ne change pas si nous remplaçons la triangulation $K_\alpha \supseteq \Psi_\alpha$ par une triangulation isomorphe $K_\alpha^* \supseteq \Psi_\alpha$ (située dans un autre espace $R^{*\mu}$) avec la chaîne x_α^{*n} correspondante (par l'isomorphisme considéré) dans cette triangulation.

Supposons qu'en plus de K_α, φ, x_α^n, on se donne K'_α, φ', x'^n_α. D'après la remarque précédente, on peut (en passant éventuellement à des complexes isomorphes) supposer que les espaces R_α^μ et $R_\alpha^{\mu'}$ qui contiennent les polyèdres respectifs $\widetilde{K}_\alpha$ et $\widetilde{K}'_\alpha$ sont contenus dans un certain R^N (avec N suffisamment grand) et ont pour intersection le sous-espace R^m qui contient le polyèdre $\widetilde{\Psi}_\alpha$. Alors $\widetilde{K}_\alpha \cap \widetilde{K}'_\alpha = \widetilde{\Psi}_\alpha$ et nous avons l'application continue g du polyèdre $\widetilde{K}_\alpha \cup \widetilde{K}'_\alpha$ dans $\bar{Q}^n$, qui coïncide avec φ sur $\widetilde{K}_\alpha$ et avec φ' sur $\widetilde{K}'_\alpha$. Le cycle $z_\alpha^n = x_\alpha^n - x'^n_\alpha$ du complexe $K_\alpha \cup K'_\alpha$ est appliqué dans la pseudo-variété $\bar{Q}^n$ avec degré zéro au point o (proposition A), d'où l'on peut déduire que les degrés avec lesquels les images par les applications $\varphi : \widetilde{K}_\alpha \to \bar{Q}^n$ et $\varphi' : K'_\alpha \to \bar{Q}^n$ des chaînes x_α^n et x'^n_α recouvrent ce point sont égaux.

Considérons le cas particulier où z_α^{n-1} est un cycle d'une certaine triangulation K_α du simplexe $\bar{Q}^n$ (et donc φ_0 est l'application identique). Supposons que le point o est en position générale relativement à la triangulation K_α, i.e. est situé à l'intérieur d'un certain simplexe $| t_{\alpha i_0}^n | \in K_\alpha$. Alors $z'^{-1}_\alpha = \Delta x_\alpha^n$, $x_\alpha^n = \sum c_i t_{\alpha i}^n \in L^n K_\alpha$, et, évidemment, l'ordre γ du point o relativement au cycle z_α^{n-1} est égal au coefficient c_{i0} du terme $t_{\alpha i_0}^n$ de la chaîne x_α^n, où $t_{\alpha i_0}^n$ contient le point o (on voit facilement que la triangulation K_α possède une chaîne unique dont la frontière est le cycle z_α^{n-1}).

Pour généraliser les conditions dans lesquelles on peut définir l'ordre d'un point relativement à un cycle de dimension $n - 1$ de R^n, une digression nous sera nécessaire ; elle nous servira d'ailleurs par la suite.

4. Digression : le complexe K_Γ et ses chaînes (chaînes d'un ensemble ouvert $\Gamma \subseteq R^n$) ; complexes de Brouwer. Soit Γ un ensemble ouvert de l'espace euclidien R^n (en particulier, le cas $\Gamma = R^n$ est possible). Désignons par K_Γ le complexe des simplexes formés par tous les ensembles de points $e_0, \ldots, e_r$ dont l'enveloppe convexe est contenue dans Γ. Alors si $r \leqslant n$ et les sommets $e_0, \ldots, e_r$ sont indépendants (sont en position générale dans R^n), ils déterminent un simplexe géométrique (ouvert) $t^n = | e_0 \ldots e_r |$ de dimension n, que l'on appelle *simplexe* (non dégénéré) *du complexe* K_Γ (ou de l'ensemble

ouvert $\Gamma \subseteq R^n$) aux sommets $e_0, \ldots, e_r$. Mais si les sommets $e_0, \ldots, e_r$ sont dépendants, i.e. sont situés dans un sous-espace de dimension $<r$ (en particulier, si $r>n$), nous dirons que l'ensemble de sommets $e_0, \ldots, e_r$ détermine un simplexe dégénéré $|e_0 \ldots e_r|$. Les sous-complexes complets finis du complexe K_Γ pour $\Gamma = R^n$ s'appellent *complexes de Brouwer* de l'espace R^n.

On appelle *support de tout simplexe du complexe* K_Γ (dégénéré ou non dégénéré) l'enveloppe convexe de l'ensemble de ces sommets; ainsi, le support du simplexe non dégénéré $|e_0 \ldots e_r|$ est le simplexe fermé de sommets $e_0, \ldots, e_r$.

Le complexe K_Γ étant défini, on définit naturellement les chaînes (toujours finies!) de ce complexe, leurs frontières et leurs homologies dans K_Γ. Nous dirons brièvement que ce sont *les chaînes*, *les frontières*, *les homologies de l'ensemble ouvert* Γ et nous considérerons les groupes $\Delta^r K_\Gamma$ de cet ensemble.

Si $\Gamma' \supseteq \Gamma$, alors évidemment $K_{\Gamma'} \supseteq K_\Gamma$, de sorte que chaque chaîne de l'ensemble Γ est également une chaîne de l'ensemble $\Gamma' \supset \Gamma$, et une chaîne de chaque Γ est une chaîne de R^n.

On appelle *support d'une chaîne* x de l'ensemble ouvert Γ le polyèdre $\tilde{x} \subseteq \Gamma$ égal à la réunion de tous les simplexes qui figurent dans la chaîne x avec des coefficients non nuls.

5. Ordre d'un point $o \in Q^n$ du simplexe Q^n relativement à un cycle convergent situé dans Q^n. Soit z^{n-1} un cycle de $Q \equiv Q^n \subseteq R^n$, i.e. un cycle du complexe K_Q; soit $x^n = \sum c_i t_i^n$ une certaine chaîne du complexe K_Q, dont la frontière est z^{n-1}; supposons que le point o est en « position générale » relativement au complexe $|x^n|$, i.e. n'appartient à aucun simplexe du complexe $|x^n|$ de dimension $<n$. Prenons une triangulation K_α, isomorphe au complexe $|x^n|$. Supposons que l'isomorphisme de K_α sur $|x^n|$ fait correspondre la chaîne x_α^n à x^n, et le cycle z_α^{n-1} de la triangulation K_α au cycle z^{n-1}; et l'on a $\Delta x_\alpha^n = z_\alpha^{n-1}$. Nous avons une application simpliciale $\varphi: K_\alpha \to |x^n|$ qui envoie x_α^n dans x^n et z_α^{n-1} dans z^{n-1}; en considérant sa restriction φ sur $|z_\alpha^{n-1}|$, nous obtenons l'application φ_0. Nous voyons que nous nous trouvons dans les hypothèses de la définition générale de l'ordre du point o relativement au cycle continu $z^{n-1} = \varphi_0 z_\alpha^{n-1}$, et pouvons donc envisager l'ordre γ du point o relativement au cycle z^{n-1} comme étant la multiplicité avec laquelle la chaîne x^n recouvre ce point.

Enfin, si $z^{n-1} = (z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \ldots, z_k^{n-1}, \ldots)$ est un cycle convergent situé dans un compact $\Phi \subseteq \bar{Q}^n$; et si $o \in Q^n \setminus \Phi$, alors l'ordre du point o relativement à chacun des cycles z_k^{n-1}, à partir d'un certain k, est le même nombre γ que l'on appelle justement *ordre du point o relativement au cycle convergent z^{n-1}*.

6. Remarque. Nous avons indiqué à la page 56 du chapitre 1 que l'homomorphisme $\pi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ d'un groupe de coefficients dans un

autre engendre des homomorphismes de groupes, de chaînes, de cycles et d'homologies relativement à ces groupes de coefficients. Voyons ce que nous donnera cet homomorphisme pour les degrés d'application.

Soit d'abord $f: K_\alpha \to K_\beta$ une application simpliciale du complexe K_α dans le complexe K_β. Montrons que

$$\pi f_{\mathfrak{A}} x = f_{\mathfrak{B}} \pi x, \tag{9}$$

où $f_{\mathfrak{A}}$, $f_{\mathfrak{B}}$ sont les homomorphismes engendrés par l'application f

$$f_{\mathfrak{A}}: L(K_\alpha, \mathfrak{A}) \to L(K_\beta, \mathfrak{A}),$$

$$f_{\mathfrak{B}}: L(K_\alpha, \mathfrak{B}) \to L(K_\beta, \mathfrak{B})$$

des groupes des chaînes, la chaîne x étant quelconque. Evidemment, il suffit de vérifier (9) pour une chaîne à un seul membre $x = at$:

$$\pi f_{\mathfrak{A}} (at) = f_{\mathfrak{B}} \pi (at).$$

Mais cette égalité est simplement évidente.

Soit maintenant x^r une chaîne bien déterminée du groupe $L(K_\alpha, \mathfrak{A})$ et t^r, un simplexe du complexe K_β. Alors

$$\gamma_{\mathfrak{B}} = (f_{\mathfrak{B}} \pi x^r, t^r) = (\pi f_{\mathfrak{A}} x^r, t^r) = \pi \gamma_{\mathfrak{A}}.$$

Autrement dit, le degré $\gamma_{\mathfrak{A}}$ avec lequel l'image par l'application f de la chaîne x^r recouvre le simplexe t^r et le degré $\gamma_{\mathfrak{B}}$ avec lequel l'image par l'application f de la chaîne πx^r recouvre le simplexe t^r sont liés par la relation

$$\gamma_{\mathfrak{B}} = \pi \gamma_{\mathfrak{A}}. \tag{10}$$

Le lecteur vérifiera sans difficulté que cette même formule (10) est valable pour le degré d'une application dans un point et pour l'ordre d'un cycle relativement à un point.

CHAPITRE TROIS

COMPLÉMENTS SUR LA TOPOLOGIE DES POLYÈDRES ET LEURS APPLICATIONS CONTINUES (ENLACEMENTS ; THÉORÈME DE HOPF)

Comme l'indique le titre, nous continuons dans ce chapitre notre étude des polyèdres et de leurs applications continues. Le premier but principal sera ici la démonstration élémentaire du théorème de Hopf concernant les applications essentielles d'un polyèdre de dimension n sur un simplexe fermé de même dimension ; cela permettra de donner dans le chapitre suivant une démonstration, tout aussi élémentaire, du premier théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension, sous une forme qui nous semble intuitivement la plus claire ; c'est justement cette formulation (donnée au § 1 du chapitre 4 dans toute sa généralité) qui se rapproche le plus de la formulation initiale de ce théorème, démontré tel que je l'ai dans le cas des compacts.

Le deuxième but de ce chapitre est l'exposition de la théorie élémentaire de l'enlacement des cycles dans l'espace euclidien de dimension n (§ 2), due à Brouwer, qui nous servira au chapitre 4 à exposer les théorèmes ultérieurs de la théorie homologique de la dimension des compacts de dimension finie, i.e. des ensembles bornés fermés de l'espace euclidien — avant tout le théorème des obstructions. Au § 3 nous considérons le cas particulier de l'enlacement d'un cycle de dimension nulle et d'un cycle de dimension $n - 1$ dans R^n (avec les corollaires classiques concernant les applications continues).

En guise d'application de la théorie élémentaire des enlacements, nous donnons au § 4 la démonstration du « petit » théorème de dualité et de son cas particulier, le théorème de Jordan-Brouwer. Le paragraphe introductoire (§ 1) est le fondement du reste du chapitre.

§ 1. Intersection des chaînes

1. Indice d'intersection de deux plans orientés *). Soient X^μ et Y^ν deux plans de dimension μ et ν, $\mu + \nu = n$, dans

*) Nous supposons connues les notions de position générale des points et des plans. Indiquons toutefois les définitions principales et les propriétés qui nous seront nécessaires. Un système de points

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$$

l'espace R^n orienté de dimension n, qui se coupent dans un seul point désigné par o. Attribuons de la manière suivante au point o l'indice d'intersection $(X^\mu \times Y^\nu)$ des plans X^μ et Y^ν, qui sera un nombre égal à $+1$ ou -1. Choisissons dans le plan X^μ un simplexe $x^\mu = (o\ a_1 \ldots a_\mu)$ orienté de manière arbitraire et définissons le nombre $\alpha = \alpha(x^\mu) = \pm 1$ de telle sorte que l'orientation de αx^μ coïncide avec l'orientation choisie de X^μ. De la même manière, choisissons dans le plan Y^ν un simplexe orienté de manière arbitraire $y^\nu = (o\ b_1 \ldots b_\nu)$ et définissons le nombre $\beta = \beta(y^\nu) = \pm 1$ par la condition que l'orientation de βy^ν coïncide avec l'orientation du plan Y^ν. Considérons enfin le simplexe orienté $t^n = (o\ a_1 \ldots a_\mu b_1 \ldots b_\nu)$ (entièrement défini, avec son orientation, par les simplexes orientés x^μ et y^ν) et choisissons un $\gamma = \gamma(t^n) = \pm 1$ tel que l'orientation de γt^n coïncide avec l'orientation donnée de R^n. Alors, par définition,

$$(X^\mu \times Y^\nu) = \alpha\beta\gamma.$$

Remarque 1. Il aurait fallu écrire non pas $X^\mu \times Y^\nu$ mais, par exemple, $(X^\mu \times Y^\nu)_{R^n}$.

Remarque 2. On choisit généralement les orientations des simplexes x^μ et y^ν qui coïncident avec les orientations des plans X^μ et Y^ν ; alors $\alpha = \beta = 1$ et $(X^\mu \times Y^\nu) = \gamma$.

Démontrons tout d'abord que le nombre $X^\mu \times Y^\nu$ que nous venons de définir ne dépend pas des choix arbitraires effectués, i.e. du choix concret des simplexes orientés $x^\mu = (o\ a_1 \ldots a_\mu)$, $y^\nu = (o\ b_1 \ldots b_\nu)$.

Ainsi, soit

$$x'^\mu = (o\ a'_1 \ldots a'_\mu),\ y'^\nu = (o\ b'_1 \ldots b'_\nu),\ t'^n = \\ = (o\ a'_1 \ldots a'_\mu\ b'_1 \ldots b'_\nu) \text{ et } \alpha(x'^\mu) = \alpha',\ \beta(y'^\nu) = \beta',\ \gamma(t'^n) = \gamma'.$$

Démontrons que $\alpha'\beta'\gamma' = \alpha\beta\gamma$. Pour cela, choisissons les applications affines $f : x^\mu \to x'^\mu$ et $g : y^\nu \to y'^\nu$ déterminées par les conditions

---

sera dit en position générale dans R^n, si aucun ensemble de $k+1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, points parmi eux n'est contenu dans un plan de dimension $< k$. Par un déplacement aussi petit que l'on veut, on peut mettre un système fini de points quelconque en position générale, et, au contraire, un déplacement suffisamment petit laisse en position générale tout système de points qui était dans cette position. Deux plans X^μ et Y^ν de dimension μ et ν respectivement sont dits en position générale dans R^n, si on peut choisir dans chacun d'eux un système de points $\{x_0, \ldots, x_\mu\}$ et $\{y_0, \ldots, y_\nu\}$ de sorte que le système $\{x_0, \ldots, x_\mu, y_0, \ldots, y_\nu\}$ soit en position générale dans R^n. Les plans X^μ et Y^ν en position générale dans R^n ont une intersection vide pour $\mu + \nu < n$ et pour $\mu + \nu \geqslant n$ se coupent suivant un plan de dimension $\mu + \nu - n$. Enfin, deux triangulations K_1 et K_2 dans R^n sont en position générale, si le système des sommets des deux triangulations est en position générale.

$f(o) = o$, $f(a_1) = a'_1$, . . ., $f(a_\mu) = a'_\mu$; respectivement $g(o) = o$, $g(b_1) = b'_1$, . . ., $g(b_\nu) = b'_\nu$.

Le signe du déterminant de l'application f est le même que celui du nombre $\alpha\alpha'$, tandis que le signe du déterminant de g est le même que celui de $\beta\beta'$. La composition des applications f et g est une application affine F de l'espace R^n sur lui-même, et le déterminant de l'application F est égal au produit des déterminants des applications f et g, de sorte que son signe est le même que celui du nombre $\alpha\alpha'\beta\beta'$. D'autre part, l'application F envoie les points $o, a_1, \ldots, a_\mu, b_1, \ldots, b_\nu$ respectivement dans les points $o, a'_1, \ldots, a'_\mu, b'_1, \ldots, b'_\nu$, i.e. le simplexe orienté t^n est envoyé dans le simplexe orienté t'^n. Le signe du déterminant de F est donc le même que celui du nombre $\gamma\gamma'$. Puisque les valeurs absolues de tous les nombres $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ sont égales à 1, on déduit des considérations précédentes que

$$\alpha\alpha'\beta\beta' = \gamma\gamma',$$

d'où (en multipliant les deux membres de cette égalité par $\alpha\beta\gamma'$) l'on obtient l'égalité cherchée

$$\alpha'\beta'\gamma' = \alpha\beta\gamma.$$

Remarque 3. Il découle de notre définition que le nombre $(X^\mu \times Y^\nu)_{R^n}$ change de signe dès qu'on change une des orientations de X^μ, Y^ν, R^n.

Remarque 4. On a la formule $(X^\mu \times Y^\nu) = (-1)^{\mu\nu}(Y^\mu \times X^\mu)$, qui découle du fait que l'on peut passer de l'ensemble ordonné $o, a_1, \ldots, a_\mu, b_1, \ldots, b_\nu$ à l'ensemble ordonné $o, b_1, \ldots, b_\nu, a_1, \ldots, a_\mu$ par $\mu\nu$ transpositions.

Remarque 5. Notre définition reste valable lorsqu'un des deux nombres μ, ν s'annule (et alors l'autre devient égal à n). Soit, par exemple, $\mu = 0$, $\nu = n$. Alors X^0 est le point o muni du coefficient $c = \pm 1$, et Y^n est l'espace orienté R^n muni du coefficient $d = \pm 1$; on a évidemment

$$(X^0 \times Y^n) = cd.$$

2. Indice d'intersection de deux simplexes orientés et de deux chaînes. Définissons maintenant l'indice d'intersection de deux simplexes contenus dans deux plans. L'*indice d'intersection* $(x^\mu \times y^\nu)$ *de deux simplexes orientés* x^μ *et* y^ν dans l'espace euclidien orienté R^n se définit pour $\mu + \nu = n$ dans les deux cas suivants (nous dirons dans ces deux cas, indépendamment de la dimension des simplexes, qu'ils sont en *position générale relative*):

A. Si les adhérences de ces simplexes n'ont pas de point commun, alors nous posons leur indice d'intersection égal à 0:

$$(x^\mu \times y^\nu) = 0.$$

B. Si la réunion des sommets de ces simplexes est en position générale dans R^n (i.e. les plans X^μ et Y^ν qui contiennent ces simplexes sont en position générale), nous posons alors

$$(x^\mu \times y^\nu) = (X^\mu \times Y^\nu),$$

où les plans X^μ et Y^ν possèdent l'orientation induite par les simplexes orientés x^μ et y^ν qu'ils contiennent.

Remarquons que dans le dernier cas le point d'intersection (unique) des plans X^μ et Y^ν est situé à l'intérieur de chacun des deux simplexes x^μ et y^ν.

Soient maintenant $x^\mu = \sum_i a_i t_i^\mu$ et $y^\nu = \sum_j b_j t_j^\nu$, $\mu + \nu = n$, deux chaînes de l'espace orienté R^n, telles que deux simplexes t_i^μ, t_j^ν quelconques à coefficients non nuls (dans les chaînes respectives x^μ et y^ν) sont en position générale relative (nous dirons de deux telles chaînes qu'elles sont en position générale relative). On peut alors définir l'*indice d'intersection* $(x^\mu \times y^\nu)$ *des chaînes* x^μ et y^ν par la formule

$$(x^\mu \times y^\nu) = \sum_{i,j} a_i b_j (t_i^\mu \times t_j^\nu).$$

Remarque 6. Pour que cette définition soit valable, il faut supposer que les groupes de coefficients pour lesquels on envisage les chaînes x^μ et y^ν sont tels que les produits $a_i b_j$ sont bien définis ; ceci est vérifié, en particulier, lorsque les chaînes x^μ et y^ν ont un même groupe de coefficients et ce groupe est un anneau, ou lorsque ces groupes sont duaux (i.e. l'un d'eux est le groupe des caractères de l'autre), ou, enfin, lorsqu'un des groupes est le groupe des nombres entiers.

3. Opérations sur les indices d'intersection. On déduit immédiatement de la définition de l'indice d'intersection la linéarité de l'opérateur d'intersection :

$$\text{(1a)} \qquad \begin{cases} (x^\mu \times (y_1^\nu + y_2^\nu)) = (x^\mu \times y_1^\nu) + (x^\mu \times y_2^\nu), \\ ((x_1^\mu + x_2^\mu) \times y^\nu) = (x_1^\mu \times y^\nu) + (x_2^\mu + y^\nu). \end{cases}$$

D'autre part, la remarque 4 implique la formule

$$\text{(1b)} \qquad (x^\mu \times y^\nu) = (-1)^{\mu\nu} (y^\nu \times x^\mu).$$

La formule fondamentale suivante, satisfaite pour deux chaînes quelconques x^k et y^l, où $k + l = n + 1$, situées en position générale relative dans R^n, est moins évidente :

$$\text{(2)} \qquad (x^k \times \Delta y^l) = (-1)^k (\Delta x^k \times y^l).$$

Il suffit de démontrer la formule (2) dans le cas où chacune des chaînes x^k et y^l consiste d'un seul simplexe. Deux cas sont alors possibles :

a) les adhérences des simplexes x^k et y^l n'ont pas de point commun ;

b) les simplexes x^k et y^l sont non dégénérés et la réunion de leurs sommets est un ensemble de points en position générale dans R^n.

Dans le premier cas la formule (2) est évidente, car les deux membres sont nuls.

Passons au deuxième cas. Désignons respectivement par X^k et Y^l les plans qui contiennent les simplexes x^k et y^l et munissons-les des orientations correspondantes. Puisque les plans X^k et Y^l sont en position générale, ils se coupent suivant un plan de dimension $(k+l-n)$, i.e. suivant une droite, car $k+l=n+1$. Les simplexes x^k et y^l eux-mêmes se coupent suivant un segment ouvert (c, d) de cette droite. Aucun des points c et d ne peut évidemment être un point intérieur des deux simplexes à la fois. Il est moins évident qu'aucun de ces points ne peut être situé à la fois sur les frontières des deux simplexes. Néanmoins, si un système de points est en position générale, deux plans quelconques déterminés par deux sous-ensembles disjoints de ce système sont en position générale. Dans notre cas, si par exemple le point c appartenait à la frontière du simplexe $|x^k|$, mettons au simplexe t^s, $s \leqslant k-1$, et en même temps à la frontière du simplexe $|y^l|$, mettons au simplexe t^r, $r \leqslant l-1$, alors les simplexes t^s et t^r auraient un point commun, ce qui est impossible, car ils sont en position générale et on a $r+s-n \leqslant \leqslant k+l-2-n \leqslant -1$. Ainsi, chacun des points c et d est à l'intérieur d'un des simplexes $|x^k|$ ou $|y^l|$ et sur la frontière de l'autre. On a donc les deux possibilités suivantes :

1°. Les deux points sont situés sur la frontière d'un des deux simplexes $|x^k|$ et $|y^l|$, mettons sur la frontière du simplexe $|x^k|$ (fig. 12).

2°. Un des deux points c, d, mettons le point c, est situé sur la frontière du simplexe $|x^k|$ et l'autre, sur la frontière du simplexe $|y^l|$ (fig. 13).

Démonstration de la formule (2) dans le cas 1°. Ainsi, les points c et d se trouvent sur la frontière du simplexe $|x^k|$ et donc, puisque les simplexes $|x^k|$ et $|y^l|$ sont en position générale relative, ils sont situés respectivement à l'intérieur de deux faces distinctes $|x_1^{k-1}|$ et $|x_2^{k-1}|$ du simplexe $|x^k|$. Soit x^{k-2} la face commune de dimension $k-2$ des simplexes $|x_1^{k-1}$ et $|x_2^{k-1}|$. Désignons par a_1 et a_2 les sommets des simplexes $|x_1^{k-1}|$ et $|x_2^{k-1}|$ opposés à la face $|x^{k-2}|$. Soit x^{k-2} une orientation arbitraire de la face $|x^{k-2}|$ et choisissons alors les orientations suivantes des simplexes x_1^{k-1} et x_2^{k-1} :

$$x_1^{k-1} = (a_1 x^{k-2}), \quad x_2^{k-1} = (a_2 x^{k-2}).$$

Alors, d'après la deuxième propriété des coefficients d'incidence (chapitre 1, § 2), les simplexes x_1^{k-1} et x_2^{k-1} ont des coefficients opposés dans la chaîne Δx^k. Puisque les simplexes x^k et y^l sont en posi-

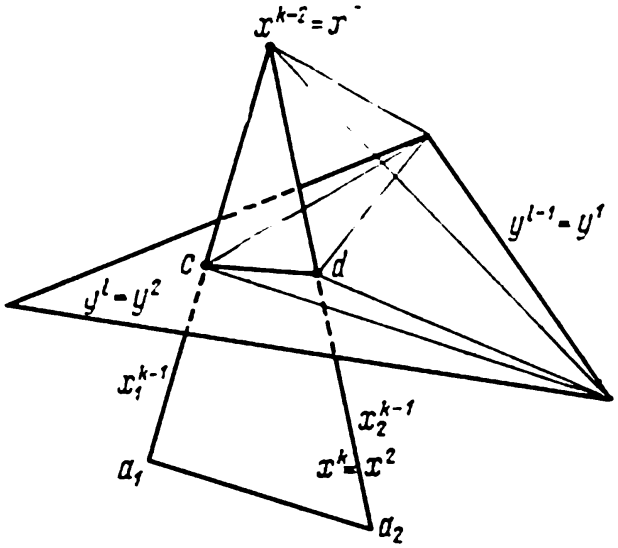

Fig. 12

tion générale, les points c et d sont à l'intérieur du simplexe $|y^l|$, de sorte que le premier membre de l'égalité (2) est nul dans notre cas.

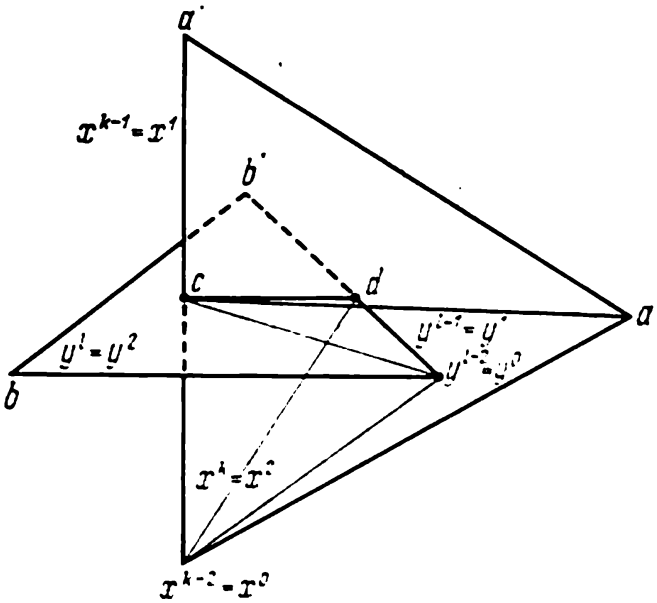

Fig. 13

Il faut donc démontrer que le deuxième membre l'est aussi, i.e. que $(x_1^{k-1} \times y^l) = (x_2^{k-1} \times y^l)$ ou, en désignant par X_1^{k-1}, X_2^{k-1}, Y^l les plans qui contiennent les simplexes x_1^{k-1}, x_2^{k-1} et y^l et possèdent

les mêmes orientations, que

$$(X_1^{k-1} \times Y^l) = (X_2^{k-1} \times Y^l). \tag{3}$$

Pour démontrer la formule (3) remarquons tout d'abord que les points c et a_1 sont situés dans le plan X_1^{k-1} d'un même côté du plan X^{k-2} qui contient le simplexe x^{k-2}, et par conséquent l'orientation de (cx^{k-2}) coïncide avec celle que l'on a choisie dans x_1^{k-1}. Autrement dit, $\alpha\,(cx^{k-2}) = 1$; d'une manière analogue $\alpha\,(dx^{k-2}) = 1$, de sorte que

$$\alpha\,(cx^{k-2}) = \alpha\,(dx^{k-2}). \tag{3_1}$$

Soit maintenant dans Y^l un plan Y^{l-1} qui n'a pas de point commun avec le segment cd, et choisissons dans ce plan un simplexe orienté y^{l-1} dont les sommets forment avec les sommets du simplexe x^{k-2} un système de points en position générale dans R^n. Puisque le segment cd n'a pas de point commun avec Y^{l-1}, les points c et d sont dans $|\,y^l\,|$ d'un même côté de Y^{l-1}, et donc les simplexes (cy^{l-1}) et (dy^{l-1}) ont la même orientation:

$$\beta\,(cy^{l-1}) = \beta\,(dy^{l-1}). \tag{3_2}$$

Les plans X^{k-2} et Y^{l-1} qui contiennent respectivement les simplexes x^{k-2} et y^{l-1} déterminent un plan qui les contient de dimension $((k-2)+1) + ((l-1)+1) = n-1$; nous le désignerons par X^{n-1}. Le segment cd n'a pas de point commun avec le plan $Y^{l-1} = X^{n-1} \cap Y^l$, et par conséquent les points c et d sont situés dans R^n d'un même côté du plan X^{n-1}, et les simplexes $cx^{k-2}y^{l-1}$ et $dx^{k-2}y^{l-1}$ ont la même orientation, i.e.

$$\gamma\,(cx^{k-2}y^{l-1}) = \gamma\,(dx^{k-2}y^{l-1}). \tag{3_3}$$

L'égalité cherchée (3) découle de la définition de l'indice d'intersection et des formules (3_1), (3_2), (3_3); par conséquent, l'égalité (2) est démontrée dans le cas 1° considéré.

Passons à la démonstration de la formule (1) dans le cas 2°.

Le point c se trouve maintenant sur le bord du simplexe $|\,x^k\,|$ et à l'intérieur du simplexe $|\,y^l\,|$, tandis que le point d est sur le bord du simplexe $|\,y^l\,|$ et à l'intérieur du simplexe $|\,x^k\,|$; puisque ces simplexes sont en position générale relative, le point c est à l'intérieur d'une certaine face $|\,x^{k-1}\,|$ du simplexe $|x^k\,|$, et le point d, à l'intérieur d'une face $|\,y^{l-1}\,|$ du simplexe $|\,y^l\,|$. Choisissons les orientations x^{k-1} et y^{l-1} des simplexes $|\,x^{k-1}\,|$, $|\,y^{l-1}\,|$ de manière à ce que leurs coefficients dans Δx^k, respectivement dans Δy^l, soient égaux à $+1$. Alors la formule (2) qu'il s'agit de démontrer dans notre cas peut s'écrire dans nos notations sous la forme

$$(x^k \times y^{l-1}) = (-1)^k\ (x^{k-1} \times y^l)$$

ou, en désignant par X^k, Y^l, X^{k-1}, Y^{l-1} les plans qui contiennent les simplexes x^k, y^l, x^{k-1}, y^{l-1} et possèdent les orientations correspondantes, cette formule s'écrit sous la forme

$$(X^k \times Y^{l-1}) = (-1)^k (X^{k-1} \times Y^l). \tag{4}$$

Désignons maintenant par a et b les sommets des simplexes $|x^k|$ et $|y^l|$ opposés aux faces $|x^{k-1}|$ et $|y^{l-1}|$. Choisissons ensuite des sommets arbitraires a' et b' respectivement dans les simplexes $|x^{k-1}|$ et $|y^{l-1}|$ et désignons par x^{k-2} et y^{l-2} les faces opposées à ces sommets dans $|x^{k-1}|$ (respectivement dans $|y^{l-1}|$). Choisissons les orientations x^{k-2} et y^{l-2} de manière à avoir

$$x^{k-1} = (a'x^{k-2}),\ y^{l-1} = (b'y^{l-2}).$$

Puisque le segment ca' n'a pas de point commun avec le simplexe $|x^{k-2}|$, et le segment db' avec le simplexe $|y^{l-2}|$, les orientations x^{k-1} et (cx^{k-2}), y^{l-1} et (dy^{l-2}) coïncident.

D'autre part, les points d et a sont situés dans le plan X^k du simplexe $|x^k|$ d'un même côté du plan de la face $|x^{k-1}|$ (ce plan est aussi celui du simplexe $|cx^{k-2}|$). Les orientations (dcx^{k-2}) et (acx^{k-2}) coïncident, et donc (vu que cx^{k-2} et $(a'x^{k-2}) = x^{k-1}$ ont la même orientation), les orientations (dcx^{k-2}) et x^k sont pareilles.

Pour des raisons analogues, il en va de même des orientations

$$(cdy^{l-2}) \text{ et } y^l.$$

Calculons maintenant le nombre $(x^k \times y^{l-1})$. Pour cela, en conservant nos notations, choisissons dans le plan X^k le simplexe (dcx^{k-2}) qui, comme nous venons de l'établir, possède la même orientation que x^k, et dans le plan Y^{l-1} le simplexe (dy^{l-2}) qui a la même orientation que y^{l-1}.

Choisissons $\gamma = \pm 1$ de manière à ce que l'orientation de $\gamma\,(dcx^{k-2}y^{l-2})$ coïncide avec l'orientation choisie de l'espace donné R^n. Alors $(X^k \times Y^{l-1}) = \gamma$.

D'une manière analogue, pour calculer $x^{k-1} \times y^{l-1}$, prenons le simplexe (cx^{k-2}) du plan X^{k-1} ; il est, comme nous le savons, orienté de la même manière que ce plan ; prenons dans le plan Y^l le simplexe (cdy^{l-2}) de même orientation. Définissons γ' de manière à ce que l'orientation du simplexe $\gamma'\,(cx^{k-2}dy^{l-2})$ coïncide avec celle de R^n. Alors $(x^{k-1} \times y^l) = \gamma'$.

Mais l'orientation $cx^{k-2}dy^{l-2}$ du simplexe $|cx^{k-2}dy^{l-2}|$ peut être transformée dans l'orientation $|dcx^{k-2}y^{l-2}|$ de ce même simplexe par k transpositions de ses sommets. Par conséquent, $\gamma' = (-1)^k\gamma$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Quelques conséquences. Généralisons les conditions sous lesquelles on peut définir l'indice d'intersection. Commençons par la

Remarque 7. Soient x^μ et y^ν deux chaînes de l'espace R^n en position générale relative. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que deux chaînes x'^μ et y'^ν obtenues à partir de x^μ et y^ν par un ε-déplacement sont également situées en position générale et l'on a

$$(x'^\mu \times y'^\nu) = (x^\mu \times y^\nu).$$

Démonstration. Supposons que le nombre positif ε est plus petit que la moitié de la distance entre deux simplexes disjoints appartenant respectivement aux deux complexes simpliciaux complets $|x^\mu|$ et $|y^\nu|$. Supposons en outre que ε est si petit que l'image de tout ensemble en position générale de sommets des complexes $|x^\mu|$ et $|y^\nu|$ par un ε-déplacement est un ensemble en position générale.

Supposons maintenant que les chaînes x'^μ et y'^ν sont les images des chaînes x^μ et y^ν par un ε-déplacement. Considérons deux simplexes arbitraires x_i^μ et y_j^ν appartenant respectivement aux chaînes x^μ et y^ν, et désignons par $x_i'^\mu$ et $y_j'^\nu$ les simplexes correspondants des chaînes x'^μ et y'^ν Deux cas sont alors possibles:

1° les supports $\widetilde{x}_i^\mu$ et $\widetilde{y}_j^\nu$ des simplexes x_i^μ et y_j^ν n'ont pas de point commun; il en sera alors de même des supports des simplexes $x_i'^\mu$ et $y_j'^\nu$, et nous avons $(x_i'^\mu \times y_j'^\nu) = (x_i^\mu \times y_j^\nu) = 0$;

2° l'ensemble de tous les sommets des simplexes x_i^μ et y_j^ν est en position générale et les simplexes x_i^μ, y_j^ν ont un seul point commun o. Alors l'ensemble de tous les sommets des simplexes $x_i'^\mu$ et $y_j'^\nu$ est aussi en position générale et les simplexes $x_i'^\mu$ et $y_j'^\nu$ ont un seul point commun o'; dans le cas contraire, en effectuant d'abord le ε-déplacement donné du complexe $|y^\nu|$ (le complexe $|x^\mu|$ étant fixe), et ensuite le ε-déplacement du complexe $|x^\mu|$ ($|y^\nu|$ étant fixe), à un certain moment un des simplexes x_i^μ, y_j^ν couperait la frontière de l'autre, ce qui est en contradiction, avec la première condition de petitesse imposée à la grandeur du nombre ε. Il est maintenant clair que $(x_i'^\mu \times y_j'^\nu) = (x_i^\mu \times y_j^\nu) = \pm 1$. En prenant la somme sur i et j nous obtenons

$$(x'^\mu \times y'^\nu) = (x^\mu \times y^\nu).$$

L'assertion est démontrée.

Corollaire 1 (de la formule (2)). *Supposons donné dans R^n un cycle z^μ et une chaîne y^ν, $\mu + \nu = n$ en position générale. Si*

$$z^\mu \sim 0 \text{ dans } R^n \setminus \widetilde{\Delta y^\nu},$$

*où $\widetilde{\Delta y^\nu}$ est le polyèdre *) qui supporte la chaîne Δy^ν, alors $(z^\mu \times y^\nu) = 0$.*

*) Plus exactement, ce polyèdre devrait être désigné par $|\widetilde{\Delta y^\nu}|$.

Démonstration. Soit $z^\mu = \Delta x^{\mu+1}$, où la chaîne $x^{\mu+1}$ est située dans $R \setminus \widetilde{\Delta y^\nu}$.

Désignons par $\widetilde{x}_i$, $\widetilde{y}_j$ les espaces sous-jacents à deux simplexes quelconques $|x_i|$, $|y_j|$ appartenant respectivement aux complexes $|x^{\mu+1}|$ et $|y^\nu|$, et soit $2\varepsilon > 0$ un nombre plus petit que tous les nombres $\rho(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ non nuls. Supposons en outre que ε est si petit qu'après tout ε-déplacement chaque ensemble de sommets des complexes $|x^{\mu+1}|$ et $|y^\nu|$ en position générale conserve sa position générale. Effectuons maintenant un ε-déplacement des complexes $|x^{\mu+1}|$ et $|y^\nu|$ tel que l'ensemble des sommets des complexes $|x'^{\mu+1}|$ et $|y'^\nu|$ obtenus soit en position générale. Alors le polyèdre $\widetilde{x}'^{\mu+1}$ est situé dans $R^n \setminus \widetilde{\Delta y'^\nu}$, les chaînes $x'^{\mu+1}$ et y'^ν sont en position générale relative et nous avons en vertu de la remarque 7 précédente

$$(z^\mu \times y^\nu) = (\Delta x^{\mu+1} \times y^\nu) = (\Delta x'^{\mu+1} \times y'^\nu)$$

et il nous suffit donc de démontrer que $(\Delta x'^{\mu+1} \times y'^\nu) = 0$.

Mais les chaînes $x'^{\mu+1}$ et y'^ν sont en position générale relative et la formule (2) nous donne

$$(\Delta x'^{\mu+1} \times y'^\nu) = \pm (x'^{\mu+1} \times \Delta y'^\nu) = 0;$$

le corollaire 1 est démontré.

Corollaire 2. *Si z^μ et z^ν, $\mu + \nu = n$, sont des cycles de l'espace R^n en position générale, alors $(z^\mu \times z^\nu) = 0$.*

En effet, pour $\mu > 0$ (et également dans le cas $\mu = 0$ si le cycle z^μ est normal, i.e. si la somme de ses coefficients est nulle) le cycle z^μ est homologue à zéro dans R^n, et nous sommes dans les hypothèses du corollaire 1. Il reste à considérer le cas où $\mu = 0$, tandis que le cycle $z^\mu = z^0$ n'est pas normal ; il est évidemment suffisant de considérer le cas particulier où z^μ est le point unique z^0 à coefficient $+1$ en position générale relativement au cycle $z^\nu = z^n$. Soit alors y^0 un deuxième point, également à coefficient $+1$, et contenu dans $R^n \setminus \widetilde{z}^n$ (un tel point existe certainement, puisque $\widetilde{z}^n$ est un polyèdre, et donc un ensemble borné de R^n). Le cycle $z^0 - y^0$ est alors normal et l'égalité

$$((z^0 - y^0) \times z^n) = 0$$

a déjà été démontrée. Mais, évidemment, $(y^0 \times z^n) = 0$, donc $(z^0 \times z^n) = ((z^0 - y^0) \times z^n)$, ce qu'il fallait démontrer.

Les corollaires de la formule (2) établis permettent de généraliser considérablement les hypothèses sous lesquelles on peut définir l'indice d'intersection de deux chaînes : à savoir, on peut définir pour $\mu + \nu = n$ l'indice d'intersection de deux chaînes x^μ et x^ν *quelcon-*

ques de l'espace R^n qui satisfont à la condition

$$\widetilde{x}^\mu \cap \widetilde{\Delta x}^\nu = \Lambda, \quad \widetilde{\Delta x}^\mu \cap \widetilde{x}^\nu = \Lambda; \tag{5}$$

cette condition sera formulée brièvement ainsi : aucune des chaînes x^μ, x^ν ne coupe la frontière de l'autre.

Pour atteindre le but que nous nous sommes fixé, choisissons un $\varepsilon > 0$ si petit que 3ε soit inférieur à $\rho(\widetilde{x}^\mu, \widetilde{\Delta x}^\nu)$, $\rho(\widetilde{\Delta x}^\mu, \widetilde{x}^\nu)$ et à la plus petite des distances entre les points de l'ensemble de tous les sommets des complexes $|x^\mu|$ et $|x^\nu|$.

Effectuons un ε-déplacement g' des sommets de la chaîne x^μ tel que la chaîne x'^μ obtenue soit en position générale relativement à la chaîne x^ν.

L'indice d'intersection $(x'^\mu \times x^\nu)$ est bien défini et nous posons

$$(x^\mu \times x^\nu) = (x'^\mu \times x^\nu). \tag{6_μ}$$

Montrons que cette définition de l'indice d'intersection $(x^\mu \times x^\nu)$ ne dépend pas du choix concret de la chaîne x'^μ, i.e. du choix du ε-déplacement effectué sur la chaîne x^μ. Supposons que nous avons obtenu la chaîne x''^μ par un autre ε-déplacement g'' (qui satisfait aux conditions imposées à g'). Démontrons que

$$(x^\mu \times x^\nu) = (x''^\mu \times x^\nu).$$

Puisque les déplacements g' et g'' n'ont pas fait coïncider deux sommets distincts de la chaîne x^μ (plus exactement, aucuns deux sommets n'ont été transformés dans un même sommet, x'^μ et x''^μ respectivement), alors la chaîne x''^μ peut être obtenue de la chaîne x'^μ par un 2ε-déplacement $g = g''g'^{-1}$.

En supposant que tous les sommets de la chaîne x^μ ont été numérotés dans un ordre déterminé et en admettant ce même ordre pour les sommets des chaînes x'^μ et x''^μ, nous pouvons considérer le prisme $\Pi x'^\mu$ construit sur la chaîne x'^μ et sur son image x''^μ par l'application g. Tout ce prisme est contenu dans un 3ε-voisinage de l'ensemble $\widetilde{x}^\mu$ et donc dans $R^n \setminus \widetilde{\Delta x}^\nu$; nous avons

$$\Delta \Pi x'^\mu = x'^\mu - x''^\mu - \Pi \Delta x'^\mu,$$

de sorte que

$$x'^\mu - x''^\mu - \Pi \Delta x'^\mu \sim 0 \text{ dans } R^n \setminus \widetilde{\Delta x}^\nu$$

et par conséquent, en vertu du corollaire de la formule (2),

$$((x'^\mu - x''^\mu - \Pi \Delta x'^\mu) \times x^\nu) = 0.$$

Mais puisque $\Pi \Delta x'^\mu$ est situé dans un 3ε-voisinage de l'ensemble $\widetilde{\Delta x}^\mu$, et donc dans $R^n \setminus \widetilde{x}^\nu$, on a $(\Pi \Delta x'^\mu \times x^\nu) = 0$, i.e.

$$((x'^\mu - x''^\mu) \times x^\nu) = 0, \ (x'^\mu \times x^\nu) = (x''^\mu \times x^\nu),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Complétons le résultat obtenu par la remarque naturelle suivante. Appliquons la chaîne x^ν par un ε-déplacement sur la chaîne x'^ν en position générale relativement à la chaîne x^μ (pour la même signification du nombre ε). Montrons que

$$(6_\nu) \qquad (x^\mu \times x^\nu) = (x^\mu \times x'^\nu),$$

où le premier membre $(x^\mu \times x^\nu)$ est défini par la formule (6_μ) et le deuxième $(x^\mu \times x'^\nu)$ a la signification indiquée au n° 2. Pour démontrer la formule (6_ν) effectuons un ε-déplacement de la chaîne x^μ de manière à ce que son image x'^μ soit en position générale relative tout aussi bien avec x^ν, qu'avec x'^ν. Alors les indices d'intersection s'avèrent définis directement (i.e. dans le sens du n° 2), et l'on établit par des raisonnements analogues aux précédents que

$$(x'^\mu \times x'^\nu) = (x'^\mu \times x^\nu),$$
$$(x^\mu \times x'^\nu) = (x'^\mu \times x'^\nu)$$

et donc

$$(x^\mu \times x'^\nu) = (x^\mu \times x^\nu),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, on a la

R e m a r q u e 8. Si aucune des chaînes x^μ et x^ν ne coupe la frontière de l'autre, alors l'indice d'intersection $(x^\mu \times x^\nu)$ peut être défini par l'une quelconque des formules

$$(6) \qquad \begin{gathered} (x^\mu \times x^\nu) = (x'^\mu \times x^\nu), \qquad (x^\mu \times x^\nu) = (x^\mu \times x'^\nu), \\ (x^\mu \times x^\nu) = (x'^\mu \times x'^\nu), \end{gathered}$$

où x'^μ et x'^ν s'obtiennent de x^μ et x^ν par un déplacement quelconque suffisamment petit, soumis à la seule condition que les chaînes indiquées dans le deuxième membre des formules (6) soient en position générale relative.

R e m a r q u e 9. Les formules de distributivité (1a) et (1b) sont évidemment valables dans nos nouvelles hypothèses plus générales, de même que les corollaires 1 et 2.

§ 2. Enlacement des cycles

1. Coefficient d'enlacement. Le nombre naturel n est fixé comme toujours ; désignons par p et q deux entiers non négatifs dont la somme est $n - 1$. Soient z_1^p, et z_2^q deux cycles qui ne se coupent pas dans R^n, le cycle z_1^p étant normal dans le cas $p = 0$. Choisissons la chaîne x^{p+1} dont la frontière est le cycle z_1^p :

$$\Delta x^{p+1} = z_1^p.$$

La condition (5) du paragraphe précédent est satisfaite et par conséquent l'indice d'intersection $(x^{p+1} \times z_2^q)$ est bien défini. La valeur de $(x^{p+1} \times z_2^q)$ ne dépend pas du choix particulier de la chaîne x^{p+1} : pour deux chaînes quelconques x_1^{p+1} et x_2^{p+1} qui satisfont à la condition $\Delta x_1^{p+1} = \Delta x_2^{p+1} = z_1^p$ on a

$$(x_1^{p+1} \times z_2^q) = (x_2^{p+1} \times z_2^q). \tag{1}$$

En effet, $x_1^{p+1} - x_2^{p+1}$ est un cycle ; on a donc, en vertu du corollaire 2 (p. 156),

$$((x_1^{p+1} - x_2^{p+1}) \times z_2^q) = 0,$$

d'où l'on déduit l'assertion ci-dessus, en se servant de la formule (1a) du paragraphe 1.

D é f i n i t i o n. Soient z_2^q et $\Delta x_1^{p+1} = z_1^p$ deux cycles dont les supports n'ont pas de point commun. L'indice d'intersection $(x_1^{p+1} \times \times z_2^q)$ (qui ne dépend pas du choix de la chaîne x_1^{p+1} de frontière z_1^q) s'appelle *coefficient d'enlacement* du cycle z_1^p au cycle z_2^q (dans l'espace orienté R^n donné) ; il sera désigné par $\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q)$; dans cette définition on suppose que les groupes de coefficients des cycles z_1^p et z_2^q satisfont aux conditions énumérées dans la remarque 6 à la page 150.

Démontrons la remarquable et importante formule ci-dessous *)

$$\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q) = \pm \mathfrak{o}(z_2^q, z_1^p), \tag{2}$$

plus exactement,

$$\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q) = (-1)^{pq+1} \mathfrak{o}(z_2^q, z_1^p). \tag{2'}$$

D é m o n s t r a t i o n. Choisissons deux chaînes x^{p+1} et y^{q+1} telles que

$$\Delta x^{p+1} = z_1^p, \ \Delta y^{q+1} = z_2^q.$$

D'après les formules (1a), (1b) et (2) du § 1, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q) &= (x^{p+1} \times \Delta y^{q+1}) = (-1)^{p+1}(\Delta x^{p+1} \times y^{q+1}) = \\ &= (-1)^{p+1}(-1)^{p(q+1)}(y^{q+1} \times \Delta x^{p+1}) = \\ &= (-1)^{pq+2p+1}\mathfrak{o}(z_2^q, z_1^p) = (-1)^{pq+1}\mathfrak{o}(z_2^q, z_1^p),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il découle des faits démontrés que :

Si $\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q) \neq 0$, alors on a également $\mathfrak{o}(z_2^q, z_1^p) \neq 0$; dans ce cas les cycles z_1^p et z_2^q sont dits *enlacés*. Les exemples d'enlacement les plus simples sont représentés sur les figures 14 et 15, où $z_1^1 = \Delta t_1^2$, $z_2^1 = = \Delta t_2^2$ et $\mathfrak{o}(z_1^1, z_2^1)$ est nul sur la figure 14 et égal à 1 sur la figure 15.

*) On suppose évidemment que les deux membres de ces égalités sont définis, i. e. que le cycle z_1^0 est normal lorsque $p = 0$, tandis que dans le cas $q = 0$ le cycle z_2^0 est normal.

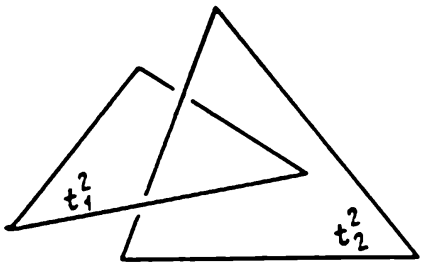

Fig. 14

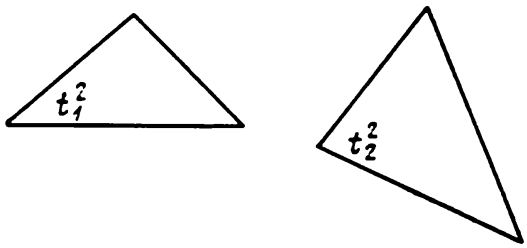

Fig. 15

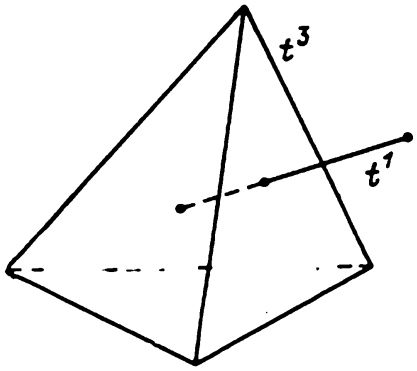

Fig. 16

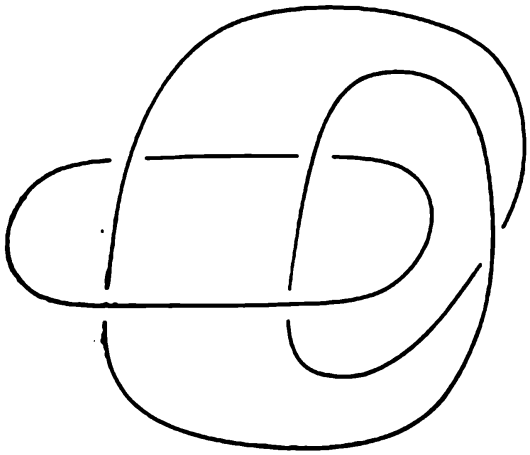

Fig. 17

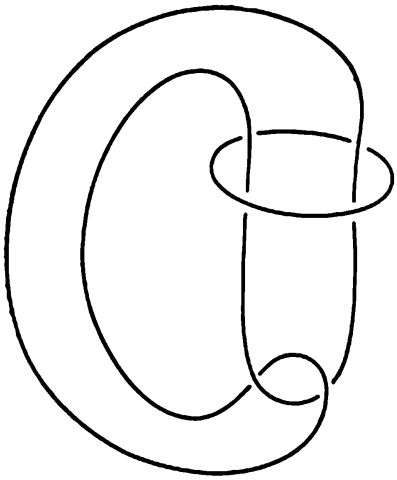

Fig. 18

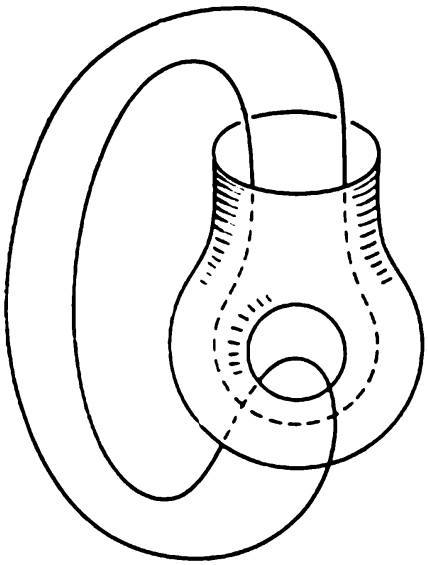

Fig. 19

Sur la figure 16 on a $z^2 = \Delta t^3$, $z^0 = \Delta t^1$, $\mathfrak{o}(z^2, z^0) = 1$. Les courbes des figures 17 à 19 doivent être considérées comme des lignes brisées dont les segments sont suffisamment petits. Les coefficients d'enlacement sont respectivement égaux à 2, 0, 0. Nous recommandons au lecteur de vérifier dans tous ces cas la validité des formules (2) et (2′) en construisant les chaînes correspondantes x_1^2 et x_2^2 ayant pour frontières z_1^1 et z_2^1. Si l'anneau des coefficients est I_2, alors sur la figure 17 on a

$$\mathfrak{o}(z_1^1, z_2^1) = 0.$$

2. Formules pour le calcul des coefficients d'enlacement. Dans ce numéro nous supposerons que les cycles z_1^0, z_{11}^0 et z_{12}^0 sont normaux dans le cas $p = 0$; les cycles z_2^q, z_{21}^q, z_{22}^q (dans le cas $p = n - 1$) ne le sont pas nécessairement.

On déduit de la définition des coefficients d'enlacement et des formules (1a) et (1b) les formules

$$\begin{aligned} &\mathfrak{o}((z_{11}^p \pm z_{12}^p), z_2^q) = \mathfrak{o}(z_{11}^p, z_2^q) \pm \mathfrak{o}(z_{12}^p, z_2^q), \\ &\mathfrak{o}(z_1^p, (z_{21}^q \pm z_{22}^q)) = \mathfrak{o}(z_1^p, z_{21}^q) \pm \mathfrak{o}(z_1^p, z_{22}^q), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathfrak{o}(az_1^p, z_2^q) = \mathfrak{o}(z_1^p, az_2^q) = a\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q). \tag{4}$$

Nous avons ensuite l'importante assertion suivante:

Théorème 1. *Si* $z_1^p \sim 0$ *dans* $R^n \setminus \tilde{z}_2^q$, *alors*

$$\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q) = \mathfrak{o}(z_2^q, z_1^p) = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n . Si $z_1^p \sim 0$ dans $R^n \setminus \tilde{z}_2^q$, il existe une chaîne $x^{p+1} \subseteq R^n \setminus \tilde{z}_2^q$ telle que $\Delta x^{p+1} = z_1^p$ et, par conséquent, $(x^{p+1} \times z_2^q) = 0$.

R e m a r q u e 1. En posant sur la figure plane (fig. 20)

$$z^0 = (x^0 - u^0) + (y^0 - v^0),$$

où u^0, v^0 sont des points à coefficient 1 situés en dehors du domaine limité par la lemniscate $\tilde{z}^1$, on a $\mathfrak{o}(z^1, z^0) = 0$. Le cycle z^1 est alors enlacé avec chacun des cycles normaux $x^0 - u^0$, $y^0 - v^0$ et

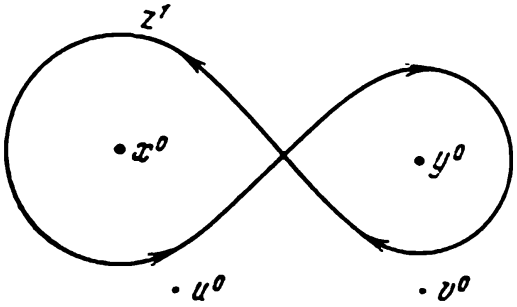

Fig. 20

$$z^1 \not\sim 0 \text{ dans } R^2 \setminus \tilde{z}^0, \; z^0 \not\sim 0 \text{ dans } R^2 \setminus \tilde{z}^1.$$

Ainsi, le théorème 1 dans le cas général n'a pas de réciproque. Dans l'espace de dimension 3 on peut obtenir un exemple analogue en remplaçant les couples de points $x^0 - u^0$, $y^0 - v^0$ par des cercles.

R e m a r q u e 2. On voit en considérant la figure 19, en vertu du théorème 1, que les courbes de la figure 18 ne sont pas enlacées pour $\mathfrak{A} = I$. D'une manière analogue, on peut vérifier que les courbes de la figure 14 ne sont pas enlacées pour $\mathfrak{A} = I_2$ en construisant un ruban de Moebius inscrit dans z^1, sans points communs avec $\widetilde{z^1}$ (sa frontière mod 2, tout aussi bien que dans le sens géométrique évident, sera $|z^1|$).

Dans le théorème 1 on peut, en outre de l'anneau des coefficients $\mathfrak{A}$ pour lequel on considérait les cycles z_1^p et z_2^q, envisager également un autre anneau $\mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{A}$. On a alors la proposition :

Si le cycle z_1^p est homologue à zéro dans $R^n \setminus \widetilde{z_2^q}$ pour l'anneau des coefficients $\mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q) = 0$.

Cette proposition découle directement du théorème 1 si l'on considère les cycles z_1^p et z_2^q comme étant des cycles pour l'anneau des coefficients $\mathfrak{A}'$ et que l'on se rappelle que l'élément nul des deux anneaux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ est resté le même.

Les corollaires les plus importants sont comme toujours les cas particuliers $\mathfrak{A} = I$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{R}$:

Si z_1^p et z_2^q sont des cycles entiers et $z_1^p \in \hat{H}^p(R^n \setminus \widetilde{z_2^q})$ ou $z_2^q \in \hat{H}^q(R^n \setminus \widetilde{z_1^p})$, alors $\mathfrak{o}(z_1^p, z_2^q) = 0$.

On en déduit :

Si $z_{11}^p \sim z_{12}^p$ dans $R^n \setminus \widetilde{z_2^q}$, pour le corps des rationnels $\mathfrak{R}$, alors $\mathfrak{o}(z_{11}^p, z_2^q) = \mathfrak{o}(z_{12}^p, z_2^q)$.

3. Enlacement des cycles convergents. Supposons que le compact Φ est un sous-ensemble fermé de R^n. Chaque ε-cycle du compact Φ est un cycle de l'ensemble ouvert $O(\Phi, \varepsilon) \subseteq R^n$. Par conséquent, si l'on considère, en outre du ε-cycle z^p du compact Φ, un autre cycle z^q, $p + q = n - 1$, de l'ensemble ouvert $\Gamma_\varepsilon = R^n \setminus \overline{O(\Phi, \varepsilon)}$, alors le coefficient d'enlacement $\mathfrak{o}(z^p, z^q)$ est défini.

Supposons que l'on se donne maintenant un cycle convergent *)

$$z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$$

du compact Φ et un cycle $z^q \in Z^q(\Gamma)$ de l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi$. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que le cycle z^q est un cycle de l'ensemble ouvert $\Gamma_\varepsilon = R^n \setminus \overline{O(\Phi, \varepsilon)}$. D'autre part, il découle de la définition d'un cycle convergent que tous les z_k^p pour k suffisamment grand sont les cycles de l'ensemble ouvert $O(\Phi, \varepsilon)$ et sont homologues entre eux dans cet ensemble. En vertu du théorème 1, on déduit maintenant que, pour tous les k suffisamment grands, le coefficient d'enlacement $\mathfrak{o}(z_k^p, z^q)$ est défini et a la même valeur que l'on appelle *coefficient*

*) Normal pour $p = 0$ dans le sens que tous ses cycles z_k^p, à partir d'un certain k, sont normaux.

d'enlacement $\mathfrak{o}(z^p, z^q)$ *du cycle convergent* z^p *du compact* Φ *avec le cycle* z^q *de l'ensemble ouvert* $\Gamma = R^n \setminus \Phi$

$$\mathfrak{o}(z^p, z^q) = \mathfrak{o}(z_k^p, z^q) \tag{5}$$

pour k *suffisamment grand.*

Soient maintenant Φ et Φ' deux ensembles compacts disjoints de R^n. Prenons un $\varepsilon > 0$ tel que les voisinages $O(\Phi, \varepsilon)$ et $O(\Phi', \varepsilon)$ soient également disjoints. Soient

$$z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$$

et

$$z^q = (z_1^q, z_2^q, \ldots, z_k^q, \ldots)$$

deux cycles convergents appartenant respectivement aux compacts Φ et Φ'. Pour tous les k suffisamment grands, les cycles z_k^p sont contenus dans $O(\Phi, \varepsilon)$ et y sont homologues entre eux, tandis que les cycles z_k^q sont situés dans $O(\Phi', \varepsilon)$ et y sont également homologues; par conséquent, pour tous les k suffisamment grands, le coefficient d'enlacement $\mathfrak{o}(z_k^p, z_k^q)$ a la même valeur que l'on appelle *coefficient d'enlacement* $\mathfrak{o}(z^p, z^q)$ *des cycles convergents* z^p *et* z^q.

Remarque 3. On a évidemment

$$\mathfrak{o}(z^p, z^q) = \mathfrak{o}(z_i^p, z_j^q)$$

pour tous les i et j suffisamment grands.

On déduit sans difficulté de ces définitions que les formules (3) et (4) sont satisfaites aussi bien pour les coefficients d'enlacement des cycles convergents du compact Φ avec les cycles de l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ que pour les coefficients d'enlacement des cycles convergents situés respectivement sur les compacts disjoints Φ et Φ'.

Ensuite, si

$$z^q \sim 0 \text{ dans } \Gamma$$

ou

$$z^p \sim 0 \text{ dans } \Phi,$$

alors

$$\mathfrak{o}(z^p, z^q) = 0.$$

Exactement de la même manière, pour deux cycles convergents z^p et z^q, situés respectivement dans deux compacts Φ et Φ' disjoints, on a

$$\mathfrak{o}(z^p, z^q) = 0$$

si au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée:

$$z^p \sim 0 \text{ dans } \Phi, \quad z^q \sim 0 \text{ dans } \Phi'.$$

D'où l'on déduit que si z_1^p et z_2^p sont des cycles convergents du compact Φ qui y sont homologues, et z^q un cycle convergent de $\Phi' \subseteq R^n \setminus \Phi$, alors

$$\mathfrak{o}(z_1^p, z^q) = \mathfrak{o}(z_2^p, z^q).$$

4. Théorème de déformation des cycles continus.

Théorème 2. *Soient z_0^p et z_0^q deux cycles continus de R^n donnés en représentation paramétrique*

$$z_0^p = (C_0 z_1^p, \ldots, C_0 z_k^p, \ldots),$$
$$z_0^q = (C_0' z_1^q, \ldots, C_0' z_k^q, \ldots).$$

Supposons données les déformations

$$\left.\begin{aligned} z_\theta^p &= (C_\theta z_1^p, C_\theta z_2^p, \ldots) \\ z_\theta^q &= (C_\theta' z_1^q, C_\theta' z_2^q, \ldots) \end{aligned}\right\} 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

et

de ces représentations paramétriques, telles que pour chaque valeur de θ on a des compacts disjoints Φ_θ et Φ_θ' dans R^n, qui sont supports respectivement des cycles continus z_θ^p et z_θ^q. Alors

$$\mathfrak{o}(z_0^p, z_0^q) = \mathfrak{o}(z_1^p, z_1^q).$$

Démonstration. Pour un θ_0, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, donné, construisons des voisinages $O(\Phi_{\theta_0})$, $O(\Phi_{\theta_0}')$ disjoints des ensembles Φ_{θ_0} et Φ_{θ_0}'; construisons ensuite un voisinage U_{θ_0} du point θ_0 dans le segment $[0, 1]$ tel que pour chaque $\theta \in U_{\theta_0}$ on ait $\Phi_\theta \subset O(\Phi_{\theta_0})$ et $\Phi_\theta' \subset O(\Phi_{\theta_0}')$. Alors en vertu du théorème 9″, p. 131, on a $z_\theta^p \sim z_{\theta_0}^p$ dans $O(\Phi_{\theta_0})$ et $z_\theta^q \sim z_{\theta_0}^q$ dans $O(\Phi_{\theta_0}')$. Par conséquent, d'après les résultats du numéro précédent, le nombre $\mathfrak{o}(z_\theta^p, z_\theta^q)$ conserve une valeur constante lorsque θ varie dans U_{θ_0}. Ceci étant vrai pour tout θ_0, le nombre $\mathfrak{o}(z_\theta^p, z_\theta^q)$ reste constant sur tout le segment $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et, par conséquent, $\mathfrak{o}(z_0^p, z_0^q) = \mathfrak{o}(z_1^p, z_1^q)$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 3. Ordre d'un point relativement à un cycle

En comparant la définition du coefficient d'enlacement avec celle de l'ordre d'un point relativement à un cycle, donnée au § 10, chapitre 2, nous voyons que l'ordre d'un point o relativement à un cycle z^{n-1} contenu dans R^n (et donc contenu dans un certain simplexe $Q^n \subset \overline{Q}^n \subset R^n$) est le coefficient d'enlacement

$$\mathfrak{o}(z^{n-1}, o);$$

le cycle z^{n-1} est alors soit un cycle d'un ensemble ouvert de R^n, soit un cycle convergent quelconque, en particulier, un cycle continu.

1. Ordre d'un point relativement à un cycle d'un ensemble ouvert. Supposons d'abord que z^{n-1} est un cycle d'un ensemble ouvert $Q^n \subset \overline{Q}^n \subset R^n$, $o \in Q^n \setminus \widetilde{z}^{n-1}$. Choisissons un point quelconque $o' \in R^n \setminus \overline{Q}^n$ et désignons par z^0 le cycle normal $o - o'$ de dimension nulle.

Alors, avant tout, il est évident que

$$\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(z^{n-1}, z^0).$$

Considérons plus en détails le cas où z^{n-1} est un cycle d'un ensemble ouvert $Q^n \subset R^n$ (en particulier, lorsque $z^{n-1} \in Z^{n-1}K$, où K est une triangulation du simplexe fermé $\overline{Q}^n$). Dans ce cas il sera commode de choisir le point $o' \in R^n \setminus \overline{Q}^n$ de sorte que le segment $\overline{oo'}$ soit en position générale avec le complexe $|z^{n-1}|$, i.e. qu'il coupe seulement les simplexes non dégénérés de dimension $n-1$ de ce complexe. Alors

$$\mathfrak{o}(z^{n-1}, z^0) = \mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = (x^n \times o), \tag{1}$$

où x^n est une chaîne quelconque de Q^n dont la frontière est z^{n-1} et x^n est en position générale relativement au point o (cette dernière condition signifie que le point o peut être contenu seulement dans des simplexes de dimension n non dégénérés du complexe $|x^n|$). Ceci est une première interprétation de l'ordre du point o relativement au cycle z^{n-1}.

On obtiendra une deuxième interprétation en comparant la formule $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(z^{n-1}, z^0)$, où $z^0 = o - o'$, avec la formule (2′) du paragraphe précédent, qui dans notre cas $p = 0$, $q = n - 1$ s'écrit

$$\mathfrak{o}(z^0, z^{n-1}) = -\mathfrak{o}(z^{n-1}, z^0). \tag{2}$$

Choisissons l'orientation (o, o') du segment $\overline{oo'}$. Puisque

$$\Delta(o, o') = o' - o = -z^0,$$

on a en vertu de la formule (2)

$$((o, o') \times z^{n-1}) = -\mathfrak{o}(z^0, z^{n-1}) = \mathfrak{o}(z^{n-1}, z^0) = \mathfrak{o}(z^{n-1}, o). \tag{3}$$

Supposons maintenant que $[o, \infty)$ est la demi-droite issue de o et passant par o'. Il est évident que pour tous les points o' de cette demi-droite, suffisamment éloignés du point o, l'indice d'intersection $([o, o') \times z^{n-1})$ prend une même valeur que nous pouvons donc désigner par $([o, \infty) \times z^{n-1})$.

La formule (3) peut donc s'écrire :

$$([o, \infty) \times z^{n-1}) = \mathfrak{o}(z^{n-1}, o). \tag{4}$$

Ainsi, *l'ordre d'un point o relativement à un cycle* $z^{n-1} \in Z^{n-1}(R^n \setminus o, \mathfrak{A})$ *est l'indice d'intersection* $([o, \infty) \times z^{n-1})$ *avec le cycle* z^{n-1} *de toute demi-droite issue du point o et étant en position générale relativement au cycle* z^{n-1}.

C'est là la deuxième interprétation de l'ordre d'un point.

2. Ordre d'un point relativement à un cycle convergent. Supposons donnés z^{n-1} un cycle convergent d'un compact $\Phi \subseteq R^n$ et un point $o \in \Gamma = R^n \setminus \Phi$; le coefficient d'enlacement $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$, qui est toujours défini dans nos conditions, sera justement l'ordre du point o relativement au cycle convergent z^{n-1}. En vertu du théorème 1 du paragraphe précédent, nous concluons : si pour deux points o et o' de l'ensemble Γ on a

5) $\quad o \sim o'$ dans Γ,

alors

$$\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(z^{n-1}, o').$$

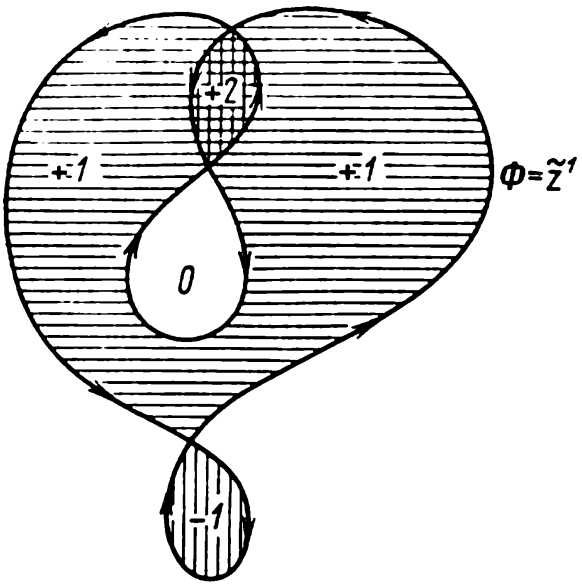

Fig. 21

Mais l'homologie (5) signifie que les points o et o' peuvent être joints dans Γ par une ligne brisée, i.e. qu'ils appartiennent à une même composante de l'ensemble Γ.

Ainsi, *si le compact* $\Phi \subset R^n$ *est le support d'un cycle convergent* z^{n-1}, *alors on peut définir pour tous les points* $o \in \Gamma$ *leur ordre* $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$ *relativement au cycle* z^{n-1}. *De plus, pour tous les points o d'une même composante de l'ensemble* Γ, *l'ordre* $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$ *prend la même valeur.*

Sur la figure 21 la courbe Φ est le support du cycle continu z^1 (la figure est plane, de sorte que $n = 2$). La figure représente les diverses valeurs, à savoir 0, 2, 1, —1, que peut prendre l'ordre $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$ suivant la composante de l'ensemble $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ qui contient o.

Remarque 1. D'après le précédent, on peut définir $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$ en plus de détails de la manière suivante :

Première interprétation. Soit

$$z^{n-1} = (z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \ldots, z_k^{n-1}, \ldots);$$

les chaînes x_k^n dont les frontières sont respectivement les cycles z_k^{n-1} ont été choisies en position générale relativement au point o ; alors, pour tous les k suffisamment grands, l'indice d'intersection $(x_k^n \times o)$ prend la même valeur égale à $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$.

Deuxième interprétation. Si k est suffisamment grand, alors $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = ([o, \infty) \times z_k^{n-1})$, où $[o, \infty)$ est une demi-droite quelconque issue du point o et en position générale avec z_k^{n-1}.

Remarque 2. Si $z^{n-1} \sim 0$ dans Φ, alors pour tous les $o \in \Gamma$ on a $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = 0$. On en déduit que si $z^{n-1} \sim z'^{n-1}$ dans Φ, alors pour tous les $o \in \Gamma$ on a $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(z'^{n-1}, o)$.

Remarque 3. Soit T^n un simplexe de dimension n qui contient le point o, et t^n une orientation de T^n. Alors $\mathfrak{o}(\Delta t^n, o) = \pm 1$, d'où l'on déduit que le cycle Δt^n n'est pas homologue à zéro dans $R^n \setminus o$.

3. Théorèmes de Poincaré-Bohl et de Rouchet. La remarque 2 possède le cas particulier suivant.

Théorème 3. *Si les applications continues f_0 et f_1 du compact X dans l'ensemble $R^n \setminus o$ sont homotopes entre elles dans $R^n \setminus o$, et z^{n-1} est un cycle convergent du compact X, alors*

$$\mathfrak{o}(f_0 z^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(f_1 z^{n-1}, o).$$

Démonstration. Si les applications f_0 et f_1 sont homotopes dans $R^n \setminus o$, elles sont homotopes également dans un certain compact $\Phi \subset R^n \setminus o$ (pour Φ on peut choisir par exemple un cube suffisamment grand d'où l'on a éliminé un voisinage suffisamment petit du point o). Par conséquent, $f_0 z^{n-1} \sim f_1 z^{n-1}$ dans $\Phi \subset R^n \setminus o$ et donc

$$\mathfrak{o}(f_0 z^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(f_1 z^{n-1}, o).$$

Le théorème est démontré.

Les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites, en particulier, si pour chaque point $p \in X$ le segment $\overline{(f_0(p), f_1(p))}$ est contenu dans $R^n \setminus o$ (il suffit alors de définir $f_\theta(p)$ comme un point qui divise le segment $\overline{(f_0(p), f_1(p))}$ dans le rapport $\theta : (1 - \theta)$ pour obtenir la déformation $f_\theta : 0 \leqslant \theta \leqslant 1$ qui joint f_0 à f_1). Le cas particulier du théorème 3 ainsi obtenu est connu sous le titre de *théorème de Poincaré-Bohl.*

On obtient un cas encore plus particulier du théorème 3 en exigeant que les applications f_0 et f_1 soient suffisamment proches l'une de l'autre, c'est-à-dire que l'on ait $\rho(f_0(p), f_1(p)) < \rho(f_0(p), o)$ pour tous les $p \in X$. Ce cas particulier du théorème 3 (et du théorème de Poincaré-Bohl) est parfois appelé *théorème de Rouchet.*

Remarquons enfin que les hypothèses du théorème 3 (et même du théorème de Poincaré-Bohl) sont satisfaites si f_0 et f_1 sont des applications du compact X dans une certaine sphère S^{n-1} (de centre o) qui vérifient la condition suivante : quel que soit $p \in X$, les points

$f_0(p)$ et $f_1(p)$ ne sont pas des points diamétralement opposés de la sphère S^{n-1}. Nous nous servirons de cette remarque en particulier dans le numéro suivant.

4. Homologies dans $R^n \setminus o$. Soit t^n un simplexe de dimension n de R^n orienté conformément à une orientation de R^n choisie une fois pour toutes. Désignons maintenant par o un point du simplexe $|t^n| = T^n$. Il découle de (1) que $\mathfrak{o}(\Delta t^n, o) = 1$.

Théorème 4. *Chaque cycle convergent z^{n-1} d'un compact quelconque $\Phi \subset R^n \setminus o$ satisfait à la condition*

$$z^{n-1} \sim \mathfrak{o}(z^{n-1}, o)\,\Delta t^n \text{ dans } R^n \setminus o. \tag{6}$$

Démonstration. Désignons par f_0 l'application identique du compact Φ et par f_1, la projection de ce compact de centre o dans $[T^n] \setminus T^n$, i.e. l'application qui fait correspondre à chaque point $x \in \Phi$ le point d'intersection de la demi-droite $\overrightarrow{ox}$ avec $[T^n] \setminus T^n$.

Les applications f_0 et f_1 satisfont aux hypothèses de la remarque faisant suite au théorème de Poincaré-Bohl, et donc

$$z^{n-1} \sim f_1 z^{n-1} \text{ dans } R^n \setminus o.$$

Puisque le cycle véritable $f_1 z^{n-1}$ est situé sur la frontière du simplexe T^n, on a sur cette frontière, et a fortiori dans $R^n \setminus o$, l'homologie $f_1 z^{n-1} \sim \gamma \Delta t^n$ et donc l'homologie $z^{n-1} \sim \gamma \Delta t^n$, d'où l'on déduit

$$\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(\gamma \Delta t^n, o) = \gamma\, \mathfrak{o}(\Delta t^n, o) = \gamma,$$

en vertu de la remarque 3 ci-dessus et du choix de l'orientation t^n.

Remarque 4. Puisque le cycle Δt^n n'est pas homologue à zéro dans $R^n \setminus o$, l'homologie $z^{n-1} \sim 0$ dans $R^n \setminus o$ implique en vertu du précédent que l'on a nécessairement $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = 0$.

On peut déduire ensuite du théorème 4 que si $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = 0$, alors

$$z^{n-1} \sim 0 \text{ dans } R^n \setminus o.$$

Autrement dit, l'égalité $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = 0$ est non seulement une condition nécessaire, mais aussi une condition suffisante pour que l'on ait $z^{n-1} \sim 0$ dans $R^n \setminus o$.

D'où l'on déduit à son tour le

Théorème 5. *Deux cycles convergents z_1^{n-1} et z_2^{n-1} dont les supports ne contiennent pas le point o sont homologues entre eux dans $R^n \setminus o$ s et seulement si l'on a $\mathfrak{o}(z_1^{n-1}, o) = \mathfrak{o}(z_2^{n-1}, o)$.*

5. Ordre d'un point relativement à un cycle comme degré de la projection centrale sur une sphère. Supposons à nouveau que $o \in T^n$ et que t^n est une orientation de T^n, conforme à l'orientation de R^n

Nous dirons que l'orientation Δt^n de la frontière du simplexe T^n est l'orientation *correspondant à l'orientation donnée de* R^n.

Remarque 5. Si S^{n-1} est une sphère de centre o, nous prenons pour orientation de cette sphère, correspondant à l'orientation donnée de R^n, celle que l'on obtient à partir de l'orientation Δt^n de la pseudo-variété $\overline{T}^n \setminus T^n$ par projection centrale de centre o.

Désignons comme précédemment par f_1 la projection de centre o du compact $\Phi \subset R^n \setminus o$ dans la frontière du simplexe T^n et par z^{n-1}, un cycle convergent de Φ. Puisque Δt^n est l'orientation de la pseudo-variété $\overline{T}^n \setminus T^n$, on a

$$f_1 z^{n-1} \sim \gamma \Delta t^n \text{ dans } R^n \setminus o, \tag{7}$$

et en vertu de la remarque 4, nécessairement $\gamma = \mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$. Mais d'après la définition même du degré d'une application, le nombre γ qui figure dans le deuxième membre de l'égalité (7) est le degré de l'application f_1 du cycle z^{n-1} dans la pseudo-variété orientée $\overline{T}^n \setminus T^n$ (le cycle d'orientation étant Δt^n). Ainsi :

Théorème 6. *L'ordre d'un point o relativement à un cycle convergent z^{n-1} situé dans $R^n \setminus o$ est égal au degré de la projection de centre o dans la frontière du simplexe $T^n \ni o$, cette frontière étant orientée conformément à l'orientation donnée de T^n.*

Remarque 6. Si z^{n-1} est un cycle continu, soit

$$z^{n-1} = f z_\alpha^{n-1}, \tag{8}$$

alors le degré de l'application f_1 du cycle z^{n-1} est évidemment égal au degré de l'application $f_1 f$ du cycle z^{n-1}. Donc :

Théorème 7. *L'ordre d'un point o relativement à un cycle continu z_α^{n-1} situé dans $R^n \setminus o$ et donné en représentation paramétrique* (8) *est égal au degré de l'application $f_1 f$ du cycle z_α^{n-1} dans la frontière du simplexe $T^n \ni o$, cette frontière ayant l'orientation correspondant à celle de R^n. En particulier, si le cycle* (8) *est situé sur $S^{n-1} = \overline{T}^n \setminus T^n$, i.e. f est une application dans S^{n-1}, alors $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$ coïncide avec le degré de l'application f du cycle z^{n-1} dans S^{n-1}.*

Exercice. Soit f une application continue du cercle orienté z^1 dans $R^2 \setminus o$. Démontrer que l'ordre du point o relativement à fz^1 coïncide avec l'ordre défini au § 10 du chapitre 2.

6. Théorème d'existence des racines. Supposons que z^{n-1} est un cycle convergent de dimension $n-1$ dans R^n, à support Φ_1 :

$$z^{n-1} = (z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \ldots, z_k^{n-1}, \ldots)$$

et o, un point de l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi_1$. Nous savons d'après la remarque 4 : si $z^{n-1} \sim 0$ dans $R^n \setminus o$, alors l'ordre $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o)$ est nul. D'où il découle directement le

Théorème 8 (théorème général d'existence des racines). *Soit z^{n-1} un cycle convergent à support Φ_1 homologue à zéro dans le compact $\Phi \supseteq \Phi_1$. Soit f une application continue du compact Φ dans R^n et $o \in R^n \setminus f\Phi_1$. Si $\mathfrak{o}(fz^{n-1}, o) \neq 0$, il existe au moins un point $x_0 \in \Phi$ tel que $fx_0 = o$* (de tels points seront appelés *racines de l'application f*).

En effet,

$$fz^{n-1} \sim 0 \text{ dans } f\Phi$$

et donc, si l'on avait

$$f\Phi \subset R^n \setminus o,$$

alors

$$fz^{n-1} \sim 0 \text{ dans } R^n \setminus o.$$

Par conséquent,

$$\mathfrak{o}(fz^{n-1}, o) = 0,$$

contrairement à nos hypothèses.

Dans la majorité des applications de ce théorème, z^{n-1} est un cycle d'une certaine triangulation K_0, homologue à zéro dans K_0. Les cas particuliers suivants sont particulièrement importants.

Soient $\overline{Q}$ une boule de dimension n, S^{n-1} la sphère qui la limite de dimension $n-1$, z^{n-1} une certaine orientation de cette sphère et f, une application de $\overline{Q}$ dans R^n, $o \in R^n \setminus fS^{n-1}$. Si $\mathfrak{o}(fz^{n-1}, o) \neq 0$, alors il existe au moins un point $x_0 \in \overline{Q}$ tel que $fx_0 = o$.

Remarque 7. Le deuxième cas particulier du théorème 8 se rapporte aux régions polyédrales de l'espace R^n.

Nous entendons dans ce chapitre par *région polyédrale* de l'espace R^n un ensemble de la forme $\Gamma = T^n \setminus (\overline{T}_1^n \cup \ldots \cup \overline{T}_\nu^n)$, les simplexes $\overline{T}_1^n, \ldots, \overline{T}_\nu^n$ de dimension n étant contenus dans le simplexe T^n et deux à deux disjoints.

Considérons une triangulation K_α du polyèdre $\overline{\Gamma}$. Choisissons des orientations $t_{\alpha_i}^n$ de tous les simplexes $|t_{\alpha_i}^n|$ de la triangulation K_α qui correspondent à l'orientation choisie t^n du simplexe T^n.

On appelle le cycle $\sum \Delta t_{\alpha_i}^n = z_\alpha^n$ *frontière de la région orientée* Γ (dans la triangulation K_α). Sous ces hypothèses, nous avons le cas particulier suivant du théorème 8.

Théorème 8_1. *Soient Γ une région polyédrale de l'espace R^n et f, une application continue du polyèdre $\overline{\Gamma}$ dans l'espace R^n. Soit o un point*

de l'espace R^n non contenu dans $f\tilde{z}_\alpha^{n-1}$, où z_α^{n-1} est la frontière de la région polyédrale Γ (voir ci-dessus). *Si $\mathfrak{o}(fz_\alpha^{n-1}, o) \neq 0$, alors il existe au moins un point de la région Γ que l'application f envoie sur le point o.*

7. Cas de l'application dans une sphère S^n.

Théorème 9. *Soient S_0^n et S^n deux sphères orientées et soit une application continue de la sphère S_0^n dans la sphère S^n de degré γ. Envisageons la sphère S^n comme étant l'espace euclidien R^n auquel on a adjoint le point u à l'infini :*

$$S^n = R^n \cup u.$$

Admettons que pour un certain point $o \in R^n$ nous avons

$$f^{-1}o \subseteq T_0^n,$$

où T_0^n est un simplexe de dimension n d'une triangulation K_0 de la sphère S_0^n ; désignons par t_0^n l'orientation du simplexe T_0^n qui coïncide avec l'orientation donnée de S_0^n.

Alors

$$\mathfrak{o}(f\Delta t_0^n, o) = \gamma. \tag{9}$$

D é m o n s t r a t i o n. Le premier et le deuxième membre de l'égalité (9) ne changeront pas de valeur si l'on remplace l'application continue f par une approximation simpliciale suffisamment proche. On peut donc supposer dès le début que f est une application simpliciale qui envoie une certaine subdivision K_α de la triangulation K_0 de la sphère S_0^n dans une triangulation K de la sphère S^n, o étant situé dans un certain simplexe $T^n \in K$ de dimension n. Désignons par t^n l'orientation de T^n identique avec celle de S^n.

Nous supposons que le point à l'infini u n'appartient pas à $\overline{T}^n$.

Désignons par $t_{\alpha i}^n$ les simplexes du complexe K_α obtenus par subdivision de T_0^n et orientés conformément à S_0^n. Soit enfin π (resp. ν) le nombre des simplexes $t_{\alpha i}^n$ pour lesquels $ft_{\alpha i}^n = t^n$ (resp. $ft_{\alpha i}^n = -t^n$). Alors nous avons $\gamma = \pi - \nu$. D'autre part, en posant $x_0^n = \sum t_{\alpha i}^n$, nous obtenons

$$\mathfrak{o}(f\Delta t_0^n, o) = \mathfrak{o}(f\Delta x_0^n, o) = \pi - \nu,$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 4. Théorèmes sur les cycles enlacés : théorèmes d'existence des cycles enlacés et « petit » théorème de dualité

1. Remarques préliminaires. Soit R^n un espace euclidien muni d'un système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cartésiennes orthonormées (et par conséquent, muni d'une certaine orientation). Choisissons

un $\varepsilon > 0$ quelconque et construisons tous les hyperplans de la forme $x_i = k\varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, où k est un nombre entier (positif ou négatif) quelconque. Ces plans décomposent l'espace R^n en cubes congruents, dont les arêtes sont de longueur ε et toutes les faces sont parallèles aux plans des coordonnées. Le complexe cellulaire dont les éléments sont ces cubes et toutes leurs faces (de dimension allant de 0 à $n - 1$), avec les orientations naturelles des cubes et les coefficients d'incidence correspondants, sera désigné par W_ε (parfois simplement par W).

Une translation déterminée par le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à $\varepsilon/2$ applique le complexe W_ε sur un complexe que nous désignerons par W'_ε. Les complexes W_ε et W'_ε se trouvent dans la relation suivante, que nous appellerons *relation de dualité*:

1°. Pour chaque entier p, $0 \leqslant p \leqslant n$, il existe une bijection entre les cellules de dimension p du complexe W_ε et les cellules de dimension $n - p$ du complexe W'_ε telle que deux cellules T_i^p et T'^{n-p}_i correspondantes (elles seront désignées par un même numéro et dites duales) possèdent un seul point commun (le centre commun des cubes T_i^p et T'^{n-p}_i), tandis que deux cellules T_i^p et T'^{n-p}_j à indices distincts sont à une distance positive l'une de l'autre.

2°. Si les adhérences des cellules T_h^r et T'^s_k ont des points communs et $r + s \neq n$, alors chacune de ces deux cellules T_h^r, T'^s_k possède une face duale à l'autre (d'où l'on déduit, en particulier, que $\overline{T}_h^r \cap \overline{T}'^s_k \neq \neq \Lambda$ implique nécessairement $r + s \geqslant n$).

Par la suite nous aurons toujours $p + q = n + 1$; toutes les chaînes considérées seront finies; une orientation quelconque, mais choisie une fois pour toutes, de la cellule T_i^p sera désignée par t_i^p; la cellule duale T'^{n-p}_i sera munie d'une telle orientation t'^{n-p}_i que l'indice d'intersection $(t'^{n-p}_i \times t_i^p)$ soit égal à $+1$; les chaînes de W seront désignées par x^p, x^{p+1}, etc. Si p est fixé, nous écrirons simplement x à la place de x^p; x' désignera toujours une chaîne de W' de dimension $n - p$ et z' désignera un cycle de W' de dimension $n - p - 1$, i.e. de dimension q.

En ce qui concerne les groupes de coefficients, nous allons considérer, dans les deux complexes W et W', les chaînes pour le même anneau de coefficients $\mathfrak{A}$ (qui sera un des anneaux *) I, I_m, $\mathfrak{R}$) de sorte que l'indice d'intersection d'une chaîne x^p du complexe W et d'une chaîne x' du complexe W' s'avère défini.

Enfin, en guise d'exception, nous entendrons dans ce paragraphe par « caractère » d'un groupe tout homomorphisme de ce groupe dans le groupe de coefficients correspondants **).

*) Et aussi les chaînes entières dans l'un d'eux et alors des chaînes quelconques dans l'autre, l'indice d'intersection étant toujours défini dans ce cas.

**) Les renseignements nécessaires sur ces caractères sont réunis dans le Supplément au présent chapitre.

Démontrons *) les propositions élémentaires suivantes.

Lemme 1. *Si* $(x' \times t_i^p) = 0$, *alors toutes les cellules de la chaîne* x' (*i.e. les cellules qui figurent dans cette chaîne avec des coefficients non nuls*) *sont situées à une distance positive de la cellule* T_i^p.

En effet, si $x' = \sum c_j t_j'^{n-p}$, alors

$$0 = (x' \times t_i^p) = \sum_j c_j (t_j'^{n-p} \times t_i^p) = c_i,$$

de sorte que la cellule $t_i'^{n-p}$, duale à la cellule t_i^p, ne figure pas dans la chaîne x', d'où l'on déduit notre assertion.

Lemme 2. *Soit* K *un certain sous-complexe fermé du complexe* W. *Supposons que pour toute chaîne* x^{p+1} *de dimension* $p+1$ *du complexe* K *et une certaine* x' *fixe on a*

$$(x' \times \Delta x^{p+1}) = 0.$$

Alors le cycle $z' = \Delta x'$ *est situé dans* $R^n \setminus \widetilde{K}$ (*où, comme toujours,* $\widetilde{K}$ *est le support du complexe* K).

En effet, en vertu de la théorie des intersections (voir § 1, p. 150), pour tout x^{p+1} on a la formule

$$(z' \times x^{p+1}) = (\Delta x' \times x^{p+1}) = \pm (x' \times \Delta x^{p+1}) = 0.$$

Donc, en particulier, pour tout $T_i^{p+1} \in K$

$$(z' \times t_i^{p+1}) = 0,$$

de sorte qu'en vertu du lemme 1 le cycle z' est à une distance positive de chaque cellule de dimension $p+1$ du complexe K et par conséquent (vu que la dimension de z' est $n-p-1$), aussi de toute cellule de ce complexe.

Lemme 3. *Soit* $\mathfrak{A}$ *un des groupes* I, I_m, $\mathfrak{R}$. *Soit* K *un sous-complexe fermé du complexe* W. *Chaque chaîne* $x' \in L^{n-p}(W', \mathfrak{A})$ *engendre un caractère* φ *du groupe* $L^p(K, \mathfrak{A})$ *de toutes les chaînes de dimension* p *du complexe* K, *pour le groupe de coefficients* $\mathfrak{A}$, φ *étant déterminé par la formule*

$$\varphi x^p = (x' \times x^p).$$

Ce lemme ne nécessite pas de démonstration.

Lemme 4 (réciproque du lemme 3). *Chaque caractère* φ *du groupe* $L^p(K, \mathfrak{A})$ *est engendré par une certaine chaîne* $x'_\varphi \in L^{n-p}(W', \mathfrak{A})$

*) Les éléments de la théorie des intersections exposés au § 1 du présent chapitre se rapportaient à l'intersection des simplexes et des chaînes simpliciales. Le lecteur saura retrouver sans difficulté les formules correspondantes pour les cellules et les chaînes des complexes W et W'.

suivant la formule

$$\varphi x^p = (x'_\varphi \times x^p).$$

Pour la démonstration choisissons un caractère φ du groupe $L^p(K, \mathfrak{A})$ et posons

$$x'_\varphi = \sum c'_j t'^{n-p}_j,$$

où

$$c'_j = \varphi t^p_j.$$

Alors

$$(x'_\varphi \times t^p_i) = \sum_j c'_j (t'^{n-p}_j \times t^p_i) = c'_i = \varphi t^p_i,$$

d'où l'on a pour chaque $x^p = \sum c_i t^p_i \in L^p(K, \mathfrak{A})$

$$\varphi x^p = \sum c_i \varphi t^p_i = \sum c_i c'_i$$

et

$$(x'_\varphi \times x^p) = \sum c_i (x'_\varphi \times t^p_i) = \sum c_i c'_i.$$

2. Théorèmes d'existence de cycles enlacés. Nous désignerons toujours par K un sous-complexe fermé quelconque du complexe W_ε; par $\Pi = \widetilde{K}$, son support; par Γ, l'ensemble ouvert $R^n \setminus \Pi$. Tous les cycles de dimension nulle seront supposés normaux (chapitre 1, p. 61).

Proposition 1'. *Supposons qu'un cycle z de dimension p du complexe K pour le groupe de coefficients $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{A} = I_m$, $m \geqslant 2$, n'est pas homologue à zéro dans K. Il existe alors dans Γ un cycle z' de dimension q (pour le même groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ que le cycle z), enlacé avec z* (comme toujours, $q = n - p - 1$).

Réciproquement, il existe pour chaque cycle z' de l'ensemble Γ, pour le groupe de coefficients $\mathfrak{A}$, un cycle z du complexe K enlacé avec z'.

Nous verrons maintenant que la première assertion de ce théorème est contenue dans les deux propositions suivantes.

Proposition $1'_0$. *Supposons que le système de cycles rationnels*

(1) $$z_1, \ldots, z_r$$

est homologiquement indépendant dans le complexe K. Il existe alors dans Γ un système de cycles rationnels

(2) $$z'_1, \ldots, z'_r$$

enlacé avec le système (1) *dans ce sens que*

(3) $$\mathfrak{o}(z'_i, z_j) = \delta_{ij} \begin{pmatrix} = 1 & \textit{pour } j = i, \\ = 0 & \textit{pour } j \neq i \end{pmatrix}$$

(*ce système est donc homologiquement indépendant dans* Γ).

Proposition $1'_m$. *Supposons que les cycles* (1) *sont des cycles du complexe K, pour l'anneau de coefficients I_m, et forment dans K une base homologique* mod m (voir chapitre 1, p. 52). *Supposons que l'ordre du cycle z_i (i.e. l'ordre de sa classe d'homologie considérée comme élément du groupe $\Delta^p(K, I_m)$) est le nombre m_i. Il existe alors dans Γ des cycles* (2), *pour les coefficients I_m, qui satisfont à la condition*

$$(3_m) \qquad \mathfrak{o}(z'_i, z_i) = \mathfrak{r}_m\left(\frac{m}{m_i}\right), \quad \mathfrak{o}(z'_j, z_i) = 0 \ \textit{pour} \ i \neq j.$$

Remarque 1. Les systèmes de cycles (1) et (2), ayant pour coefficients I_m et satisfaisant à la condition (3_m), sont dits *enlacés modulo m*. Si m est un nombre premier, alors $m_i = m$ et il suffit d'exiger que les cycles (1) soient homologiquement indépendants, puisque la notion de base homologique modulo un nombre premier m coïncide avec celle de système maximal de cycles homologiquement indépendant, et tout système homologiquement indépendant peut être complété jusqu'à un système maximal. On aura alors dans (3_m) la relation $\mathfrak{o}(z'_i, z_i) = 1$.

La proposition $1'_0$ contient évidemment la proposition $1'$ pour $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$. D'une manière analogue, on déduit facilement de la proposition $1'_m$ la première assertion de $1'$ pour I_m. En effet, si (1) est une base homologique modulo m (chapitre 1, p. 52) et $z \in Z^p(K, I_m)$, alors on a $z \sim \sum c_i z_i$ dans K pour I_m ; si le cycle z n'est pas homologue à zéro pour I_m, au moins un des coefficients c_i est différent de m_i (mod m) ; si par exemple $c_1 \neq m_1$ (mod m), alors pour $z' = z'_1$ on a

$$(4) \qquad \mathfrak{o}(z', z) = \sum_i c_i \mathfrak{o}(z'_1, z_i) = c_1 \mathfrak{o}(z'_1, z_1) \neq 0.$$

Passons à la démonstration des propositions $1'_0$ et $1'$. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que le système (1) des cycles rationnels est un système homologiquement indépendant maximal.

Nous savons (p. 41, remarque 6) qu'alors le système (1) fait partie d'une base rationnelle

$$(5) \qquad \mathfrak{B} = \{x_1^p, \ldots, x_{\tau^p-1}^p ; \ y_1^p, \ldots, y_{\sigma^p-1}^p ; \ z_1^p, \ldots, z_{\pi^p}^p ; \\ u_1^p, \ldots, u_{\tau^p}^p ; \ v_1^p, \ldots, v_{\sigma^p}^p\}$$

de sorte que les éléments

$$(6) \qquad z_h^p, \ u_k^p, \ v_l^p$$

de la base (5) forment une base rationnelle du groupe $Z^p(K, \mathfrak{R})$ et les éléments

$$(7) \qquad u_k^p, \ v_l^p$$

forment une base du groupe $H^p(K, \mathfrak{R})$.

Définissons maintenant les caractères rationnels φ_1, $i = 1, 2, \ldots, \pi^p$, du groupe $L^p(K, \mathfrak{R})$, en posant $\varphi_i z_i = 1$ et en exigeant que le caractère φ_i s'annule sur tous les autres éléments de la base (5) différents de z_i (en particulier, $\varphi_i = 0$ pour tous les u_k^p et v_l^p et donc pour tous les éléments du groupe $H^p(K, \mathfrak{R})$).

D'après le lemme 4 du numéro précédent, le caractère φ_i est engendré par une certaine chaîne $x_i' \in L^{n-p}(W', \mathfrak{R})$ suivant la formule

$$\varphi_i x^p = (x_i' \times x^p).$$

D'après la remarque précédente on a

$$(x_i' \times \Delta x^{p+1}) = 0$$

pour chaque chaîne $x^{p+1} \in L^{p+1}(K, \mathfrak{R})$ de dimension $p + 1$, d'où l'on déduit en vertu du lemme 2 du numéro 1 que le cycle $z_i' = \Delta x_i'$ est situé dans Γ. D'autre part,

$$\circ(z_i', z_j) = (x_i' \times z_j) = \varphi_i z_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, \pi^p,$$

de sorte que les cycles (1) forment effectivement un système enlacé avec le système (1).

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n 1_m. D'après les considérations analogues à celles qui terminent la démonstration précédente, il suffit de construire pour chaque $i = 1, 2, \ldots, \pi^p$ un caractère φ_i (i.e. dans le cas envisagé un homomorphisme $\varphi_i : L^p(K, I_m) \to I_m$) qui satisfait aux conditions

$$\varphi_i z_i = \tau_m\left(\frac{m}{m_i}\right), \quad \varphi_i z_j = 0 \text{ pour } j \neq i.$$

Cette construction s'effectue ainsi. Désignons par ζ la classe d'homologie du cycle z et construisons d'abord le caractère φ_i' du groupe $\Delta^r(K, I_m)$ en posant

$$\varphi_i'\zeta_i = \tau_m\left(\frac{m}{m_i}\right), \quad \varphi_i'\zeta_j = 0 \text{ pour } j \neq i.$$

Puisque ζ_i est d'ordre m_i, cette construction est possible (voir le Supplément à ce chapitre).

Posons maintenant $\varphi_i z = \varphi_i'\zeta$ pour tout $z \in \zeta$. Il reste à généraliser ce caractère du groupe $Z^p(K, I_m)$ au groupe $L^p(K, I_m)$, ce qui se fait suivant le théorème 4 du Supplément déjà cité.

Les propositions 1_0 et 1_m et donc la première assertion de la proposition 1′ sont démontrées.

D é m o n s t r a t i o n d e l a d e u x i è m e a s s e r t i o n d e 1′. Soit z' un cycle de dimension q dans Γ, non homologue à zéro dans Γ (le groupe des coefficients est $\mathfrak{R}$ ou I_m). Choisissons un voisinage $OP = O\widetilde{K}$ tel que le cycle z' n'ait pas de points communs avec

lui. Choisissons ensuite un voisinage O_1P situé à l'intérieur de OP si petit que tout cycle de O_1P soit homologue dans OP à un cycle du polyèdre P lui-même (ce qui est possible en vertu du corollaire du théorème de convergence, p. 127). Nous pouvons supposer que les voisinages OP et O_1P sont constitués de cubes d'un certain W_ε pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Enfin, désignons par Q un cube, constitué de cubes du même W_ε et contenant dans son intérieur tout aussi bien $[OP]$ que le cycle z'. Désignons par P' le polyèdre $Q \setminus O_1P$. Ce polyèdre est situé dans Γ, et donc le cycle z', n'étant pas homologue à zéro dans P', sera enlacé en vertu de la première assertion de la proposition 1′ (pour le polyèdre P') avec un certain cycle z_0^p situé dans $\Gamma' = R^n \setminus P' = (R^n \setminus Q) \cup O_1P$. Nous avons $z_0^p = z_1^p + z_2^p$, où z_1^p est situé dans O_1P, z_2^p, dans $R^n \setminus Q$ et $0 \neq \mathfrak{o}(z_0^p, z') = \mathfrak{o}(z_1^p, z') + \mathfrak{o}(z_2^p, z')$. Mais $\mathfrak{o}(z_2^p, z') = 0$ (puisque z' est contenu et homologue à zéro dans Q, tandis que z_2^p est en dehors de Q: nous faisons appel ici au fait que z' est un cycle normal dans le cas où il est de dimension nulle). Par conséquent $\mathfrak{o}(z_1^p, z') \neq 0$. Mais le cycle z_1^p est situé dans O_1P ; il est donc homologue dans OP à un certain cycle du polyèdre P (et donc du complexe K). Evidemment $\mathfrak{o}(z^p, z') = \mathfrak{o}(z_1^p, z') \neq 0$, ce qui termine la démonstration de l'assertion 1′.

De la proposition 1′ nous déduisons facilement la

Proposition 1 (premier lemme d'enlacement). *Supposons donné dans un compact $\Phi \subset R^n$ un cycle convergent*

$$z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots) \tag{8}$$

relativement à un des groupes de coefficients $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, I_m, $m \geqslant 2$, non homologue à zéro dans Φ pour $\mathfrak{A}$. On peut alors trouver dans $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ un cycle z^q, entier pour $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ et modulo m pour $\mathfrak{A} = I_m$, enlacé avec le cycle z^p et donc non homologue à zéro dans Γ (pour I et I_m respectivement).

Démonstration. En prenant un voisinage suffisamment petit $O\Phi$ de l'ensemble $\Phi \subseteq R^n$ et un nombre h suffisamment grand, on peut supposer que tous les cycles z_k^p, $k \geqslant h$, sont situés dans $O\Phi$, qu'ils y sont tous homologues entre eux et aucun d'eux n'est homologue à zéro dans $[O\Phi]$. On peut aussi supposer évidemment que le voisinage $O\Phi$ est constitué de cubes d'un certain W_ε. D'après la proposition 1′, il existe dans $R^n \setminus [O\Phi]$ un cycle polyédral, enlacé avec tous les z_k^p et donc avec le cycle convergent z^p, ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas des coefficients $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ et $\mathfrak{A} = I_m$, où m est un nombre premier, démontrons la

Spécification de la proposition 1. *Soit*

$$z_1^p, \ldots, z_r^p \tag{9}$$

un système de cycles convergents homologiquement indépendant dans le compact $\Phi \subset R^n$. *Alors il existe dans* $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ *un système*

$$z_1^q, \ldots, z_r^q \tag{10}$$

de cycles, enlacé avec le système (9) *dans ce sens que*

$$\mathfrak{o}(z_i^p, z_j^q) = \delta_{ij} \tag{11}$$

(*groupes de coefficients* $\mathfrak{R}$ *ou* I_m, m *étant premier*).

Démonstration. L'indépendance homologique des cycles véritables (9) signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel qu'aucune combinaison linéaire $\lambda_1 z_1^p + \ldots + \lambda_r z_r^p$ non triviale ne peut être ε-homologue à zéro dans Γ *). Il existe alors un voisinage polyédral P de l'ensemble Φ dans R^n tel que les cycles (9) sont homologiquement indépendants dans P.

En effet, choisissons $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{5}$ et désignons par P' le polyèdre constitué de tous les cubes du complexe $W_{\varepsilon'}$ qui possèdent des points communs avec Φ. Supposons que $\lambda_1 z_1^p + \ldots + \lambda_r z_r^p \sim 0$ dans P, les $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ n'étant pas tous nuls.

Si $z_i^p = (z_{i1}^p, z_{i2}^p, \ldots, z_{ik}^p, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ (où z_{ik}^p est une δ_k-chaîne du compact Φ, $\delta_k \to 0$), alors, pour k suffisamment grand, on a

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_{ik}^p = \Delta x^{p+1},$$

où x^{p+1} est une ε'-chaîne de P ; en remplaçant les sommets de la chaîne x^{p+1} par les points les plus proches de l'ensemble Φ, nous transformerons la chaîne x^{p+1} en une ε-chaîne y^{p+1} de l'ensemble Φ et nous aurons toujours $\Delta y^{p+1} = \sum_i \lambda_i z_{ik}^p$, ce qui est en contradiction avec l'indépendance homologique des cycles relativement aux ε-homologies de Φ.

Ainsi, les cycles (9) sont homologiquement indépendants dans le polyèdre P. On peut donc déduire des propositions 1_0 et 1_m l'existence dans $R^n \setminus P$ d'un système de cycles (10) enlacé avec (9), ce qu'il fallait démontrer.

La définition de l'enlacement d'un cycle véritable avec un cycle d'un ensemble ouvert nous sera également nécessaire. Soient $z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$ un cycle véritable (non nécessairement conver-

---

*) Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que cette définition de l'indépendance homologique est équivalente à la condition usuelle de l'indépendance, dans le groupe $\Delta^p(\Phi, \mathfrak{R})$, des éléments $\zeta_1^p, \ldots, \zeta_r^p$ qui sont les classes d'homologie des cycles $z_1^p, \ldots, z_r^p$.

gent) du compact $\Phi \subseteq R^n$ et z^q, un cycle de l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi$. Nous dirons que les cycles z^p et z^q sont *enlacés* si pour tous les k suffisamment grands on a $\mathfrak{o}(z_k^p, z^q) \neq 0$ *).

Proposition 2 (deuxième lemme d'enlacement). *Soit*

$$z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots) \tag{11'}$$

un cycle à coefficients variables du compact Φ (*i.e.* z_k^p *est un* δ_k*-cycle modulo* m_k, $\delta_k \to 0$). *Si le cycle* z^p *est* c o m p l è t e m e n t n o n h o m o l o g u e à z é r o d a n s Φ (*i.e. il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel qu'aucun des cycles* z_k^p *ne peut être la frontière dans* Φ *d'une* ε*-chaîne modulo* m_k), *alors il existe un voisinage* $O\Phi$ (*que l'on peut supposer polyédral*) *et des cycles de* $R^n \setminus [O\Phi]$

$$z_1^q, z_2^q, \ldots, z_k^q, \ldots \tag{12}$$

modulo m_k, *enlacés respectivement avec les cycles* z_k^p.

D é m o n s t r a t i o n. Nous pouvons admettre, sans restreindre la généralité, qu'il existe un tel voisinage polyédral $O\Phi$ de l'ensemble Φ, que tous les z_k^p sont situés dans $O\Phi$ et aucun d'eux n'est homologue à zéro dans le polyèdre $P = [O\Phi]$. Après cette remarque, la proposition 2 se déduit immédiatement de la proposition 1.

Proposition 3 (troisième lemme d'enlacement). *Supposons donné dans* $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ *un cycle* z^q *non homologue à zéro pour un des groupes de coefficients* $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ *ou* $\mathfrak{A} = I_m$, $m \geqslant 2$. *Il existe alors dans* Φ *un cycle convergent* (11') *enlacé avec* z^q, *pour le même groupe de coefficients* $\mathfrak{A}$.

En effet, prenons un voisinage $O\Phi$ constitué de cubes du complexe W_ε et si petit que z^q est en dehors de $[O\Phi]$. Prenons ensuite un autre voisinage $O_1\Phi$, $[O_1\Phi] \subseteq O\Phi$ (également constitué de cubes d'un complexe $W_{\varepsilon'}$ plus fin) si petit que tout cycle de $[O_1\Phi]$ est homologue dans $O\Phi$ à un certain cycle véritable du compact Φ. Puisque le cycle z^q n'est pas homologue à zéro dans $R^n \setminus [O_1\Phi]$, il existe dans $[O_1\Phi]$ un cycle z_1^p enlacé avec z^q. Le cycle z_1^p est homologue dans $O\Phi$ à un cycle convergent z^p du compact Φ, et z^p est donc également enlacé avec z^q, ce qu'il fallait démontrer.

On a une spécification analogue à celle de la proposition 1.

Spécification de la proposition 3. *Soit* $\mathfrak{A}$ *un des groupes de coefficients* $\mathfrak{R}$ *ou* I_m, *où* m *est un nombre premier. Supposons donné, dans l'ensemble* $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ *complémentaire au compact* $\Phi \subseteq R^n$, *un*

*) Si z^p est un cycle à coefficients variables, cette définition sous-entend que les coefficients d'enlacement $\mathfrak{o}(z_k^p, z^q)$ sont définis, ce qui a toujours lieu si, par exemple, z^q est un cycle entier.

système homologiquement indépendant de cycles

$$z_1^q, \ldots, z_r^q \tag{10}$$

pour le groupe de coefficients $\mathfrak{A}$. *Alors* Φ *contient un système de cycles convergents*

$$z_1^p, \ldots, z_r^p, \tag{9}$$

enlacé avec le système (10) *dans le sens des relations* (11) (*pour le même groupe de coefficients*).

Démonstration. Choisissons $\varepsilon > 0$ si petit que le polyèdre P, constitué de tous les cubes du complexe W_ε possédant des points communs avec Φ, soit situé entièrement en dehors des cycles (10). Considérons le cube Q, également constitué d'éléments de W_ε, si grand qu'il contient tout aussi bien le polyèdre P que tous les cycles (10). Choisissons un $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{5}$ si petit que tout cycle situé dans un $2\varepsilon'$-voisinage de l'ensemble Φ soit homologue à l'intérieur du polyèdre P à un certain cycle convergent du compact Φ.

Désignons par P' le polyèdre qui consiste de tous les cubes du complexe $W_{\varepsilon'}$ possédant des points communs avec Φ, et envisageons le polyèdre

$$P_0 = [Q \setminus P'].$$

Tous les cycles (10) sont situés dans ce polyèdre et y sont homologiquement indépendants. L'ensemble ouvert

$$R^n \setminus P_0 = \langle P' \cup (R^n \setminus Q) \rangle$$

possède donc un système de cycles

$$y_1^p, \ldots, y_r^p$$

enlacé avec le système (10). Chacun des cycles y_i^p est la somme $y_i^p = z_i'^p + z_i''^p$, dont le premier terme est un cycle $z_i'^p$, situé dans $P' \subseteq \subseteq Q$ (et homologue à zéro dans Q), et le deuxième $z_i''^p$ est un cycle situé en dehors de Q. Par conséquent, $\mathfrak{o}(z_i''^p, z_j^q) = 0$ et

$$\delta_{ij} = \mathfrak{o}(y_i^p, z_j^q) = \mathfrak{o}(z_i'^p, z_j^q).$$

Ainsi, le système (10) est enlacé avec le système

$$z_1'^p, \ldots, z_r'^p$$

de cycles situés dans P'. Mais d'après la construction du polyèdre P', chacun des cycles $z_i'^p$ qu'il contient est homologue dans P, et donc en dehors des cycles (10), à un certain cycle convergent z_i^p du com-

pact Φ et

$$\mathfrak{o}(z_i^p, z_j^q) = \mathfrak{o}(z_i'^p, z_j^q) = \delta_{ij},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Réunissons les spécifications des propositions 1 et 3. Nous obtenons l'importante proposition suivante.

Théorème 10. *Pour chaque système homologiquement indépendant de cycles $z_1^p, \ldots, z_r^p$ convergents du compact Φ (pour les groupes de coefficients $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{A} = I_m$, m étant premier), il existe un système enlacé de cycles $z_1^q, \ldots, z_r^q$ de l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ *). Réciproquement, pour tout système homologiquement indépendant de cycles $z_1^q, \ldots, z_r^q$ de l'ensemble Γ, il existe un système de cycles $z_1^p, \ldots, z_r^p$ du compact Φ enlacé avec celui-ci.*

3. Digression: dualité d'Alexander; théorème de Jordan-Brouwer. Introduisons maintenant la définition suivante. Nous dirons que le nombre de Betti $\pi^p\,\Phi$ de dimension p du compact Φ (resp. le nombre de Betti $\pi_m^p\Phi$ de dimension p de ce compact modulo m) est infini si, pour tout entier naturel r, il existe dans Φ un système homologiquement indépendant, consistant de r cycles véritables convergents de dimension p, pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$ (resp. I_m).

Nous dirons que $\pi^p\Phi = r$ (resp. $\pi_m^p\,\Phi = r$) s'il existe dans Φ un système homologiquement indépendant de r cycles de dimension p pour $\mathfrak{R}$ (resp. pour I_m) et r est le plus grand nombre qui possède cette propriété.

On peut définir d'une manière analogue les nombres de Betti $\pi^p\Gamma$ et $\pi_m^p\Gamma$ pour les groupes $\Delta^p K_\Gamma$ d'un ensemble ouvert (chap. 2, p. 145).

Rappelons aussi que tous les cycles de dimension nulle envisagés dans ce chapitre seront supposés normaux.

Le théorème 10 implique immédiatement (la démonstration est laissée au lecteur) le

Théorème 11 (dualité d'Alexander) **). *Pour tout compact $\Phi \subseteq R^n$ et $\Gamma = R^n \setminus \Phi$, on a (avec comme toujours $q = n - p - 1$)*

$$\pi^p\Phi = \pi^q\Gamma, \quad \pi_m^p\Phi = \pi_m^q\Gamma.$$

Puisque $\pi^0\Gamma$ et $\pi_m^0\Gamma$ sont égaux au nombre de composantes de l'ensemble Γ moins une, alors:

---

*) Pour le même groupe de coefficients $\mathfrak{A}$; si $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, on voit facilement que les cycles enlacés peuvent être choisis entiers.

**) Ce théorème a été démontré par Alexandrov dans [5] en 1927. J. Alexander l'a démontré en 1923 pour les polyèdres topologiques, où par polyèdre (en particulier, par pseudo-variété) topologique on entend un espace compact, homéomorphe à un polyèdre (respectivement, à une pseudo-variété).

Pour tout compact $\Phi \subset R^n$ on a la relation $\pi^{n-1}\Phi = \pi_m^{n-1}\Phi$ (quel que soit le nombre premier m).

Considérons le cas où $\Phi \subset R^n$ est une pseudo-variété (topologique) fermée de dimension $n - 1$. Alors $\pi_2^{n-1}\Phi = 1$; par conséquent, Φ divise l'espace R^n en deux domaines, et donc $\pi^{n-1}\Phi = 2$. On en déduit que Φ est une pseudo-variété orientable (car pour une pseudo-variété non orientable nous aurions $\pi^{n-1}\Phi = 0$).

Démontrons maintenant que pour tout sous-ensemble $\Phi' \subset \Phi$ fermé propre l'ensemble $R^n \setminus \Phi' = \Gamma'$ est connexe. Il suffit pour cela de montrer que deux points quelconques a et b de l'ensemble Γ' sont situés dans un de ses sous-ensembles connexes. Démontrons cette dernière assertion de la manière suivante. Soit K une triangulation (topologique) si fine de la pseudo-variété Φ que le sous-complexe $K' \subseteq K$ consistant de tous les simplexes du complexe K qui contiennent des points de Φ' est un sous-complexe propre du complexe K, et son espace sous-jacent ne contient aucun des points a et b. Alors $\pi^1 K' = 0$ et l'ensemble $R^n \setminus \widetilde{K}'$ est connexe en vertu du théorème d'Alexander. Puisque $a \cup b \subset R^n \setminus \widetilde{K}' \subseteq \Gamma'$, notre assertion est démontrée.

Il découle des faits démontrés que *toute pseudo-variété fermée $\Phi \subset R^n$ de dimension $n - 1$ est la frontière commune des deux domaines en lesquels elle partage l'espace R^n.*

Nous avons démontré toutes les parties de la célèbre et remarquable proposition qui suit.

Théorème 12 (de Jordan-Brouwer). *Chaque pseudo-variété fermée de dimension $n-1$ de l'espace euclidien de dimension n est orientable, et elle décompose l'espace en deux domaines dont elle est la frontière commune.*

4. Autres propositions sur l'enlacement des cycles. Au chapitre 5 nous aurons besoin des deux propositions suivantes.

Proposition 4 (quatrième lemme sur l'enlacement des cycles sous sa première forme). *Soit z^q un cycle entier de dimension q, situé dans $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ et non homologue à zéro dans Γ pour le groupe de coefficients I. Il existe alors un cycle exponentiel du compact Φ enlacé avec z^q:*

$$z^p = (z_1^p, \ldots, z_k^p, \ldots).$$

Démonstration. Soit z^q cycle de Γ, non homologue à zéro dans Γ pour I. Choisissons un cube Q de dimension n qui contient aussi bien le compact Φ que le cycle z^q dans son intérieur. Supposons d'abord que le cycle z^q est une frontière dans Γ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$ (i.e. est d'ordre fini $s \geqslant 2$). Le cycle z^q sera une frontière (pour $\mathfrak{R}$) également dans l'ensemble ouvert Γ' égal à l'intersection de Γ avec l'intérieur du cube Q. En effet,

prenons la chaîne x^{q+1} située dans Γ (pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$) de frontière z^q. Prenons le cube *) $\overline{Q'} \subset Q$, plus petit que Q mais contenant toujours z^q ainsi que Φ dans son intérieur. Prenons, d'autre part, un cube $Q'' \supset \overline{Q}$, de même centre que Q, si grand que la chaîne x^{q+1} est située dans son intérieur. Tous les trois cubes Q', Q, Q'' sont supposés concentriques. En considérant l'application linéaire sur les rayons issus du centre commun des cubes Q', Q et Q'' qui envoie le cube $\overline{Q}'' \setminus Q'$ sur le cube $\overline{Q} \setminus Q'$ et en la prolongeant par l'identité sur le cube Q', nous obtiendrons une application du cube $\overline{Q}''$ sur le cube $\overline{Q}$, identique dans $\overline{Q'}$ et appliquant la chaîne x^{q+1} dans une certaine chaîne de $\Gamma \cap Q' \subset \Gamma'$, qui a le même cycle z^q pour frontière.

Considérons les voisinages polyédraux

$$O_1\Phi \supset O_2\Phi \supset \ldots \supset O_k\Phi \supset \ldots, \ [O_{k+1}\Phi] \subset O_k\Phi$$

si petits que $[O_1\Phi]$ soit situé à l'intérieur du cube Q et que le cycle z^q ait le même ordre fini s dans tous les polyèdres $P_k = \overline{Q} \setminus O_k\Phi$. Alors, d'après la proposition 2′ du chapitre 1, il existe pour chaque k un nombre naturel σ_k tel que z^q n'est pas homologue à zéro mod s^{σ_k} dans P_k, étant donc enlacé avec un cycle **) z_k^p (mod s^{σ_k}) situé dans $O_k\Phi$. En prenant les cycles z_k^p dans des subdivisions suffisamment fines et en déplaçant leurs sommets dans des points proches de Φ, nous obtiendrons le cycle exponentiel z^p de Φ cherché, enlacé avec z^q.

Dans le cas où z^q n'est pas homologue à zéro dans Γ pour $\mathfrak{R}$, nous prendrons un entier quelconque $s \geqslant 2$. Alors, d'après la même proposition 2, chapitre 1, § 4, le cycle z^q ne sera pas homologue à zéro mod s^{σ_k} pour tout σ_k suffisamment grand. La suite du raisonnement est alors la même que dans le premier cas.

R e m a r q u e 2. On peut déduire de notre démonstration celle de la proposition 4: *si le cycle entier z^q n'est pas homologue à zéro dans Γ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$, on peut alors trouver dans Φ un cycle exponentiel z^p enlacé avec z^q pour toute dominante $s \geqslant 2$.*

Soit $z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$, où z_k^p est un cycle modulo $m_k = s^{\sigma_k}$, qui est exponentiel dans Φ et enlacé avec le cycle entier

*) Si Q est un polygone ouvert convexe, nous désignons son adhérence par $\overline{Q}$.

**) Strictement parlant, on ne peut d'abord déduire de la proposition 1 que l'existence d'un cycle y_k^p situé dans $R^n \setminus (\overline{Q} \setminus O_k\Phi) = O_k\Phi \cup (R^n \setminus \overline{Q})$ et enlacé avec z^{q+1}. Mais le cycle y_k^p est la somme de deux cycles z_k^p et u_k^p, dont z_k^p est situé dans $O_k\Phi$, tandis que u_k^p se trouve dans $R^n \setminus \overline{Q}$; puisque $z_k^q \sim 0$ dans Q, on a $\mathfrak{o}(z^q, u_k^p) = 0$ et par conséquent $\mathfrak{o}(z^q, z_k^p) = \mathfrak{o}(z^q, y_k^p) \neq 0$, i. e. z^q est enlacé avec z_k^p.

donné z^q situé dans Γ. Soit $z_k^p = \sum_i \alpha_k^i t_i^p$; en remplaçant chaque coefficient α_k^i non nul par le plus petit entier naturel a_k^i, $0 < a_k^i < m_k$ dont le résidu modulo m_k est α_k^i, nous envisagerons la fraction $\alpha_k'^i = \frac{a_k^i}{m_k}$ comme étant un élément du groupe $\mathfrak{R}_1$. Alors $z_k'^p = \sum \alpha_k'^i t_i^p$ est un cycle pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, tandis que

$$z'^p = (z_1'^p, z_2'^p, \ldots, z_k'^p, \ldots)$$

est un cycle véritable de Φ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, enlacé *) avec z^q. On peut ensuite appliquer le théorème de convergence pour obtenir dans Φ un cycle convergent pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, enlacé avec z^q.

On a ainsi la

Proposition 4′ (quatrième lemme d'enlacement dans sa deuxième forme). *Chaque cycle entier z^q de $\Gamma = R^n \setminus \Phi$, non homologue à zéro pour le groupe de coefficients I, est enlacé avec un certain cycle convergent du compact Φ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$.*

Remarque. Les principales propositions sur l'enlacement des cycles se généralisent au cas des cycles relatifs. Nous aurons par la suite besoin exclusivement du cas particulier suivant, où cette généralisation est automatique. On considère : le compact $\Phi \subset R^n$, la boule ouverte U^n de frontière S^{n-1}, un cycle véritable relatif z^p de $\Phi \cap [U^n]$ mod $(S^{n-1} \cap \Phi)$ et le cycle z^q de l'ensemble ouvert $U^n \cap (R^n \setminus \Phi)$. Sous ces hypothèses, toutes nos définitions restent valables, à quelques modifications évidentes près.

Proposition 5 (lemme local d'enlacement). *Soit $S^{n-1} \subset R^n$ une sphère **), et U, la boule qu'elle limite. Supposons donnés en outre dans R^n : le compact $\Phi = R^n \setminus \Gamma$ et le cycle z^q, situé dans $U \cap \Gamma$ où il n'est pas homologue à zéro (le groupe de coefficients est $\mathfrak{R}$, I_m ou I). Il existe alors dans $\Phi \cap [U]$ un cycle relatif z^p mod $(S^{n-1} \cap \Phi)$ enlacé avec z^q ; pour $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ et $\mathfrak{A} = I_m$ ce cycle est un cycle convergent (pour le même groupe de coefficients), tandis que pour $\mathfrak{A} = I$ il peut être, au choix, exponentiel ou bien convergent pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$. Si U coïncide avec R^n, le cycle z^p sera absolu.*

Démonstration. Posons $\Phi' = \Phi \cup S^{n-1}$. Alors le cycle z^q, n'étant pas homologue à zéro dans $\Gamma' = R^n \setminus \Phi'$, est enlacé en vertu des propositions 3, 4, 4′ avec un certain cycle véritable

$$z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$$

---

*) Dans le sens que $o(z^q, z_k'^p)$ est un élément non nul du groupe $\mathfrak{R}_1$ pour tout k.

**) Eventuellement de rayon infini.

du compact Φ'. Désignons par x_k^p le morceau du cycle z_k^p situé dans U, i.e. la chaîne consistant de tous les termes de la forme linéaire $z_k^p = \sum_i c_k^i t_i^p$ dont les simplexes t_i^p ont au moins un sommet dans U. La suite

$$x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_k^p, \ldots) \tag{13}$$

(« la chaîne véritable ») devient, après un déplacement infiniment petit *), un cycle de $\Phi \cap [U] \bmod \Phi \cap S^{n-1}$, enlacé avec z^q. Il est aisé de voir que c'est le cycle cherché. La proposition 5 est établie.

Enfin, pour pouvoir énoncer le théorème de Hopf (que nous abordons maintenant) et les théorèmes fondamentaux de la théorie homologique de la dimension des compacts sous leur forme la plus complète, nous aurons besoin des propositions sur les enlacements analogues à celles que nous venons de démontrer mais généralisées au groupe de coefficients $\varkappa$. En cours de route, nous démontrerons aussi une nouvelle proposition pour le groupe $\mathfrak{R}_1$. A savoir, la

Proposition 6. *Supposons que le compact $\Phi \subseteq R^n$ contient un cycle convergent z^p non homologue à zéro dans Φ pour les groupes de coefficients $\mathfrak{R}_1$ ou $\varkappa$. Alors l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ contient un cycle entier z^p, enlacé avec z^q:*

$$\mathfrak{o}(z^p, z^q) \neq 0.$$

Réciproquement, si $\Gamma \subseteq R^n$ possède un cycle entier z^q non homologue à zéro, alors $\Phi = R^n \setminus \Gamma$ contient un cycle convergent z^p, enlacé avec z^q, pour chacun des groupes $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$.

En ce qui concerne la deuxième partie de cette proposition, elle découle directement de la proposition 4′ qui affirme l'existence d'un cycle z^q de Φ, enlacé avec le cycle entier z^p pour $\mathfrak{R}_1$. En effet, si $\iota : \mathfrak{R}_1 \to \varkappa$ est une injection naturelle, le cycle ιz^p est enlacé avec z^q:

$$\mathfrak{o}(\iota z^p, z^q) = \iota\mathfrak{o}(z^p, z^q) \neq 0,$$

parce que ι est un monomorphisme.

Pour démontrer la première partie de la proposition 6, en suivant les raisonnements des n°s 1 et 2, commençons par les lemmes.

Lemme 1. *Si $(x' \times t^p) = 0$, toutes les cellules de la chaîne $x' \in L^{q+1}(W', \varkappa)$ sont à une distance positive de la cellule $|t^p|$.*

Lemme 2. *Si pour une chaîne bien déterminée $x' \in L^{q+1}(W', \varkappa)$ et une chaîne x^{p+1} quelconque d'un sous-complexe fini $K \subseteq W$ on a toujours $(x' \times \Delta x^{p+1}) = 0$, alors le cycle Δx^{p+1} est situé dans $R^n \setminus K$.*

*) Par *déplacement infiniment petit d'une chaîne véritable x^p*, nous entendons l'opération qui consiste à effectuer un δ_k-déplacement de chaque chaîne x_k^p, où $\delta_k \to 0$.

Lemme 3. *Chaque chaîne* $x' \in L^{n-p}(W', I)$ *engendre un homomorphisme continu du groupe* $L^p(K, \varkappa)$ *dans le groupe* $\varkappa$, *suivant la formule* $\varphi x = (x' \times x)$.

Lemme 4. *Chaque caractère continu* φ *du groupe* $L^p(K, \varkappa)$ *dans le groupe* $\varkappa$ *est engendré par une certaine chaîne* $x' \in L^{n-p}(W', I)$, *suivant la formule* $\varphi x = (x' \times x)$.

Les trois premiers lemmes ne nécessitent pas de nouvelle démonstration. Démontrons le quatrième.

Considérons le sous-groupe $L^p(|t_i^p|, \varkappa)$ du groupe $L^p(K, \varkappa)$; il est évidemment isomorphe au groupe $\varkappa$. L'homomorphisme φ, restreint à $L^p(|t_i^p|, \varkappa)$ est donc un homomorphisme du groupe $\varkappa$ sur lui-même. Mais chaque tel homomorphisme, conformément au Supplément du chapitre 1, est engendré par un nombre entier k_i, suivant la formule $\varphi(\alpha t_i^p) = k_i \alpha$ pour tout $\alpha \in \varkappa$.

Considérons la chaîne entière $x'_\varphi = \sum k_i t_i^{n-p}$. Pour chaque chaîne $x = \sum \alpha_j t_j^p$, nous avons

$$(x'_\varphi \times x) = \sum_{i,j} k_i \alpha_j (t_i^{n-p} \times t_j^p) = \sum_i k_i \alpha_i =$$
$$= \sum_i \varphi(\alpha_i t_i^p) = \varphi \sum_i \alpha_i t_i^p = \varphi x,$$

i. e. le résultat voulu. Le lemme est démontré.

Au contraire, il suffit de démontrer la première partie de la proposition 6 pour le groupe $\varkappa$. En effet, si cette assertion pour $\varkappa$ est déjà démontrée et z^p est un cycle du compact Φ, non homologue à zéro dans Φ pour $\mathfrak{R}_1$, alors ιz^p sera, en vertu de la remarque à la page 45, un cycle non homologue à zéro dans Φ pour $\varkappa$; il est donc enlacé, d'après notre hypothèse, avec un cycle entier.

Ainsi, démontrons pour le groupe $\varkappa$ la première assertion de la proposition 6. Le principe de la démonstration reste le même.

Soit

$$z^p = \{z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots\} \in Z^p(\Phi, \varkappa)$$

notre cycle. Considérons un voisinage $O\Phi$ du compact Φ constitué de cubes d'un certain W_ε, et tel que $O\Phi$ contient tous les cycles z_k^p, à partir d'un certain numéro n, et ces cycles n'y sont pas homologues à zéro, mais sont homologues entre eux.

Nous allons chercher dans $R^n \setminus \widetilde{K}$, $\widetilde{K} \supseteq |\widetilde{z}_n^p| \cup \Phi$ un cycle entier, enlacé avec le cycle z_n^p; il sera alors enlacé avec tous les cycles z_k^p pour $k \geqslant n$, i. e. avec le cycle z^p.

Indiquons la construction du cycle enlacé. Le cycle z_n^p n'est pas homologue à zéro par hypothèse, i. e. $z_n^p \notin H^p(K, \varkappa)$. D'après le

théorème 4′ du Supplément au chapitre 1, un caractère identiquement nul sur le groupe $H^p(K, \varkappa)$ peut être étendu au groupe $L^p(K, \varkappa)$ tout entier de manière à être non nul sur z_n^p. Désignons ce caractère par φ. Le raisonnement répète ensuite celui de la page 176 mot à mot.

§ 5. Théorèmes de Hopf

1. Enoncé du théorème de Hopf. Le principal but de ce paragraphe est l'exposé d'une démonstration élémentaire du théorème de Hopf sur les applications essentielles *) d'un polyèdre de dimension n sur un simplexe fermé de dimension n, sous la forme homologique (« Δ-forme ») que lui avait conféré son auteur.

Désignons par Q, Q_0 des simplexes de dimension n de l'espace R^n, par $\bar{Q}$, $\bar{Q}_0$, leurs adhérences; par $S^{n-1} = \bar{Q} \setminus Q$, $S_0^{n-1} = \bar{Q}_0 \setminus Q_0$, leurs frontières (des sphères). Nous supposerons que le simplexe $\bar{Q}_0$ est à l'intérieur du simplexe $\bar{Q}$ et lui est homothétique par une homothétie dont le centre o est le centre commun des deux simplexes. Avec ces notations, il s'agira du théorème suivant.

Théorème 13. *Soit φ une application essentielle du polyèdre $X = \tilde{K}$ de dimension n sur le simplexe $\bar{Q}$. Supposons donné un sous-complexe $K_0 \subseteq K$ tel que le polyèdre $\Phi = \tilde{K}_0$ contient un voisinage de l'ensemble $\varphi^{-1}S^{n-1}$ et en même temps $\varphi\Phi \subset \bar{Q} \setminus \bar{Q}_0$. Il existe alors dans le complexe K un cycle z^n mod K_0, modulo un certain m, dont l'image par l'application φ recouvre le point o avec degré $\gamma \neq 0$.*

Remarque. Un théorème analogue pour les groupes de coefficients $\mathfrak{R}_1$ et $\varkappa$ est également valable.

Théorème 13′. *Soit φ une application essentielle du polyèdre $X = \tilde{K}$ sur le simplexe $\bar{Q}$. Soit $K_0 \subseteq K$ un complexe tel que le polyèdre $\Phi = \tilde{K}_0$ contient un voisinage de l'ensemble $\varphi^{-1}S^{n-1}$ et en même temps $\varphi\Phi \subseteq \bar{Q} \setminus \bar{Q}_0$. Le complexe K possède alors des cycles z_1^n mod K_0 et $z_\varkappa^n$ mod K_0, pour les groupes de coefficients $\mathfrak{R}_1$ et $\varkappa$ respectivement dont les images par l'application φ recouvrent le point o avec les degrés $\gamma_1 \neq 0$ et $\gamma_\varkappa \neq 0$.*

Nous montrerons maintenant sans difficulté que le théorème 13′ est une conséquence du théorème 13.

Supposons en effet que K comporte un cycle relatif z^n mod K_0, modulo un certain entier $m \geqslant 2$, et que l'image de ce cycle par l'application φ recouvre le point o avec degré $\gamma \neq 0$. Considérons le

---

*) [AP], chapitre 3, p. 224.

monomorphisme $\mathfrak{r}_1^{(m)} : I_m \to \mathfrak{R}_1$ du groupe I_m dans le groupe $\mathfrak{R}_1$, défini au chapitre 1, p. 35. En vertu de la remarque (chapitre 2, p. 146) concernant les degrés γ, γ_1 respectifs des cycles z^n et $\mathfrak{r}_1^{(m)} z^n$ par l'application φ au point o on a

$$\mathfrak{r}_1^{(m)}\gamma = \gamma_1.$$

Mais, par hypothèse, $\gamma \neq 0$ et $\mathfrak{r}_1^{(m)}$ est injectif, on a donc également $\gamma_1 \neq 0$. Le cycle relativement au groupe $\mathfrak{R}_1$ est ainsi trouvé. D'une manière analogue le cycle $\iota\mathfrak{r}_1^{(m)} z^n$ recouvrira le point o avec un degré non nul $\gamma_\varkappa = \iota\gamma_1 = \mathfrak{r}_1^{(m)}\gamma$, où $\iota : \mathfrak{R}_1 \to \varkappa$ est le monomorphisme naturel du groupe $\mathfrak{R}_1$ dans $\varkappa$.

Le théorème 13 a été démontré en 1930 par Hopf dans une lettre à P. Alexandrov, publiée dans le « Matematitcheski Sbornik » (v. 37, p. 53 et sq.). Sous une forme améliorée, la démonstration a été reprise par Hopf dans son livre *Topologie* 1, 1935, écrit conjointement avec P. Alexandrov. C'est cette démonstration classique, remarquable par la force et la clarté de l'idée géométrique sur laquelle elle se fonde, qui sera exposée ici (avec seulement quelques modifications d'ordre rédactionnel).

2. Réduction du théorème 13 au « théorème d'extension des applications ». Posons le problème suivant.

Problème d'extension des applications. Supposons donnés une triangulation K^n du polyèdre X et un sous-complexe fermé K_0 de cette triangulation ; soit f une application du polyèdre $\widetilde{K}_0$ dans $\overline{Q} \setminus o$. Il s'agit d'étendre l'application f à tout le polyèdre X dans $\overline{Q} \setminus o$ (application F).

On a le

Théorème 14. *Pour que le problème d'extension énoncé ci-dessus possède une solution (i.e. pour que l'application F existe), il est nécessaire et suffisant que la condition suivante de Kronecker-Hopf soit satisfaite : pour chaque cycle z^{n-1} (modulo m, pour tout $m \geqslant 2$), situé dans K_0 et homologue à zéro dans K, on a la relation*

$$\mathfrak{o}\,(fz^{n-1},\ o) = 0.$$

La nécessité de la condition de Kronecker-Hopf pour la résolubilité du problème est évidente : si l'application F du polyèdre X dans $\overline{Q} \setminus o$ existe, alors il existe une chaîne $y^n = Fx^n$ située dans $\overline{Q} \setminus o$ et dont le cycle fz^{n-1} est la frontière ; mais alors

$$\mathfrak{o}\,(fz^{n-1},\ o) = (y^n \times o) = 0.$$

La suffisance de la condition de Kronecker-Hopf est par contre un important fait géométrique, difficile à démontrer. La démonstration sera effectuée en plusieurs étapes et occupera la plus grande

partie du présent paragraphe. Mais avant d'en aborder l'exposé, montrons qu'ayant démontré le théorème 14, nous aurons alors démontré le théorème 13, i.e. résolu notre problème principal. Supposons donc le théorème 14 démontré.

Pour la démonstration du théorème 13, supposons le contraire, i.e. que sous les hypothèses du théorème 13 le cycle relatif z^n, dont l'existence est affirmée par le théorème, n'existe pas. Prenons un cycle quelconque z^{n-1} du complexe K_0 (modulo un certain m), homologue à zéro dans K^n. Soit x^n une chaîne ayant le cycle z^{n-1} pour frontière. D'après notre hypothèse, le degré d'application de la chaîne x^n sur $\overline{Q}$ au point o est nul ; mais ce degré est égal à $\mathfrak{o}\,(fz^{n-1}, o)$ et par conséquent la condition de Kronecker-Hopf est satisfaite pour la restriction de l'application f à $\widetilde{K}_0$, de sorte qu'il existe une application F du polyèdre X dans $\overline{Q} \setminus o$, qui coïncide avec l'application f sur $\widetilde{K}_0$, et à plus forte raison sur $f^{-1}S$. Mais l'existence d'une telle application contredit l'hypothèse d'essentialité de l'application f. Le théorème 13 est démontré. Il reste donc à démontrer le théorème 14 (plus précisément, que la condition de Kronecker-Hopf est suffisante pour résoudre le problème d'extension).

3. Réduction du théorème 14 au théorème 15. Introduisons dans $\overline{Q}$ un « système de coordonnées polaires à pôle au point o », à savoir, faisons correspondre à chaque point $y \in \overline{Q}$, en qualité de « coordonnées polaires », sa distance r du point o et le point φ d'intersection de la demi-droite $\overrightarrow{oy}$ avec la sphère S^{n-1}. Alors l'application f du polyèdre $\widetilde{K}_0$ dans $\overline{Q}$ est donnée sous forme de fonctions $r = r\,(x)$ et $\varphi = \varphi\,(x)$, définies pour tout $x \in \widetilde{K}_0$, les valeurs de la fonction $r\,(x)$ étant des nombres positifs, tandis que φ est une application du polyèdre $\widetilde{K}$ dans S^{n-1}. Le problème d'extension de l'application f à tout le polyèdre $\widetilde{K}$ équivaut à la réunion de deux problèmes analogues pour les fonctions $r\,(x)$ et $\varphi\,(x)$. Le premier de ces problèmes se résout par une simple application du théorème de Brouwer-Urysohn. En ce qui concerne le second, en supposant la sphère S^{n-1} orientée *), remarquons avant tout que $\mathfrak{o}\,(fz^{n-1}, o)$ n'est autre que le degré de l'application φ du cycle z^{n-1} dans S^{n-1}. Par conséquent, la suffisance de la condition de Kronecker-Hopf pour que l'application φ du polyèdre $\widetilde{K}_0$ dans S^{n-1} s'étende à tout le polyèdre dans S^{n-1}, est précisément l'assertion suivante.

Théorème 15. *Supposons donnés: un polyèdre $\widetilde{K}$ de dimension n, un sous-complexe fermé $K_0 \subseteq K$ et une application φ du polyèdre $\widetilde{K}_0$*

*) L'orientation de la sphère S^{n-1} est définie par celle du simplexe $\overline{Q}$.

dans S^{n-1}, qui envoie tout cycle z^{n-1} de dimension $n-1$ (modulo $m \geqslant 2$ quelconque) du complexe K_0 dans S^{n-1} avec un degré nul *). *Alors l'application φ du polyèdre $\widetilde{K}_0$ peut être étendue à tout le polyèdre $\widetilde{K}$ dans la sphère S^{n-1}.*

Ainsi, pour démontrer le théorème 13, il suffit de démontrer le théorème 15. Commençons cette démonstration par une série de lemmes élémentaires.

4. Lemmes élémentaires.

Lemme 1. *Une application f de la frontière S^{n-1} d'un simplexe Q dans le compact Y peut être étendue à tout le simplexe fermé $\overline{Q}$ qu'on applique dans Y, si et seulement si l'application f de l'ensemble S^{n-1} dans Y est homotope à l'application constante.*

Démonstration. Désignons par x un point variable de la sphère S^{n-1}, par x_1, le barycentre du simplexe Q, et par x_θ, où $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, le point qui divise le segment $\overrightarrow{xx_1}$ dans le rapport $\theta : (1-\theta)$.

Si l'application f peut être prolongée à une application F de tout le simplexe $\overline{Q}$ dans Y, posons

$$f(x, \theta) = F(x_\theta). \tag{1}$$

Il est évident que $f(x, \theta)$ est une homotopie qui joint f à l'application f_1 faisant correspondre le point $y_0 = F(x_1)$ à tous les points de la sphère S^{n-1}.

Réciproquement, si une telle homotopie existe, on obtient l'extension de l'application f à une application F de tout le simplexe $\overline{Q}$ dans Y en lisant l'égalité (1) de droite à gauche. Le lemme 1 est démontré.

Lemme 2. *Soient f_0 et f_1 deux applications du compact X dans la sphère S^n. Supposons qu'il existe dans S^n un sous-ensemble ouvert non vide Γ qui vérifie la propriété suivante: pour chaque point $y \in \Gamma$ les ensembles $f_0^{-1}y$ et $f_1^{-1}y$ sont identiques. Les applications f_0 et f_1 sont alors homotopes entre elles.*

Démonstration. A l'aide d'une projection stéréographique, nous pouvons identifier la sphère S^n avec l'espace euclidien R^n auquel a été ajouté un point à l'infini $u \in \Gamma$. Posons $A = f_0^{-1}u = f_1^{-1}u$. Pour chaque point $x \in X \setminus A$, désignons par $f(x, \theta)$ le point qui divise le segment $\overrightarrow{f_0(x) f_1(x)}$ dans le rapport $\theta : (1-\theta)$ (comme toujours, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$). Ceci nous donne en particulier, pour tous les $x \in f_0^{-1}(\Gamma) \setminus A$,

$$f(x, \theta) = f_0(x) = f_1(x).$$

*) Autrement dit : le cycle (véritable) φz^{n-1} est homologue à zéro dans S^{n-1}.

Par conséquent, en posant pour les points $x \in A$

$$f(x, \theta) = f_0(x) = f_1(x) \text{ quel que soit } \theta,$$

nous obtenons l'homotopie désirée $f(x, \theta)$ qui joint $f_0(x)$ et $f_1(x)$.

Lemme 3. *Pour $n \geqslant 2$ supposons donnés: l'application f_0 de la sphère X de dimension n dans une sphère Y de même dimension et un point $y_0 \in Y$. Il existe alors une application f_ν de X dans Y, homotope à f_0 et telle que l'ensemble $A_\nu = f_\nu^{-1} y_0$ est entièrement contenu dans un simplexe sphérique $\overline{Q}^n$, l'image $f_\nu(\overline{Q}^n)$ étant un sous-ensemble propre de la sphère Y.*

Démonstration. Puisque toute application d'un polyèdre dans un autre est homotope à une application simpliciale, on peut supposer dès le début, sans perte de généralité, que f_0 est une application simpliciale d'une triangulation K_α de la sphère X dans une triangulation K_β de la sphère Y. Nous pouvons ensuite admettre que le point y_0 est situé à l'intérieur d'un simplexe de dimension n du complexe K_β, l'ensemble $A_0 = f_0^{-1} y_0$ étant donc fini. Choisissons un point $v \in Y$, également situé à l'intérieur d'un simplexe de dimension n du complexe K_β; l'ensemble $f_0^{-1} v$ est également fini. Envisageons les sphères X et Y comme des espaces euclidiens X' et Y' munis de points à l'infini u et v, et

$$u \in X \setminus (f_0^{-1} y_0 \cup f_0^{-1} v).$$

Choisissons enfin un simplexe $\overline{T} \subset X'$ de dimension n tel que

$$f_0 \overline{T} \subset Y'.$$

Supposons que le point $x_0 \in A_0$ n'est pas situé dans T. On peut alors choisir un point x' de T tel que le segment $\overrightarrow{x_0 x'}$ n'a aucun point commun avec $f_0^{-1} v$ (ici nous faisons appel à l'hypothèse $n \geqslant 2$). Le segment $\overrightarrow{x_0 x'}$ peut être inclus dans l'intérieur d'un certain simplexe $\overline{T}_1 \subset X' \setminus f_0^{-1} v$ de dimension n tel que

$$f_0 \overline{T}_1 \subset Y',$$

en outre, on peut choisir $\overline{T}_1$ de telle manière qu'aucun point de l'ensemble A_0 ne soit contenu sur la frontière de $\overline{T}_1$. Définissons l'application f_1 de X dans Y de la manière suivante : aux points $x \in X \setminus \overline{T}_1$ posons $f_1 x = f_0 x$; ensuite, $f_1 x' = y_0$ et enfin, sur chaque segment $\overrightarrow{x' x}$, $x \in S$ où $S = \overline{T}_1 \setminus T_1$, définissons f_1 comme l'application linéaire du segment $\overrightarrow{x' x}$ sur le segment $\overrightarrow{y_0 f_0(x)} \subset Y'$ (ce dernier ne se réduit pas à un seul point, car pour $x \in S$ on a par construction $f_0(x) \neq y_0$). Puisque f_0 et f_1 ne diffèrent qu'à l'intérieur du simplexe $\overline{T}_1$ et puisque $f_0 \overline{T}_1$ et $f_1 \overline{T}_1$ sont des ensembles fermés bornés de Y',

l'ensemble $\Gamma = Y \setminus (f_0\overline{T}_1 \cup f_1\overline{T}_1)$ satisfait aux hypothèses du lemme 2, et les applications f_0 et f_1 sont homotopes en vertu de ce lemme. Mais le nombre de points de l'ensemble fini $f_1^{-1}y_0$ situés en dehors de $\overline{T}$ est égal au nombre de points de l'ensemble $f_0^{-1}y_0$ situés en dehors de $\overline{T}$, moins un point. Par conséquent, en reprenant notre construction un nombre fini de fois, nous obtiendrons une application f_ν, homotope à l'application f_0 et telle que l'ensemble $f_\nu^{-1}y_0 = A_\nu$ tout entier est à l'intérieur de T. Alors l'image du simplexe $\overline{T}$ par l'application f_ν reste à l'intérieur de Y', formant donc un sous-ensemble propre de la sphère Y. Le lemme 3 est ainsi démontré.

5. **Le cas particulier $K^n = [Q^n]$.** Passons à la démonstration du théorème 15. Occupons-nous d'abord de son cas particulier où $K^n = [Q^n]$ est l'adhérence combinatoire du simplexe Q^n *) et $K_0 = [Q^n] \setminus Q^n$. Effectuons la démonstration par récurrence sur n; par nos raisonnements nous démontrerons en même temps le théorème 14 dans ce cas particulier tout aussi bien que le théorème 16 énoncé ci-dessous. Ainsi, il s'agira de la démonstration simultanée des trois propositions suivantes, dans lesquelles, par comparaison aux énoncés des théorèmes 13 et 14, le nombre n a été remplacé par $n + 1$, par souci de commodité.

Théorème 14_0^n. *Soit f une application de la frontière $\widetilde{\Delta x}^{n+1}$ du simplexe orienté x^{n+1} de dimension $n + 1$ dans l'ensemble $Y^{n+1} \setminus o$, où $\overline{Y}^{n+1}$ est un simplexe fermé de dimension $n + 1$ et o, son barycentre;* ***si***

$$\mathfrak{o}\,(f\Delta x^{n+1},\ o) = 0,$$

l'application peut être étendue au simplexe $\widetilde{x}^{n+1}$ tout entier.

Théorème 15_0^n. *Chaque application de degré zéro de la frontière $\widetilde{\Delta x}^{n+1}$ d'un simplexe orienté x^{n+1} dans la sphère S^n peut être étendue au simplexe fermé entier $\widetilde{x}^{n+1}$ dans S^n.*

Théorème 16^n. *Soit f une application de degré zéro de la sphère S^n dans la sphère Σ^n (de dimension n). L'application f est alors homotope à l'application constante* **).

La démonstration de ces trois théorèmes se ramène à celle des quatre assertions suivantes:

a) *les théorèmes* 16^0 *et* 16^1 *sont vérifiés*;

b) *le théorème* 16^n *implique le théorème* 15_0^n;

---

*) I. e. le complexe consistant de ce simplexe et de toutes ses faces.

**) Nous voyons que dans les cas particuliers 14_0 et 15_0 des théorèmes 14 et 15 (ainsi que dans le théorème 16) on prend en guise de groupe de coefficients seulement le groupe I.

c) *le théorème* 15_0^n *implique le théorème* 14_0^n;

d) *le théorème* 14_0^n *implique le théorème* 16^{n+1}.

Démonstration de l'assertion a). Puisque l'application d'une sphère orientée de dimension nulle $S^0 = e_1 - e_0$ dans une sphère orientée de dimension nulle $\Sigma^0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ est de degré zéro seulement si les deux sommets e_0 et e_1 ont pour image un même sommet (ε_1 ou ε_0), le théorème 16^0 est trivialement vérifié.

Le théorème 16^1 exprime un fait élémentaire qui se rapporte aux applications d'un cercle dans un autre. On peut trouver une démonstration détaillée, par exemple, dans [TC], chap. 2, [2 : 51].

Pour que notre exposé soit complet, nous donnerons ici une esquisse de la démonstration dont les détails seront facilement retrouvés par le lecteur.

Soient S et Σ deux copies du cercle de rayon unité, situé dans le plan R^2, muni d'un système de coordonnées polaires relativement auxquelles les équations des cercles sont $r = 1$. Fixons une application continue $\pi : R \to \Sigma$ de la droite R dans le cercle Σ, faisant correspondre au nombre $x \in R$ le point du cercle Σ à coordonnée polaire x, et envisageons l'application discontinue $\varphi : S \to [0, 2\pi)$ qui fait correspondre à chaque point du cercle S son angle polaire, choisi entre 0 et 2π.

Considérons, d'une part, l'ensemble $C = C(S, \Sigma)$ de toutes les applications continues $f : S \to \Sigma$ de métrique $\rho(f_1, f_2) = \sup \rho(f_1 x, f_2 x)$ induite du plan R^2 et, d'autre part, l'ensemble C^* de toutes les fonctions continues $f^* : [0, 2\pi] \to R$ qui vérifient les conditions

$$f^*(2\pi) - f^*(0) = 2k\pi, \quad k \text{ entier};$$
$$0 \leqslant f^*(0) < 2\pi$$

de métrique $\rho(f^*, g^*) = \sup \rho(f^* x, g^* x)$.

Il s'avère que l'application $f^* \to \pi f^* \varphi$ est une bijection continue de C^* sur C dans les deux sens (relativement aux métriques indiquées). En effet, pour $f^* \in C^*$ nous avons $\pi f^* \varphi \in C$, et $\pi f^* \varphi = \pi g^* \varphi$ implique $f^* = g^*$. Montrons qu'à chaque fonction $f : S \to \Sigma$ de C correspond une fonction f^* telle que $\pi f^* \varphi = f$. Pour définir f^*, posons $f^* \alpha = \varphi f \alpha + 2k\pi$ pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$, en choisissant le nombre entier $k = k(\alpha)$ de façon que la fonction construite soit continue. Si l'on requiert en plus que $k(0) = 0$, la fonction f^* sera bien déterminée et l'on aura $\pi f^* \varphi = f$.

La description géométrique de la construction effectuée est la suivante: en faisant parcourir le cercle S par le point α, on envisage α comme l'angle polaire du point α et l'on observe le mouvement correspondant du point $f\alpha$ sur le cercle Σ. Le degré de l'application f sera égal à la différence $n - m$, où le nombre n est égal au nombre de fois que le point $f\alpha$ a parcouru le cercle Σ dans le sens positif (celui des angles polaires croissants) et m, dans le sens négatif. Le graphe des variations de l'angle polaire du point $f\alpha$ sera alors le graphe de la fonction f^*.

Ainsi, l'application $f^* \to f$ est effectivement bijective et, comme on voit facilement, continue dans les deux sens.

Revenons à la démonstration du théorème 16^1. Soit $f : S \to \Sigma$ une application quelconque de degré zéro. D'après la remarque ci-dessus, on a alors $f^*(2\pi) - f^*(0) = 0$. Considérons la famille de fonctions $f_\theta^* = f^*(0) + (1 - \theta) \times (f^* - f^*(0))$, qui dépend de manière continue du paramètre θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. On vérifie facilement que toutes ces fonctions appartiennent à C^*, que $f_0^* = f^*$ et que la fonction f_1^* est constante. Alors, les fonctions correspondantes $f_\theta : S \to \Sigma$ forment une famille qui dépend continûment de θ, en outre $f_0 = f$, et $f_1 : S \to f(0)$ est une application constante. Autrement dit, f_θ est l'homotopie cherchée entre l'application f et l'application constante f_1.

La démonstration de l'assertion b) est contenue dans le lemme 1 (voir n° 4 ci-dessus).

La démonstration de l'assertion (c) a été donnée au n° 3.

Démontrons l'assertion d). Supposons donnée l'application f de degré zéro de la sphère S^{n+1} dans la sphère Σ^{n+1}, $n \geqslant 1$. Il s'agit de démontrer que cette application est homotope à l'application constante. Il suffit de démontrer qu'elle est homotope à une application f_1 de la sphère S^{n+1} dans la sphère Σ^{n+1} qui vérifie $f_1(S^{n+1}) \neq \Sigma^{n+1}$, i.e. que $f_1(S^{n+1})$ ne contient pas un certain point $o \in \Sigma^{n+1}$.

Puisque $n + 1 \geqslant 2$, nous pouvons appliquer le lemme 3 et supposer dès le début l'existence d'un point $o \in \Sigma^{n+1}$, tel que $f^{-1}o$ est contenu à l'intérieur d'un certain simplexe fermé $\bar{x}^{n+1} \subset S^{n+1}$ de dimension $n + 1$, dont l'image est un sous-ensemble propre de la sphère Σ^{n+1}. Considérons un point $v \in \Sigma^{n+1} \setminus f\bar{x}^{n+1}$ et envisageons Σ^{n+1} comme espace euclidien $R^{n+1} = \Sigma^{n+1} \setminus v$ de dimension n, auquel on a adjoint le point à l'infini v. Puisque le degré de l'application f est égal à zéro, toute approximation simpliciale suffisamment bonne de l'application f recouvre le point o avec une multiplicité nulle ; mais puisque toute l'image inverse $f^{-1}o$ du point o est à l'intérieur de x^{n+1}, le point o est recouvert avec la même multiplicité nulle par l'image du simplexe x^{n+1}. Donc l'application du simplexe orienté x^{n+1} dans un simplexe $Y^{n+1} \subset R^{n+1}$, suffisamment grand et contenant le point o et l'ensemble $f\bar{x}^{n+1}$, est de degré zéro au point o. Et cela signifie que $\mathfrak{o}(f\Delta x^{n+1}, o) = 0$ et donc, en vertu du théorème 14_0^n, que l'on suppose déjà démontré, l'application f de la frontière $\widetilde{\Delta x}^{n+1}$ du simplexe $\bar{x}^{n+1}$ dans $\bar{Y}^{n+1} \setminus o$ peut être étendue au simplexe fermé $\bar{x}^{n+1}$ tout entier dans $\bar{Y}^{n+1} \setminus o$ (application f_1). Posant $f_1 = f$ partout dans $S^{n+1} \setminus x^{n+1}$, nous obtenons ainsi l'application f_1 de toute la sphère S^{n+1} dans $\Sigma^{n+1} \setminus o$, pour laquelle $y \in \Gamma = \Sigma^{n+1} \setminus (f\bar{x}^{n+1} \cup f_1\bar{x}^{n+1})$ implique $f_1^{-1}y = f^{-1}y$. Par conséquent, les applications f et f_1 sont homotopes en vertu du lemme 2 ; puisque $fS^{n+1} \subseteq \Sigma^{n+1} \setminus o$, l'assertion d) et avec elle les trois théorèmes 14_0^n, 15_0^n, 16^n sont démontrés pour tous les n.

6. Réduction du théorème 15 au Grand lemme. Abordons la démonstration du théorème 15 dans le cas général. Dans son énoncé donné au n° 3, remplaçons à nouveau n par $n + 1$. On a ainsi : un polyèdre $\tilde{K}^{n+1}$ de dimension $n + 1$, un sous-complexe K_0 de la triangulation K^{n+1} du polyèdre $\tilde{K}^{n+1}$ et l'application f du polyèdre $\tilde{K}_0$ dans la frontière $\widetilde{\Delta y}^{n+1} = S^n$ du simplexe y^{n+1} (de dimension $n + 1$) qui vérifie la condition :

(A) Chaque cycle z^n de dimension n (modulo $m \geqslant 2$ quelconque) du complexe K_0, homologue à zéro dans K^{n+1}, est appliqué sur S^n avec un degré nul.

Dans ces conditions, il faut étendre l'application f au polyèdre $\widetilde{K}^{n+1}$ tout entier qui s'applique dans S^n.

Puisque chaque application du polyèdre $\widetilde{K}_0$ dans S^n est homotope à une certaine application simpliciale, on peut, en vertu du lemme du champignon (voir par exemple Appendice) *), supposer dès le début que f est une application simpliciale et choisir les notations de manière à ce que f soit une application simpliciale de la triangulation K_0 (qui est un sous-complexe de la triangulation K^{n+1} du polyèdre $\widetilde{K}^{n+1}$). Le prolongement nécessaire de l'application f à une application F de tout le polyèdre $\widetilde{K}^{n+1}$ sera effectué par étapes:

Première étape: extension de l'application f au polyèdre $\widetilde{K}_0 \cup \cup \widetilde{K}^{n-1}$, où K^{n-1} est un sous-complexe du complexe K^{n+1} qui consiste de tous les simplexes de K^{n+1} de dimension $\leqslant n-1$.

Deuxième étape: extension de l'application obtenue à tout le polyèdre $\widetilde{K}_0 \cup \widetilde{K}^n$ (où K^n consiste de tous les simplexes de dimension $\leqslant n$), qui satisfait à la condition:

(B) La frontière Δt^{n+1} de chaque simplexe orienté de dimension $n+1$ du complexe K^{n+1} est appliquée dans S^n avec degré nul.

Troisième (et dernière) étape: prolongement de l'application obtenue à une application du polyèdre $\widetilde{K}^{n+1}$ dans S^n.

Pour réaliser la première étape, il suffit de faire correspondre à chaque sommet du complexe K^{n+1} non contenu dans le complexe K_0, un sommet quelconque du simplexe y^{n+1} et prendre l'application simpliciale du complexe K^{n-1} dans la frontière $[\Delta y^{n+1}]$ du simplexe y^{n+1}, engendrée par l'application des sommets.

En remplaçant maintenant K_0 par $K_0 \cup K^{n-1}$ et désignant à nouveau le complexe obtenu par K_0, nous voyons que la deuxième étape sera réalisée si l'on démontre la proposition suivante.

Grand lemme. *Supposons données: une triangulation K^{n+1} de dimension $n+1$, une triangulation $K_0 \subseteq K^{n+1}$ qui contient tous les simplexes de dimension $\leqslant n-1$ du complexe K^{n+1} et l'application simpliciale f du complexe K_0 dans la frontière $\widetilde{\Delta y^{n+1}} = S^n$ du simplexe y^{n+1}, qui satisfait à la condition* (A). *L'application f peut alors être prolongée à une application F du polyèdre $\widetilde{K}_0 \cup \widetilde{K}^n$ dans S^n qui satisfait à la condition* (B).

La démonstration de ce lemme constitue la plus grande partie de deux numéros suivants de notre exposé. Maintenant, en supposant qu'il est démontré, effectuons la troisième et dernière étape de la

*) Remarquons que c'est justement dans ce contexte que le lemme du champignon (connu sous le nom de lemme de Borsuk) a été initialement démontré par Hopf dans le cas particulier des polyèdres.

démonstration du théorème 15. Mais il suffit pour cela d'appliquer le théorème 15_0^n, démontré au n° 5, à chaque simplexe de dimension $n+1$ du complexe K^{n+1}.

Ainsi, il ne reste qu'à démontrer le Grand lemme.

7. Partie algébrique de la démonstration du Grand lemme. Supposons vérifiées toutes les hypothèses du Grand lemme. Parmi les simplexes de dimension n du complexe S^n (i.e. parmi les faces de dimension n du simplexe y^{n+1}), choisissons un simplexe et désignons-le par Y^n. Puisque f est une application simpliciale du complexe K_0 dans le complexe S^n, une chaîne fx^n du complexe S^n correspond à chaque chaîne entière x^n de dimension n du complexe K_0 ; le coefficient avec lequel la chaîne fx^n figure dans le simplexe y^n (une orientation choisie une fois pour toutes du simplexe Y^n) sera désigné par $\chi(x^n)$. Le nombre entier $\chi(x^n)$ est évidemment le degré de l'application f de la chaîne x^n en un point quelconque du simplexe y^n. Il est tout aussi évident que $\chi(x^n)$ est un caractère entier *) du groupe $L_0^n = L^n(K_0, I)$. Mais le groupe L_0^n est un sous-groupe du groupe $L^n = L^n(K^{n+1}, I)$. Un autre sous-groupe du groupe L^n est $H^n = H^n(K^{n+1}, I)$. Posons le problème suivant : prolonger le caractère χ du groupe L_0^n à un tel caractère du groupe L^n qui applique tous les éléments du groupe H^n dans l'élément nul. Nous affirmons : dans les hypothèses du Grand lemme nous pouvons toujours résoudre ce problème. En effet, pour cela, d'après le théorème 3 du Supplément au présent chapitre la condition suivante est suffisante (et nécessaire) :

(C) Quelle que soit la chaîne $u^n \in L_0^n$ de la forme $u^n = mx' + x''$, où $m \geqslant 2$, $x' \in L^n$, $x'' \in H^n$, on a

$$\chi(u^n) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Démontrons que cette condition est satisfaite.

En effet, $u^n = mx' + x'' \in L_0^n$ implique $\tau_m u^n = \tau_m x''$ et (puisque $x'' \in H^n$)

$$x'' = \Delta x^{n+1},\ x^{n+1} \in L^{n+1}(K^{n+1}, I).$$

Par conséquent $\tau_m u^n = \tau_m x''$ est un cycle modulo m et (puisque $x'' \sim 0$ dans K^{n+1}) ce cycle est homologue à zéro dans K^{n+1} (pour son groupe de coefficients I_m). Par conséquent, d'après l'hypothèse du Grand lemme et compte tenu de la dimension du complexe S^n,

$$f(\tau_m u^n) = 0,$$

i.e.

$$\tau_m(fu^n) = 0.$$

*) Rappelons que l'on appelle caractère entier (resp. caractère modulo m) d'un groupe commutatif donné G l'application homomorphe du groupe G dans le groupe des entiers I (resp. dans le groupe I_m). Voir le Supplément à la fin de ce chapitre.

Par conséquent, chaque coefficient de la forme linéaire entière $fu^n \in L^n(S^n, I)$, et en particulier le coefficient auprès de y^n, est divisible par m, i. e. la condition (B) est vérifiée.

8. Partie géométrique de la démonstration du Grand lemme. Ainsi, nous avons construit un caractère entier χ du groupe L^n qui possède les propriétés suivantes:

a) pour chaque chaîne entière x^n de dimension n (en particulier pour chaque simplexe orienté de dimension n) du complexe K_0, le degré de l'application de fx^n dans Y^n est égal à $\chi(x^n)$;

b) pour chaque frontière Δt^{n+1} où $|t^{n+1}| \in K^{n+1}$, on a $\chi(\Delta t^{n+1}) = 0$.

Il faut maintenant prolonger l'application f définie sur $\widetilde{K}_0$ à une application F du polyèdre $\widetilde{K}_0 \cup \widetilde{K}^n$ qui vérifie:

(D) Chaque simplexe x^n du complexe K^n est appliqué par F avec degré $\chi(x^n)$ aux points de Y^n.

Si un tel prolongement sera trouvé, alors le Grand lemme sera entièrement démontré: en effet, le degré de l'application de chaque chaîne x^n du complexe K^n par F sera également $\chi(x^n)$, à l'intérieur de Y^n; en particulier, si x^n est un cycle, le degré de l'application F dans tous les points intérieurs de Y^n est évidemment le degré avec lequel le cycle x^n s'applique dans la sphère S^n; puisque pour chaque cycle x^n, homologue à zéro dans K^{n+1} nous avions $\chi(x^n) = 0$, alors chaque tel cycle, en particulier chaque cycle de la forme Δt^{n+1} est appliqué par F sur S^n avec un degré nul, i.e. l'application F est précisément l'application qu'il faut construire pour démontrer le Grand lemme.

Ainsi, il ne reste qu'à prolonger l'application f du polyèdre $\widetilde{K}_0$ dans une application du polyèdre $\widetilde{K}_0 \cup \widetilde{K}^n$ qui satisfait à la condition (D).

Si l'on désigne par K_1^n le sous-complexe du complexe K^n consistant de tous les simplexes de dimension n qui n'appartiennent pas à K_0, et de toutes les faces de ces simplexes, tandis que K_1^{n-1} désigne (comme toujours) le complexe consistant de tous les simplexes de dimension $\leqslant n-1$ du complexe K_1^n, l'existence du prolongement cherché s'obtient de la proposition suivante, qui termine la démonstration du Grand lemme, et donc des théorèmes 15, 14, 13.

9. Dernier lemme. *Supposons données: une triangulation K_1^n et une application simpliciale f du complexe K_1^{n-1} dans S^n; soit χ un caractère entier du groupe $L^n(K_1^n, I)$. L'application f peut alors être prolongée dans une application F du polyèdre $\widetilde{K}_1^n$ dans S^n, telle que dans les points d'une face orientée y^n de dimension n du simplexe Y^{n+1} (qui a pour frontière la sphère S^n) l'application de chaque simplexe orienté t^n du complexe K_1^n soit de degré $\chi(t^n)$.*

Démonstration du dernier lemme. Prenons à l'intérieur de chaque simplexe $|t_i^n| \in K_1^n$ des simplexes de dimension n, à distance positive l'un de l'autre (appelons-les *petits simplexes*) au nombre de $|\chi(t_i^n)|$. Désignons par Π_i le polyèdre obtenu en éliminant du simplexe $|t_i^n|$ les petits simplexes (ouverts) qu'il contient. Appliquons chaque petit simplexe de $|t_i^n|$ par une application affine de même signe que $\chi(t_i^n)$ sur le simplexe Y^n. Il reste à prolonger l'application des petits simplexes aux polyèdres Π_i de sorte que sur la frontière de chaque t_i^n le prolongement coïncide avec l'application f qui y est donnée, et de sorte que les points intérieurs des polyèdres Π_i ne s'appliquent pas à l'intérieur du simplexe Y^n. Remarquons pour cela que la frontière de chaque simplexe t_i^n, aussi bien que les frontières des petits simplexes sont appliquées dans un polyèdre E obtenu de S^n en ôtant le simplexe ouvert Y^n. Puisque le polyèdre E est évidemment homéomorphe à un simplexe fermé de dimension n, le prolongement nécessaire existe d'après une simple application du théorème de Brouwer-Urysohn.

Ainsi, nous avons entièrement résolu les problèmes posés dans ce paragraphe. Pour conclure ce paragraphe, et tout le chapitre, nous donnerons la

10. Démonstration du théorème de classification de Hopf.

Théorème 17. *Soient f_0 et f_1 deux applications du polyèdre $\widetilde{K}$ de dimension $\leqslant n$ dans une sphère orientée S^n de dimension n. Pour que ces applications soient homotopes entre elles, il faut et il suffit que pour chaque entier $m \geqslant 2$ les applications f_0 et f_1 possèdent le même degré sur tout le cycle z^n de dimension n (modulo m) du complexe K.*

Puisque $f_0 z^n \sim f_1 z^n$ dans S^n si et seulement si z^n est appliqué par f_0 et f_1 avec le même degré, nous pouvons énoncer le théorème de classification de la manière suivante.

Les applications f_0 et f_1 du polyèdre $\widetilde{K}$ de dimension $\leqslant n$ dans la sphère S^n sont homotopes entre elles si et seulement si, pour chaque cycle z^n de dimension n du polyèdre $\widetilde{K}$ (modulo $m \geqslant 2$ quelconque) les cycles $f_0 z^n$ et $f_1 z^n$ sont homologues dans S^n (ou : lorsque f_0 et f_1 engendrent, pour tout m, un même homomorphisme du groupe $\Delta^n(K, I_m)$ dans $\Delta^n(S^n, I_m)$).

Le théorème est évident si la dimension du polyèdre $\widetilde{K}$ est inférieure à n, car alors toute application de $\widetilde{K}$ dans S^n est homotope à l'application constante et le groupe $\Delta^n(K, I_m)$ est nul. On peut donc se limiter à la considération du cas $\dim \widetilde{K} = n$. La nécessité de la condition contenue dans le théorème de Hopf a déjà été démontrée au paragraphe 8 du chapitre 2. Il reste à démontrer sa suffisance.

Ainsi, soient f_0 et f_1 deux applications du polyèdre $\widetilde{K}^n$ de dimension n dans S^n, qui envoient chaque cycle z^n de dimension n (modulo m, où $m \geqslant 2$ est quelconque) de la triangulation K^n avec un même degré $\gamma_0 z^n = \gamma_1 z^n = \gamma$. Considérons le produit topologique $\Pi = \widetilde{K}^n \times I$ du polyèdre $\widetilde{K}^n$ par le segment fermé $I = [0 \leqslant \theta \leqslant 1]$ et considérons le polyèdre $\widetilde{Q}_0^n = \widetilde{K}_0^n \cup \widetilde{K}_1^n$, où $\widetilde{K}_0^n$ (resp. $\widetilde{K}_1^n$) consiste de tous les points de la forme $(x, 0)$ (resp. $(x, 1)$) du polyèdre Π, K_0^n étant envisagé dans la triangulation K_0^n (resp. K_1^n) qui est naturellement isomorphe à la triangulation K^n. Construire une homotopie entre les applications f_0 et f_1 c'est prolonger au polyèdre Π l'application f du polyèdre $\widetilde{Q}_0^n$ dans S^n, définie par

$$f(x, 0) = f_0(x), \quad f(x, 1) = f_1(x).$$

Il faut montrer pour cela que la condition donnée par le théorème 15 du n° 2 (qui affirme l'existence d'un tel prolongement) est satisfaite, i.e. que chaque cycle z_*^n de dimension n du complexe $Q_0^n = K_0^n \cup K_1^n$ (groupe de coefficients I_m), homologue à zéro dans Π, est appliqué par f avec un degré nul. Mais le cycle z_*^n s'écrit évidemment sous la forme

$$z_*^n = z_0' - z_1, \tag{1}$$

où z_0' et z_1 sont les morceaux du cycle z_*^n, situés dans K_0^n (resp. dans K_1^n), ces morceaux étant des cycles car $\widetilde{K}_0^n \cap \widetilde{K}_1^n = \Lambda$. L'isomorphisme naturel existant entre K_0^n et K_1^n d'une part et K^n de l'autre fait correspondre aux cycles z_0' et z_1 les cycles z' et z de K^n. Désignons ensuite par z_0 le cycle du complexe K_0^n qui correspond, par l'isomorphisme naturel, au cycle z du complexe K^n (au cycle z_1 du complexe K_1^n). Puisque $z_1 \sim z_0$ dans Π, on a

$$z_*^n \sim z_0' - z_0 \text{ dans } \Pi, \tag{2}$$

tandis que par hypothèse, $z_*^n \sim 0$ dans Π, donc on a

$$z_0' - z_0 \sim 0 \text{ dans } \Pi. \tag{3}$$

Mais la projection du polyèdre Π dans K_0^n qui fait correspondre à chaque point de la forme $(x, \theta) \in \Pi$ le point $(x, 0)$, transforme l'homologie (3) en

$$z_0' - z_0 \sim 0 \text{ dans } K_0^n.$$

Mais puisque la dimension de K_0^n, ainsi que des cycles z_0' et z_0, est égale à n, on a l'identité

$$z_0' = z_0$$

et par conséquent

$$z_*^n = z_0 - z_1.$$

Les cycles z_0 et z_1 sont appliqués par f avec le même degré que celui des applications f_0 et f_1 pour le cycle z, et ces derniers degrés sont les mêmes par hypothèse. Le cycle $z_*^n = z_0 - z_1$ est donc appliqué par f avec un degré nul. Mais le cycle z_*^n était un cycle quelconque de dimension n du complexe Q_0^n, homologue à zéro dans Π, donc la condition du théorème 15 est effectivement remplie ; par conséquent f peut être prolongée à Π, i.e. f_0 et f_1 sont homotopes entre elles, ce qu'il fallait démontrer.

SUPPLÉMENT AU CHAPITRE TROIS

1. Nous rassemblons dans ce Supplément quelques théorèmes simples qui concernent les homomorphismes d'un groupe abélien X à nombre fini de générateurs *) dans un groupe cyclique fini (d'ordre $m \geqslant 2$) ou infini (d'ordre zéro), qui sera désigné par I_m, $m = 0, 2, 3, \ldots$ Les homomorphismes dont il s'agit seront appelés *caractères* du groupe donné X, à savoir, comme nous l'avons indiqué ci-dessus : tout homomorphisme du groupe abélien donné X dans le groupe des nombres entiers $I = I_0$ sera appelé *caractère entier* du groupe X ; l'homomorphisme du groupe X dans le groupe I_m des résidus modulo $m \geqslant 2$ sera appelé *caractère modulo m*. Lorsqu'il s'agira de caractères tout court, nous sous-entendrons l'un quelconque des groupes I_m, $m \geqslant 2$ ou $m = 0$.

2. Commençons par quelques remarques. Si le groupe X est la somme directe de ses sous-groupes X_1 et X_2, alors chaque caractère φ du groupe X détermine un caractère φ_i du groupe X_i, $i = 1, 2$; c'est le même caractère φ, mais restreint au sous-groupe $X_i \subseteq X$.

Réciproquement, chaque couple de caractères : φ_1 du groupe X_1 et φ_2 du groupe X_2 détermine un caractère φ du groupe X suivant la formule

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) \text{ pour } x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,$$

d'où l'on déduit facilement que le groupe des caractères du groupe X est la somme directe des caractères des groupes X_1 et X_2.

3. Supposons que $X = I_m$ est un groupe cyclique (fini ou infini) à générateur x_0. Considérons les caractères du groupe X relativement à un des groupes I_k, $k = 0, 2, 3, \ldots$ Si f est un caractère du groupe X et $f(x_0) = \xi_0$, alors $m\xi_0 = f(mx_0) = 0$. Réciproquement, si ξ_0 est un élément quelconque du groupe I_k qui satisfait à la condition

$$m\xi_0 = 0, \tag{1}$$

*) Seules des connaissances élémentaires concernant les groupes abéliens sont nécessaires pour lire ce Supplément ; une liste est donnée au chapitre 1, et l'on peut les revoir avec démonstrations détaillées dans [TC], Supplément 1.

nous posons

$$f(ax_0) = a\xi_0$$

pour tout entier a. Cette égalité détermine une fonction f sur X à valeurs dans I_k (puisque $ax_0 = a'x_0$, pour a, a' entiers, implique $a = a' \bmod m$ *) et, par conséquent, $a\xi_0 = a'\xi_0$).

Ainsi, chaque caractère $X \to I_k$, $k = 0, 2, 3, \ldots$ d'un groupe cyclique $X = I_m$ fini ou infini peut être obtenu en faisant correspondre à l'élément générateur x_0 de ce groupe un élément quelconque (du groupe I_k) vérifiant la condition (1); en plus, si l'on fait correspondre l'élément x_0 à des éléments distincts du groupe I_k, qui satisfont à la condition (1), nous obtiendrons toujours des caractères distincts du groupe X.

Ce résultat, réuni aux remarques faites au n° 2, permet de définir immédiatement le groupe de caractères pour un groupe commutatif quelconque à nombre de générateurs fini.

4. Nous nous occuperons maintenant, jusqu'à la fin de ce Supplément, de l'extension d'un caractère défini sur un certain sous-groupe A du groupe X, à un caractère du groupe X tout entier.

Partout dans la suite de ce numéro X désignera un groupe abélien libre de rang n (i.e. une somme directe de n copies du groupe cyclique infini) et nous n'envisagerons que les caractères entiers.

Sous ces hypothèses, nous avons d'abord le

Théorème 1. *Si le sous-groupe A est un terme de la décomposition directe de X (i.e. si l'on peut trouver un sous-groupe B du groupe X tel que $X = A + B$), alors chaque caractère f du groupe A peut être prolongé à un caractère F du groupe X.*

En effet, soit x un élément quelconque du groupe X:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in A, \quad x_2 \in B.$$

En posant

$$F(x) = f(x_1),$$

nous obtenons évidemment un caractère du groupe X, qui coïncide sur A avec le caractère donné du groupe A.

Puisque pour chaque sous-groupe A, fermé par division, du groupe X, ce dernier est une somme directe $X = A + B$ (voir § 4 du chapitre 1), on peut déduire des faits démontrés le

Corollaire. *Chaque caractère d'un sous-groupe A fermé par division du groupe X peut être prolongé au groupe X.*

A peine plus difficile est le

---

*) Les groupes cycliques infinis sont par définition de degré zéro.

Théorème 2. *Soit A un sous-groupe quelconque du groupe X. Le caractère f du groupe A peut être prolongé à un caractère F du groupe X si et seulement si on a la condition suivante:*

1°. *Si x est un élément quelconque du groupe X, m, un entier $\geqslant 2$ et $mx = a \in A$, alors $f(a) \equiv 0 \pmod{m}$.*

Démonstration. La nécessité de la condition est évidente: si le prolongement F du caractère f existe, alors $f(a) = F(mx) = mF(x) \equiv 0 \pmod{m}$.

Démontrons la suffisance. Supposons que les éléments

$$x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$$

du groupe X forment une base canonique de ce groupe relativement au sous-groupe $A \subseteq X$. Cela signifie que l'on peut trouver des entiers naturels $\theta_1, \ldots, \theta_r$ tels que les éléments $\theta_1 x_1, \ldots, \theta_r x_r$ soient contenus dans A et forment une base du groupe A, tandis que

$$x_1, \ldots, x_r$$

forment une base de l'adhérence par division $\hat{A}$ du sous-groupe A dans X. En vertu de la condition 1° on a $f(\theta_i x_i) = \theta_i \alpha_i$, où les α_i sont des entiers. Posons

$$F(x_i) = \alpha_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, r$$

et, pour chaque $x = \sum c_i x_i \in \hat{A}$,

$$F(x) = \sum c_i \alpha_i.$$

Ainsi, le caractère f a été prolongé au groupe $\hat{A}$. Le prolongement au groupe X s'effectue alors à l'aide du corollaire du théorème 1.

Le résultat suivant est important pour le § 5 du chapitre 3.

Théorème 3. *Soient A et B des sous-groupes du groupe X, et soit f un caractère de A. Il s'agit de prolonger f en un caractère F du groupe X qui annule tous les éléments du sous-groupe B. La condition suivante est nécessaire et suffisante pour qu'un tel prolongement existe:*

2°. *Si $x \in X$, $y \in B$ et $m \geqslant 2$ est un entier tel que*

$$mx + y = a \in A,$$

alors

$$f(a) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Démonstration. La nécessité de la condition est évidente: si le prolongement cherché existe, on a $f(a) = mF(x)$.

Démontrons la suffisance. Supposons la condition 2° vérifiée. Montrons d'abord que pour tout $a \in A \cap B$ nous avons $f(a) = 0$. En effet, prenons un entier quelconque $m \geqslant 2$. Alors, pour $x = 0$ et $y = a \in B$, nous avons $a = mx + y \in A$, et donc d'après la con-

dition 2°

$$f(a) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Ceci étant vrai pour tout $m \geqslant 2$, on a $f(a) = 0$.

Considérons maintenant le sous-groupe $A' \subseteq X$, qui consiste de tous les éléments $x \in X$ de la forme

$$x = a + b, \quad a \in A, \quad b \in B. \tag{2}$$

Si un des éléments $x \in X$ possède deux représentations de la forme (2), à savoir

$$x = a + b = a' + b',$$

alors

$$a' - a = b - b' \in A \cap B$$

et, comme nous venons de le voir, $f(a' - a) = 0$. D'où nous voyons qu'en posant, pour chaque élément $x \in A'$ donné sous la forme (2),

$$F_0(x) = f(a),$$

nous obtiendrons un caractère univoquement défini du groupe A' (i.e. ne dépendant pas du choix de la représentation (2)). Ainsi, le caractère f a été prolongé au groupe A'. D'après la définition même du caractère F_0, nous avons pour tous les éléments $y \in B \subseteq A'$ la relation

$$F_0(y) = F(0) = 0.$$

Il reste à étendre le caractère F_0 au groupe X. Il suffit pour cela de vérifier que le caractère F_0 satisfait à la condition 1° du théorème 2 (où l'on remplace le groupe A par le groupe A' et le caractère f par le caractère F_0). Soit $x \in X$, $mx \in A'$ pour un certain $m \geqslant 2$. Alors $mx = a + b$, $a \in A$, $b \in B$ et donc $a = mx - b$, de sorte que l'on aura d'après la condition 2°, $f(a) \equiv 0 \pmod{m}$. Mais pour $a \in A$ on a $F_0(a) = f(a)$, et la condition 1° est donc vérifiée pour F_0. Le théorème 3 est ainsi démontré.

5. Ce numéro est exclusivement consacré aux caractères des groupes abéliens finis modulo $m \geqslant 2$. Le théorème 4 qui suit est employé pour démontrer la proposition 1_m de ce chapitre (p. 176).

Théorème 4. *Soient X un groupe abélien fini, et m, un nombre entier fixe, $m \geqslant 2$. Supposons que l'ordre de chaque élément du groupe X est un diviseur du nombre m. Soient A un sous-groupe quelconque du groupe X et f, un caractère (modulo m) du groupe A. On peut alors prolonger f en un caractère F du groupe X (modulo m).*

Démonstration. Nous démontrerons d'abord le théorème 4 dans le cas particulier où X est un groupe cyclique fini d'ordre μ. D'après l'hypothèse du théorème 4, l'ordre de l'élément générateur x_0 du groupe X, égal à μ, est un diviseur du nombre m, de sorte que $m = c\mu$ pour c entier. Le sous-groupe A du groupe X est un groupe cyclique engendré par un certain élément $ax_0 \in X$, où a est un diviseur

du nombre μ (et donc du nombre m). Alors le nombre $f(ax_0)$, étant un élément du groupe I_m, s'écrit sous la forme

$$f(ax_0) = \mathfrak{r}_m(b), \text{ où } b \text{ est un entier.}$$

Puisque l'ordre de l'élément ax_0 est μ et se divise par a, alors

$$\frac{\mu}{a} b \equiv 0 \pmod{m} \tag{3}$$

et donc $\frac{\mu b}{ma}$ est un nombre entier. Mais $\frac{\mu}{m} = \frac{1}{c}$, où, comme nous l'avons indiqué, c est entier. Nous venons de voir que $\frac{\mu b}{ma} = \frac{1}{c}\frac{b}{a}$ est entier, alors $\frac{b}{a}$ le sera à plus forte raison.

On déduit de (3) que $\mu \mathfrak{r}_m\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ et, d'après le n° 3, nous obtenons un caractère g du groupe X en posant

$$g(x_0) = \mathfrak{r}_m\left(\frac{b}{a}\right).$$

Puisque $g(ax_0) = \mathfrak{r}_m(b)$, les caractères f et g coïncident sur A, de sorte que le théorème 4 est démontré dans le cas particulier d'un groupe cyclique.

Passons au cas général d'un groupe fini quelconque X. Il est évident qu'il suffit, sous l'hypothèse que A est un sous-groupe propre du groupe X, de prolonger le caractère f à un certain sous-groupe $A' \subseteq X$ contenant A comme sous-groupe propre ; alors, par un nombre fini d'itérations, nous en viendrons au groupe X.

Ainsi, soit x_0 un élément du groupe X non contenu dans A. Désignons par X_0 le groupe cyclique engendré par l'élément x_0, et par A', le sous-groupe du groupe X qui consiste de tous les éléments de la forme $a + y$, où $a \in A$ et $y \in X_0$. D'après le cas particulier du théorème 4 déjà démontré, nous pouvons prolonger le caractère f, restreint au sous-groupe $A \cap X_0$ du groupe cyclique X_0, en un caractère g du groupe X_0. Mais ceci nous donne un prolongement du caractère f au groupe A' : pour

$$a' = a + y \in A', \; a \in A, \; y \in X_0, \tag{4}$$

il suffit de poser

$$F(a') = f(a) + g(y) \tag{5}$$

pour déterminer la valeur du caractère F sur chaque élément $a' \in A'$. En effet, la définition (5) donne un résultat bien déterminé, car

$$a' = a + y = a_1 + y_1, \quad a_1 \in A, \quad y_1 \in X_0,$$

implique

$$a - a_1 = y_1 - y \in A \cap X_0$$

et donc $f(a - a_1) = g(y - y_1)$, $f(a) - f(a_1) = g(y_1) - g(y)$ et $f(a) + g(y) = f(a_1) + g(y_1)$, ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE QUATRE

INTRODUCTION À LA THÉORIE HOMOLOGIQUE DE LA DIMENSION DES COMPACTS

Remarques préliminaires: fondement intuitif de la théorie. La théorie homologique de la dimension fut une étape nouvelle, sans doute la plus importante, dans la « géométrisation » de la théorie de la dimension. Le premier pas dans cette direction fut la démonstration des théorèmes sur les ε-déplacements et les ε-(ultérieurement les ω-)applications. Le pas suivant dans le même sens fut le théorème des applications essentielles, dont le théorème des cloisons est une conséquence.

La définition homologique de la dimension et la subordination de la dimension classique dim X à cette définition résultent d'une nouvelle approche intuitive de la notion de dimension, pour le développement de laquelle les concepts de cycle et d'homologie sont nécessaires.

En quoi consiste donc cette nouvelle approche?

Revenons à la définition initiale de la dimension, donnée par Brouwer en 1913, i.e. essentiellement à celle de la dimension Ind X: si la dimension de X est égale à n, il existe alors dans l'espace X deux ensembles disjoints fermés Φ_1 et Φ_2 que l'on ne peut séparer l'un de l'autre par aucune « cloison » de dimension $< n - 1$, tandis que deux ensembles disjoints quelconques Φ_1 et Φ_2 peuvent être séparés par une cloison de dimension $\leqslant n - 1$. Soient $a_1 \in \Phi_1$, $a_2 \in \Phi_2$. Le couple de points a_1 et a_2 peut être considéré comme un cycle z^0 de dimension nulle dans l'espace X.

Le fait que l'on ne peut séparer ces deux points par aucune cloison B de dimension $< n - 1$ signifie que le cycle de dimension nulle qu'ils forment est non seulement homologue à zéro dans X, mais reste homologue à zéro dans $X \setminus B$, quel que soit l'ensemble fermé $B \subseteq X$ de dimension $< n - 1$ qui ne contient pas les points a_1 et a_2. D'autre part, pour chaque cycle de dimension nulle z^0 dans X on peut trouver un tel ensemble fermé B de dimension $\leqslant n - 1$, situé en dehors du cycle z^0 et tel que le cycle z^0 n'est plus homologue à zéro dans $X \setminus B$.

Nous dirons plus brièvement que l'espace X possède une homologie de dimension r, s'il existe dans X un cycle z^r de dimension r,

homologue à zéro dans X ; nous dirons que cette homologie de dimension r est détruite ou décomposée par un ensemble fermé B, si le cycle z^r est situé en dehors de cet ensemble (i.e. sur un certain ensemble fermé $F \subseteq X \setminus B$), mais n'est pas homologue à zéro dans $X \setminus B$ (i.e. dans aucun ensemble fermé $\Phi \subseteq X \setminus B$).

Ainsi, la définition de la dimension due à Brouwer peut être (au moins dans le cas des compacts) énoncée de la manière suivante.

L'ensemble vide est, par définition, de dimension -1 ; supposons que l'on a défini les compacts de dimension $\leqslant n-1$. Alors le compact X est de dimension n si chaque homologie de dimension nulle de X peut être décomposée par un certain ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$, et X possède une homologie de dimension nulle qui ne peut être décomposée par aucun ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ de dimension $< n-1$.

Il faut ici remarquer le rôle spécial que joue dans cette définition la dimension nulle. Par conséquent, dès les débuts de la théorie homologique de la dimension, l'hypothèse suivante apparut naturellement.

Dans un compact de dimension n il existe, pour chaque entier r, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, une homologie de dimension r qui ne peut être décomposée par aucun ensemble fermé de dimension $< n-r-1$; en même temps, toute homologie de dimension r dans un compact de dimension n est décomposée par un certain ensemble fermé de dimension $\leqslant n-r-1$.

Cette hypothèse, que j'avais formulée déjà en 1932, fut démontrée d'une manière satisfaisante d'abord par E. Skliarenko [1] en 1966 ; la démonstration de B. Kaufmann (1936 ; série d'articles [1]-[5]) est trop difficile à comprendre, tandis que K. Sitnikov, qui possédait une démonstration dans les années 50, ne l'a publiée qu'en 1972. C'est aussi en 1972, spécialement pour le présent ouvrage, que R. Froum-Ketkov proposa sa propre variante de la démonstration. Dans ce chapitre, nous donnons une démonstration qui suit essentiellement les constructions de R. Froum-Ketkov.

Le cas particulier $r = n-1$ (qui, avec $r = 0$, est évidemment le cas principal) nous amène à la définition de la dimension homologique et à l'énoncé du premier théorème fondamental. En effet, avant d'envisager la décomposition des homologies de telle ou telle dimension dans l'espace donné, il est naturel de poser la question suivante : quelles sont les homologies, susceptibles à être décomposées, qui existent dans l'espace donné ? Cette question nous amène directement à une nouvelle définition de la dimension : la dimension du compact donné X est le plus grand nombre n tel que le compact X possède une homologie de dimension $n-1$ qui peut être décomposée *), i.e. tel que X possède un cycle z^{n-1} de dimension $n-1$, qui

*) Par un ensemble fermé $\Phi \subseteq X$.

est homologue à zéro dans X et en même temps n'est pas homologue à zéro sur un certain ensemble fermé $F \subseteq X$ qui contient ce cycle *) (fig. 22).

Le premier théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension est justement l'assertion selon laquelle, pour une compréhension appropriée des mots « cycles » et « homologie », la définition de la dimension homologique que nous venons de formuler est équivalente à la dimension dim X.

A savoir, dans le cas des compacts, nous entendons par cycles et homologies « appropriés » les cycles et les homologies à coefficients variables ou, ce qui revient au même, les cycles et les homologies pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$.

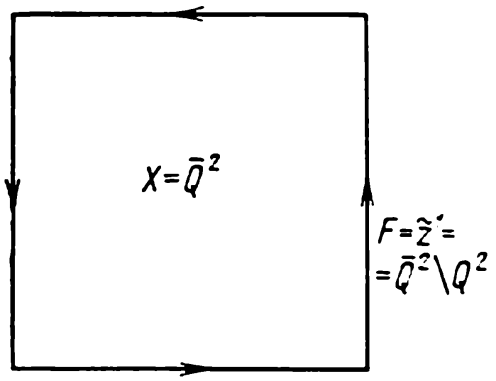

Fig. 22

La démonstration de cette assertion, dans le cas le plus général, i.e. pour les bicompacts, est exposée au § 1 du présent chapitre; essentiellement, nous reproduisons la démonstration donnée dans mon article [4], qui s'appuie seulement sur le théorème de Hopf, démontré au § 5 du chapitre précédent, et sur le théorème des applications essentielles ([AP], chapitre 4, p. 265).

Au § 2, le théorème démontré est appliqué aux cas des compacts.

Dans les paragraphes suivants de ce chapitre, pour l'étude des compacts de dimension finie, nous les envisageons comme étant des sous-ensembles bornés fermés de l'espace euclidien. Le principal théorème, démontré ici, est celui des obstructions (§ 4). Il s'appuie sur les lemmes d'existence des cycles enlacés (§ 4 du chapitre précédent).

Après l'exposé du théorème des obstructions, il serait naturel de passer ensuite aux remarquables résultats de K. Sitnikov concernant les « sacs » et « ceintures », qui sont des spécifications profondes du théorème des obstructions et se rapportent aux meilleurs résultats géométriques, non seulement de la théorie de la dimension, mais aussi de toute la topologie géométrique. Malheureusement, ces résultats nécessitent des notions plus délicates de la topologie combinatoire (ayant trait à la théorie des intersections et à l'homomorphisme inverse de Hopf), notions qui sont restées en dehors du cadre de notre livre. Nous exposerons par conséquent ces résultats dans un supplément à ce chapitre, en faisant appel, sans démonstra-

*) $E = X \setminus O\Phi$, où $O\Phi$ est un voisinage de l'ensemble Φ qui décompose l'homologie donnée.

tions, à certains théorèmes de la topologie combinatoire que le lecteur peut trouver dans le livre TC et les articles de S. Lefschetz [1], [2] et de M. Glezerman-L. Pontriaguine [1].

Au § 6, nous exposons les résultats ultérieurs de la théorie homologique élémentaire de la dimension des compacts. En particulier, nous étudions la notion de « composante dimensionnelle » (voir AP, chapitre 5, p. 352) et la notion de « variété cantorienne spéciale de dimension p » (« continuums V^p »). En guise de conclusion, nous tachons de dresser un bilan et envisager certaines perspectives du développement des théories exposées.

Le § 7 contient les exemples de L. Pontriaguine, qui se rapportent aux produits topologiques de deux compacts.

§ 1. Premier théorème fondamental de la théorie de la dimension homologique dans son énoncé élémentaire (pour les bicompacts quelconques)

1. Enoncé du théorème. Dans ce paragraphe nous entendons par recouvrement un recouvrement ouvert fini d'un bicompact donné X. Le nerf du recouvrement ω sera désigné par $|\omega|$. Si $\Phi \subseteq X$, alors $|\Phi\omega|$ désigne le sous-complexe du nerf $|\omega|$ qui consiste de tous les simplexes dont tous les sommets correspondent à des éléments du recouvrement ω qui ont des points communs avec l'ensemble Φ. Par dimension de l'espace X, nous entendons toujours la dimension $\dim X$, définie à l'aide des recouvrements.

Nous allons démontrer le

Premier théorème fondamental (théorème 1). *Si le bicompact X est de dimension finie* $\dim X = n > 0$, *il existe un ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ et un recouvrement ω de l'espace X tels que pour chaque recouvrement ω' inscrit dans ω on a:*

(a) *Le nerf $|\omega'|$ possède un cycle relatif $z^n_{\omega'}$* mod $|\Phi\omega'|$ *de dimension n, dont la projection* *) *sur le nerf $|\omega|$ n'est pas homologue à zéro sur le complexe $|\omega|$,* mod $|\Phi\omega|$.

---

*) Si le recouvrement ω' est inscrit dans ω, alors, en faisant correspondre à chaque élément du recouvrement ω' un élément du recouvrement ω qui le contient, on obtient une application naturelle (ou *projection*) $\varpi^{\omega'}_{\omega} : \omega' \to \omega$ qui nduit une application simpliciale $\varpi^{\omega'}_{\omega} : |\omega'| \to |\omega|$ des nerfs des recouvrements, que l'on appelle également projection. Des projections distinctes $\varpi^{\omega'}_{\omega}$, $\varpi'^{\omega'}_{\omega}$ sont combinatoirement proches et induisent donc un même homomorphisme $\varpi^{\omega'}_{\omega} : \Delta^r(|\omega'| \bmod |\Phi\omega'|) \to \Delta^r(|\omega| \bmod |\Phi\omega|)$ des groupes d'homologie.

(b) *Le sous-complexe* $|\Phi\omega'|$ *du nerf* $|\omega'|$ *possède un cycle* $z^{n-1}_{\omega'}$, *homologue à zéro dans* $|\omega'|$, *dont la projection* $\mathfrak{P}^{\omega'}_{\omega} z^{n-1}_{\omega'}$ *dans le nerf* $|\omega|$ *qui est un cycle de* $|\Phi\omega|$ *est non homologue à zéro dans* $|\Phi\omega|$.

Les cycles peuvent alors être choisis soit modulo $m = m(\omega')$ *où* m' *est un nombre qui dépend de* ω', *soit pour les groupes de coefficients* $\mathfrak{R}_1$ *ou* $\varkappa$.

Enfin:

(c) *Pour* $r > n$ *et pour tout recouvrement* ω *de l'espace* X, *il existe un recouvrement* ω' *(de l'espace* X*), inscrit dans* ω, *tel que pour tout ensemble fermé* $\Phi \subseteq X$ *et pour tout groupe de coefficients chaque cycle relatif* $z^r_{\omega'}$ *de dimension* r *dans* $|\omega'|$ mod $|\Phi\omega'|$ *et chaque cycle* $z^{r-1}_{\omega'}$ *de dimension* $r-1$ *dans* $|\Phi\omega'|$, *homologue à zéro dans* $|\omega'|$, *sont nuls.*

2. Remarques préliminaires et notations. L'assertion (c) est évidente : il suffit de prendre en guise de ω' un recouvrement quelconque de multiplicité $n+1$ inscrit dans ω.

Commençons la démonstration des assertions (a) et (b) par quelques remarques préliminaires. Nous désignons toujours par X un bicompact de dimension n; si l'on se donne son recouvrement ω, alors $\omega' > \omega$ désignera toujours un recouvrement *correct* (i.e. consistant d'ensembles ouverts de type F_σ) de multiplicité $n+1$ du bicompact X, inscrit dans le recouvrement ω. Les éléments des recouvrements ω et ω' seront désignés respectivement par O_i et O'_j, $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, s'$.

Désignons par $\overline{Q}$ un simplexe fermé de dimension n, choisi une fois pour toutes, de barycentre o, d'intérieur Q, situé dans un espace euclidien R^n de dimension n, qui est à son tour situé dans un certain R^{2n+1} choisi une fois pour toutes. Par simplexe « plus petit » $\overline{Q}_0$, $\overline{Q}_1$, etc., nous entendons toujours un simplexe de dimension n, situé à l'intérieur de $\overline{Q}$ et lui homothétique par une homothétie dont le centre est le barycentre commun o des simplexes $\overline{Q}$ et $\overline{Q}_0$.

Soit φ une application continue du bicompact X dans le simplexe $\overline{Q}$ et soit $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ un recouvrement de multiplicité $n+1$ du bicompact X. Si l'on se donne un $\varepsilon > 0$, on désigne par $|\omega|$ le nerf du recouvrement ω réalisé de la manière suivante sous forme de triangulation située dans R^{2n+1}. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$ prenons un point $p_i \in O_i$, et ayant choisi un ensemble fermé $\Phi \subseteq X$, nous prendrons toujours le point p_i, pour tous les O_i qui coupent Φ, de sorte que $p_i \in O_i \cap \Phi$. Les sommets $e_1, \ldots, e_s$ du nerf $|\omega|$ sont choisis dans R^{2n+1} en position générale, de manière à avoir $\rho(e_i, \varphi p_i) < \varepsilon$ (pour $i = 1, 2, \ldots, s$). La réalisation du nerf $|\omega|$ qui vérifie ces conditions sera appelée (φ, ε)-*réalisation canonique.*

En faisant correspondre à chaque sommet e_i le point φp_i, nous obtenons une application simpliciale g^ω *) du nerf $|\omega|$ dans $\overline{Q}$, qui sera appelée *ε-déplacement canonique (du complexe* $|\omega|$).

Si le recouvrement ω est correct, nous désignerons par μ_ω l'application barycentrique du bicompact X dans l'espace sous-jacent au nerf $|\omega|$.

3. Lemmes.

Lemme 1. *Supposons donnés l'application* $\varphi: X \to \overline{Q}$ *et le nombre* $\varepsilon > 0$. *Il existe alors un recouvrement* $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ *du bicompact* X *tel que pour* $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$, *pour chaque* (φ, ε')*-réalisation canonique du nerf* $|\omega|$ *et pour le* ε'*-déplacement* $g^\omega: |\omega| \to \overline{Q}$ *canonique correspondant, l'application*

$$f = g^\omega \mathfrak{w}_\omega^{\omega'} \mu_{\omega'}: X \to \overline{Q}, \text{ pour } \omega' > \omega,$$

satisfait à l'inégalité $\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon$, *quel que soit* $x \in X$. *En outre, pour chaque simplexe* $|t_\omega| \in |\omega|$, *on a* diam $g^\omega |t_\omega| < 2\varepsilon'$ *(et donc pour chaque* $|t_{\omega'}| \in |\omega'|$ *on a* diam $g^\omega \mathfrak{w}_\omega^{\omega'} |t_{\omega'}| < 2\varepsilon'$).

Démonstration. Choisissons les ensembles ouverts $V_1, \ldots, V_\nu$ de l'espace R^n de sorte qu'ils recouvrent le simplexe $\overline{Q}$ et soient de diamètres $< \varepsilon'$. Posons $U_h = \varphi^{-1} V_h$ pour $h = 1, 2, \ldots, \nu$ et choisissons un recouvrement $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ de multiplicité $n+1$ du bicompact X, inscrit dans le recouvrement $\{U_1, \ldots, U_\nu\}$. Il est clair que diam $\varphi O_i < \varepsilon'$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$. Ensuite, pour deux sommets quelconques e_i, e_k du simplexe $|t_\omega| \in |\omega|$, on a $g^\omega e_i = \varphi p_i$, $g^\omega e_k = \varphi p_k$, tandis que $O_i \cap O_k \neq \Lambda$ et donc $\rho(\varphi p_i, \varphi p_k) < 2\varepsilon'$. Par conséquent aussi diam $g^\omega |t_\omega| < 2\varepsilon'$.

Soit $\omega' > \omega$. Supposons que le nerf $|\omega|$ possède une réalisation canonique sur les sommets $e_1, \ldots, e_s$, tandis que le nerf $|\omega'|$ sur les sommets $e'_1, \ldots, e'_{s'}$ (les deux réalisations se rapportant à l'application φ et au nombre ε'). Prenons un point quelconque $x \in X$; supposons qu'il est contenu dans les éléments $O'_{k_0}, \ldots, O'_{k_r}$ du recouvrement ω' et dans eux seulement. Posons $e_{i_\lambda} = \mathfrak{w}_\omega^{\omega'} e'_{k_\lambda}$, $\lambda = 0, \ldots, r$; alors

$$\mu_{\omega'} x \in |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| \in |\omega'|, \quad \mathfrak{w}_\omega^{\omega'} |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| = |e_{i_0} \ldots e_{i_r}|,$$

de sorte que $\mathfrak{w}_\omega^{\omega'} \mu_{\omega'} x \in |e_{i_0} \ldots e_{i_r}|$. Ensuite $x \in O'_{k_\lambda} \subseteq O_{i_\lambda}$ pour $\lambda = 0, 1, \ldots, r$ et diam $\varphi O_{i_\lambda} < \varepsilon'$. Donc

$$\rho(\varphi x, \varphi p_{i_\lambda}) < \text{diam } \varphi O_{i_\lambda} < \varepsilon', \ \rho(\varphi x, e_{i_\lambda}) < 2\varepsilon'$$

*) L'application g^ω est une application simpliciale de la triangulation $|\omega|$ dans le complexe K_Γ (défini au chapitre 2, § 10, p. 145), où $\Gamma = R^n$. Par conséquent, l'image $g^\omega |\omega|$ du complexe $|\omega|$ est un complexe de Brouwer de dimension n de l'espace R^n.

pour $\lambda = 0, \ldots, r$, donc $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}| \subseteq O(\varphi x, 2\varepsilon')$. Puisque $\mathfrak{d}_\omega^{\omega'} \mu_{\omega'} x \in \in |e_{i_0} \ldots e_{i_r}|$, on a $\rho(\varphi x, \mathfrak{d}_\omega^{\omega'} \mu_{\omega'} x) < 2\varepsilon'$, et donc

$$\rho(\varphi x, g^\omega \mathfrak{d}_\omega^{\omega} \mu_{\omega'} x) < 3\varepsilon' < \varepsilon.$$

La première assertion du lemme 1 est démontrée. La deuxième découle du fait que $|t_\omega| = |e_{i_0} \ldots e_{i_r}| \in |\omega|$ implique $g^\omega |t_\omega| = = |\varphi p_0 \ldots \varphi p_r|$ et le diamètre du simplexe $g^\omega |t_\omega|$ n'est pas plus grand que la plus grande distance entre ses sommets, qui à son tour n'est pas plus grande que le plus grand des nombres diam $(\varphi O_{i_\lambda} \cup \varphi O_{i_{\lambda'}})$, $\lambda, \lambda' = 0, 1, \ldots, r$, i.e. n'est pas plus grande que $2\varepsilon'$.

Le lemme 1 est démontré.

Lemme 2. *Soit $\varphi: X \to \bar{Q}$ une application essentielle. Alors, pour tout simplexe $\bar{Q}_0 \subset Q$ plus petit, il existe un recouvrement $\omega = = \{O_1, \ldots, O_s\}$ du bicompact X et un $\varepsilon > 0$ tels que pour des choix quelconques de $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ de $\omega' > \omega$, d'une (φ, ε')-réalisation canonique de nerf $|\omega|$ et du ε'-déplacement canonique correspondant $g^\omega: |\omega| \to \to \bar{Q}$, l'application simpliciale*

$$\psi = g^\omega \mathfrak{d}_\omega^{\omega'}: |\omega'| \to \bar{Q}$$

recouvre essentiellement le simplexe $\bar{Q}_0$ (i. e. l'application ψ du polyèdre $\psi^{-1}\bar{Q}_0$ sur $\bar{Q}_0$ est essentielle).

Démonstration. Dans [AP], page 266, nous avons la proposition suivante (« supplément au lemme »). Si l'on se donne une application essentielle $\varphi: X \to \bar{Q}$ et un simplexe fermé $\bar{Q}_0 \subset Q$ de dimension n, il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que toute application continue $f: X \to \bar{Q}$ qui diffère de φ par moins que ε, recouvre essentiellement le simplexe $\bar{Q}_0$.

Choisissons un tel ε pour notre φ; alors, en vertu du lemme 1, il existe un tel recouvrement ω du bicompact X que pour chaque $\omega' > \omega$, chaque $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ et chaque ε'-déplacement canonique $g^\omega: |\omega| \to \bar{Q}$ nous avons l'inégalité

$$\rho(\varphi x, g^\omega \mathfrak{d}_\omega^{\omega'} \mu_{\omega'} x) < \varepsilon \text{ pour tout } x \in X.$$

Par conséquent, l'application $f: g^\omega \mathfrak{d}_\omega^{\omega'} \mu_{\omega'}: X \to \bar{Q}$ recouvre essentiellement $\bar{Q}_0$. Montrons que dans ce cas l'application simpliciale $\psi = g^\omega \mathfrak{d}_\omega^{\omega'}: |\omega'| \to \bar{Q}$ recouvre essentiellement $\bar{Q}_0$. Mais ce fait est tout à fait général: si l'application $\psi\mu: X \to \bar{Q}$ recouvre essentiellement $\bar{Q}_0$, alors l'application $\psi: \mu X \to \bar{Q}$ recouvre essentiellement $\bar{Q}_0$. En effet dans le cas contraire on aurait pu trouver une

application $\psi' : \psi^{-1}\bar{Q}_0 \to S_0$ dans la frontière S_0 du simplexe Q_0, qui coïncide sur $\psi^{-1}S_0$ avec l'application ψ. Alors, comme on vérifie facilement, l'application $\psi'\mu : (\psi\mu)^{-1}\bar{Q}_0 \to \bar{Q}_0$ aurait été une application dans S_0 qui coïncide avec $\psi\mu$ sur $(\psi\mu)^{-1}S_0$, ce qui est en contradiction avec l'essentialité de $\psi\mu$. Le lemme 2 est démontré.

4. Démonstration de l'assertion (a) du théorème 1. D'après le théorème des applications essentielles ([AP], p. 265) chaque compact de dimension n possède une application essentielle sur un simplexe fermé $\bar{Q}$ de dimension n; désignons cette application par φ. En conservant les notations des lemmes, nous supposons toujours que le simplexe $\bar{Q}$ est situé dans l'espace R^n de dimension n, plongé à son tour dans R^{2n+1}. Prenons des simplexes plus petits $\bar{Q}_0 \subset Q$, $\bar{Q}_1 \subset Q_0$, $\bar{Q}_2 \subset Q_1$. Posons $\Phi = \varphi^{-1}(\bar{Q} \setminus Q_1) \subseteq X$. Admettons que le nombre ε du lemme 1 est inférieur à la moitié de la distance entre chaque petit simplexe et le complément (dans R^n) du plus grand. Choisissons $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ et construisons pour l'application $\varphi : X \to \bar{Q}$ et ce nombre ε, suivant le lemme 1, le recouvrement $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ de multiplicité $n+1$ du bicompact X. Désignons par $|\omega|$ la (φ, ε')-réalisation canonique du nerf du recouvrement ω. Prenons $\omega' > \omega$ et désignons par $|\omega'|$ le nerf du recouvrement ω', réalisé sous forme d'une triangulation dans R^{2n+1}.

Avant d'aller plus loin, remarquons que l'application $f = g^{\omega}\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'}\mu_{\omega'} : X \to \bar{Q}$ vérifie la relation

$$f^{-1}S_0 \subseteq \Phi, \tag{1}$$

dans le cas contraire on aurait pu trouver un point $x_0 \in X$, pour lequel $fx \in S_0$, $\varphi x \in Q_1$ et donc $\rho(fx_0, \varphi x_0) > 2\varepsilon$, tandis que $\rho(fx, \varphi x) < \varepsilon$ pour tous les $x \in X$. Déduisons maintenant de (1) les inclusions

$$Y_0 \equiv \psi^{-1}S_0 \subseteq |\widetilde{\Phi}\omega'| \cap \psi^{-1}\bar{Q}_0; \quad |\widetilde{\Phi}\omega'| \subseteq |\widetilde{\omega}'| \setminus \psi^{-1}Q_2, \tag{2}$$

où, comme précédemment, $\psi = g^{\omega}\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'}$. Puisque $\psi^{-1}S_0 \subseteq \psi^{-1}\bar{Q}_0 \equiv Y$, il faut démontrer, pour la première des inclusions (2), seulement que $\psi^{-1}S_0 \subseteq |\Phi\omega'|$. Allons-y.

Soit $y \in \psi^{-1}S_0$, i.e. $\psi y = g^{\omega}\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'}y \in S_0$. Désignons par $|e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}|$ le support du point y dans la triangulation $|\omega'|$: $y \in |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| \in |\omega'|$.

Il faut démontrer que chaque $O'_{k_\lambda} \in \omega'$, $\lambda = 0, \ldots, r$, intersecte $\Phi \equiv \varphi^{-1}(\bar{Q} \setminus Q_1)$. Admettons le contraire. Alors pour un certain $\lambda = 0, 1, \ldots, r$, nous avons

$$\varphi O'_{k_\lambda} \subseteq Q_1. \tag{3}$$

Il s'agit de déduire une contradiction de cette inclusion.

Soit $\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} e'_{k_\lambda} = e_{h_\lambda}$, de sorte que *)

$$\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} y \in \mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| \subseteq |\overline{e_{h_0} \ldots e_{h_r}}|.$$

En outre, $O'_{k_\lambda} \subseteq O_{h_\lambda}$. Puisque diam $\varphi O_{h_\lambda} < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$, (3) implique $\varphi O_{h_\lambda} \subseteq O(Q_1, \varepsilon')$ de sorte que $\varphi p_{h_\lambda} \in O(Q_1, \varepsilon')$ quel que soit $\lambda = 0, 1, \ldots, r$ et donc

$$|\overline{\varphi p_{h_0} \ldots \varphi p_{h_r}}| \subseteq O(Q_1, \varepsilon'). \tag{4}$$

Mais

$$\psi y = g^{\omega} \mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} y \in g^{\omega} \mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| \subseteq g^{\omega} |\overline{e_{h_0} \ldots e_{h_r}}| = |\overline{\varphi p_{h_0} \ldots \varphi p_{h_r}}|.$$

Par conséquent, nous avons, d'après (4), $\psi y \in O(Q_1, \varepsilon')$, ce qui est en contradiction avec l'inclusion $\psi y \in S_0$ (car $\rho(Q_1, S_0) > 2\varepsilon > 6\varepsilon'$). La première des inclusions (2) est démontrée.

Démontrons la deuxième inclusion de (2). On a

$$y \in |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| \in |\Phi\omega'|. \tag{5}$$

Donc

$$O'_{k_\lambda} \cap \Phi \neq \Lambda \text{ pour tous les } \lambda = 0, 1, \ldots, r,$$

i.e. $\varphi O'_{k_\lambda} \cap (\overline{Q} \setminus Q_1) \neq \Lambda$ et puisque $Q'_{k_\lambda} \subseteq Q_{h_\lambda}$, on a à plus forte raison

$$\varphi O_{h_\lambda} \cap (\overline{Q} \setminus Q_1) \neq \Lambda \text{ pour } \lambda = 0, 1, \ldots, r. \tag{6}$$

Supposons que

$$\psi y \in Q_2. \tag{7}$$

La relation (5) implique

$$\begin{aligned} \psi y \in \psi |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| &= g^{\omega} \mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} |e'_{k_0} \ldots e'_{k_r}| \subseteq \\ &\subseteq g^{\omega} |\overline{e_{h_0} \ldots e_{h_r}}| = |\overline{\varphi p_{h_0} \ldots \varphi p_{h_r}}|. \end{aligned} \tag{8}$$

Le diamètre du simplexe $|\varphi p_{h_0} \ldots \varphi p_{h_r}|$ est inférieur à $2\varepsilon' < \varepsilon$ et donc les relations (8) et (7) impliquent $|\varphi p_{h_0} \ldots \varphi p_{h_r}| \subseteq O(Q_2, 2\varepsilon)$. Mais $\varphi p_{h_\lambda} \in \varphi O_{h_\lambda}$ et diam $\varphi O_{h_\lambda} < \varepsilon'$. Donc

$$\varphi O_{h_\lambda} \subseteq O(Q_2, 3\varepsilon') \subseteq O(Q_2, \varepsilon) \text{ pour } \lambda = 0, 1, \ldots, r,$$

ce qui est impossible, vu la formule (6). Les inclusions (2) sont démontrées.

Nous aurons besoin également de la formule

$$g^{\omega} |\overline{\Phi\omega}| \subseteq \overline{Q} \setminus Q_2. \tag{9}$$

*) Le trait horizontal indique qu'il s'agit d'un simplexe fermé.

Pour sa démonstration, remarquons que tous les sommets du complexe $g^{\omega}|\Phi\omega|$ sont des points de la forme φp_i, où $p_i \in O_i \cap \Phi$, tandis que les simplexes de ce complexe ont des diamètres $< 2\varepsilon'$; mais $\varphi\Phi \subseteq \overline{Q} \setminus Q_1$, donc tous les simplexes du complexe $g^{\omega}|\Phi\omega|$ sont situés dans un $2\varepsilon'$-voisinage de l'ensemble $\overline{Q} \setminus Q_1$, i.e. $\overline{Q} \setminus Q_2$. La formule (9) est démontrée.

5. **Application du théorème de Hopf.** Récapitulons: nous avons une application essentielle $\psi = g^{\omega}\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'}$ du polyèdre Y (de dimension n) sur le simplexe $\overline{Q}_0$ de dimension n, pour laquelle $\psi^{-1}S_0$ est contenu dans le polyèdre

$$\Pi_0 \equiv |\widetilde{\Phi\omega}| \cap Y \subseteq \psi^{-1}(\overline{Q}_0/Q_2).$$

Désignons maintenant par $|\omega'|_1$ une telle subdivision de la triangulation $|\omega'|$ que le polyèdre Y soit l'espace sous-jacent $\widetilde{K}$ d'un complexe $K \subseteq |\omega'|_1$ et que le polyèdre Π_0, l'espace sous-jacent d'un complexe $K_0 \subseteq K$. Nous sommes alors dans les hypothèses du théorème de Hopf (chapitre 3, théorème 13 et 13'), en vertu duquel le complexe K possède un cycle relatif $z_{0\omega'}^n$ mod K_0 dont l'image par l'application $\psi: Y \to \overline{Q}_0$ recouvre le point o avec un degré $\gamma = g\psi z_{0\omega'}^n \neq 0$. Ce cycle peut alors être choisi soit modulo $m = m(\omega')$, soit pour les groupes de coefficients $\mathfrak{R}_1$ ou $\varkappa$. Pour le déplacement canonique $\sigma: |\omega'|_1 \to |\omega'|$ on a $\sigma K_0 \subseteq |\Phi\omega'|$, et le cycle relatif $z_{0\omega'}^n$ mod K_0 est appliqué dans le cycle relatif $z_{\omega'}^n$ du complexe $|\omega'|$ mod $|\Phi\omega'|$, tandis que sa frontière $z_{0\omega'}^{n-1} = \Delta z_{0\omega'}^n$, en restant tout le temps dans le polyèdre $|\widetilde{\Phi\omega'}| \subseteq \overline{Q} \setminus Q_2$, est appliquée dans un cycle $z_{\omega'}^{n-1}$ du complexe $|\Phi\omega'|$. Le cycle $\psi z_{0\omega'}^{n-1}$ subit dans $\overline{Q} \setminus Q_2$ une déformation laissant invariant le coefficient d'enlacement $\mathfrak{o}(o, \psi z_{0\omega'}^{n-1})$ qui coïncide avec le degré $\gamma \equiv g\psi z_{0\omega'}^n$ avec lequel l'image du cycle $z_{0\omega'}^n$ par l'application ψ recouvre le point o. Donc,

$$g\psi z_{\omega'}^n = g\psi z_{0\omega'}^n = \gamma \neq 0.$$

Il est évident que $\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} z_{\omega'}^n = z_{\omega}^n$ est un cycle relatif du complexe $|\omega|$ mod $|\Phi\omega|$ et

$$gg^{\omega}z_{\omega}^n = gg^{\omega}\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'}z_{\omega'}^n = g\psi z_{\omega'}^n = \gamma \neq 0.$$

Par conséquent, le cycle z_{ω}^n n'est pas homologue à zéro dans $|\omega|$ mod $|\Phi\omega|$, ce qu'il fallait démontrer.

6. **Démonstration de l'assertion (b) du théorème 1.** Conservons les mêmes notations. La projection $\mathfrak{w}_{\omega}^{\omega'} z_{\omega'}^{n-1}$ est un cycle du complexe

$|\Phi\omega|$. Montrons qu'il n'est pas homologue à zéro dans $|\Phi\omega|$. Supposons, en effet, que $\mathfrak{d}_\omega^{\omega'} z_{\omega'}^{n-1}$ est la frontière d'une chaîne x_ω^n du complexe $|\Phi\omega|$. En vertu de la formule (9), la chaîne $g^\omega x_\omega^n$ est située dans $\overline{Q} \setminus Q_2$, de sorte que $gg^\omega x_\omega^n = 0$; pour le cycle $y_\omega^n = z_\omega^n - x_\omega^n$, on a donc $gg^\omega y_\omega^n = gg^\omega z_\omega^n = \gamma \neq 0$, ce qui est évidemment impossible, car chaque cycle de dimension n du simplexe $\overline{Q}_0$ de dimension n y est homologue à zéro. Le théorème 1 est démontré.

§ 2. Cas des compacts

Dans ce cas le théorème 1 implique le

Théorème 2. *Soit X un compact de dimension n. Il existe alors un ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ et un $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$ on a:*

a) *Il existe sur X un δ-cycle relatif z_δ^n* mod Φ *de dimension n, qui n'est pas ε-homologue à zéro dans X* mod Φ.

(b) *Il existe sur Φ un δ-cycle z_δ^{n-1} de dimension $n-1$ qui n'est pas ε-homologue à zéro dans Φ, mais qui est même δ-homologue à zéro sur X.*

On peut choisir ces cycles soit modulo $m = m_\delta$ (qui dépend de δ), soit pour les groupes $\mathfrak{R}_1$ et $\varkappa$.

En même temps, on a pour $r > n$:

(c) *Pour tout ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que chaque δ-cycle* mod Φ *de dimension r est ε-homologue à zéro sur X, tandis que chaque δ-cycle z^{r-1} de dimension $r-1$ de l'ensemble Φ, ε-homologue à zéro sur X, s'avère également ε-homologue à zéro sur Φ, quel que soit le groupe de coefficients.*

Démonstration. Démontrons d'abord l'assertion (c). Supposons donnés: l'ensemble fermé $\Phi \subseteq X$, $\varepsilon > 0$ et $r > n$. Prenons $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ et considérons un ε'-recouvrement ω de multiplicité $n+1$ du compact X. Soit $|\omega|$ un nerf du recouvrement ω réalisé sur X de sorte que les sommets du nerf $|\omega|$ sont des points appartenant aux éléments correspondants du recouvrement ω, tandis que les sommets qui correspondent aux éléments qui coupent Φ, i. e. les sommets du nerf $|\Phi\omega|$, sont des points du compact Φ. Les diamètres des simplexes du complexe $|\omega|$ sont alors inférieurs à $2\varepsilon' < \varepsilon$. Considérons le nombre positif δ si petit que chaque déplacement canonique d'un δ-cycle z_δ^r mod Φ quelconque (resp. d'un δ-cycle z_δ^{r-1} de Φ, δ-homologue à zéro sur X), par rapport au recouvrement ω, induit une ε-homologie entre ce cycle et un certain cycle du nerf $|\omega|$. Mais le complexe $|\omega|$ de dimension n ne possède aucun cycle non nul de dimension $r > n$ et aucun cycle non nul de dimen-

sion $r - 1 \geqslant n$ et homologue à zéro, de sorte que l'homologie mentionnée est une ε-homologie à zéro ; l'assertion est démontrée.

Passons à la démonstration de l'assertion (a) du théorème 2.

Il est donné que $\dim X = n$; choisissons $\Phi \subseteq X$ et le recouvrement ω conformément au théorème 1.

Prenons ε si petit qu'il soit le nombre de Lebesgue du recouvrement ω. Choisissons un nombre δ quelconque, mais plus petit que ε. Choisissons ensuite un $\delta/2$-recouvrement ω' de multiplicité $n + 1$ inscrit dans ω. Le nerf $|\omega'|$ sera supposé réalisé dans X, de la manière indiquée dans la démonstration de l'assertion (c). En vertu du théorème 1, nous avons sur $|\omega'|$ un cycle $z^n_{\omega'}$ mod $|\Phi\omega'|$ (modulo un certain $m = m_{\omega'}$, ou bien pour $\mathfrak{R}_1$ ou $\varkappa$), la projection $\mathfrak{d}^{\omega'}_{\omega} z^n_{\omega'}$ de ce cycle n'étant pas homologue à zéro dans $|\omega|$ mod $|\Phi\omega|$. Mais le cycle $z^n_{\omega'}$ est un δ-cycle sur X mod Φ.

Supposons que le cycle $z^n_{\omega'}$ est la frontière d'une ε-chaîne x^{n+1} de X mod Φ. Effectuons sur cette chaîne le déplacement canonique σ_ω associé au recouvrement ω. Alors $\sigma_\omega z^n_{\omega'} \sim \mathfrak{d}^{\omega'}_{\omega} z^n_{\omega'}$ dans $|\omega|$ (car $\sigma_\omega z^n_{\omega'}$ est une projection du cycle $z^n_{\omega'}$ dans $|\omega|$) et $\Delta\sigma_\omega x^{n+1} = \sigma_\omega z^n_{\omega'}$ mod $|\Phi\omega|$. On déduit donc que $\sigma_\omega z^n_{\omega'} \sim 0$, et donc $\mathfrak{d}^{\omega'}_{\omega} z^n_{\omega'} \sim 0$ mod $|\Phi\omega|$ dans $|\omega|$, contrairement au fait que le cycle $\mathfrak{d}^{\omega'}_{\omega} z^n_{\omega'}$ n'est pas homologue à zéro sur $|\omega|$ mod $|\Phi\omega|$. On démontre d'une manière analogue que le δ-cycle $z^{n-1}_{\omega'\Phi} = \Delta z^n_{\omega'}$ sur Φ, qui est δ-homologue à zéro sur X par définition, n'est pas ε-homologue à zéro sur Φ. Le théorème 2 est démontré.

Chaque compact de dimension finie peut être envisagé comme un ensemble fermé borné d'un espace euclidien. Prenant ceci en considération, déduisons du théorème 2 la proposition suivante, qui lui est essentiellement équivalente :

Théorème 2'. *Soit X un compact de dimension n situé dans l'espace euclidien R^N. Existent alors : un ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ et des voisinages polyédraux OX et $O\Phi$ tels que chaque plus petit voisinage polyédral $\overline{O'X} \subseteq OX$ contient un cycle z^n* mod $[O\Phi]$ *de dimension n, modulo un certain m (resp. modulo 1 ou pour $\varkappa$) qui n'est pas homologue à zéro dans OX* mod $[O\Phi]$. *En plus, chaque voisinage $O'\Phi \subseteq O\Phi \cap O'X$ de l'ensemble Φ contient un cycle z^{n-1} de dimension $n - 1$ (modulo m, ou modulo 1, ou bien pour $\varkappa$) qui est homologue à zéro dans $O'X$ mais n'est pas homologue à zéro dans $O\Phi$.*

Si $r > n$, alors, quel que soit le groupe de coefficients et quels que soient le fermé $\Phi \subseteq X$ et les voisinages OX et $O\Phi$, il existe des voisinages suffisamment petits $O'X$ et $O'\Phi$, tels que chaque cycle z^r mod $[O\Phi]$ *de dimension r situé dans $O'X$ sera homologue à zéro dans OX* mod $[O\Phi]$, *tandis que chaque cycle z^{r-1} de $O'X$ de dimension $r - 1$, homologue à zéro dans $O'X$, sera également homologue à zéro dans $O\Phi$.*

Démonstration. Choisissons $\varepsilon > 0$ conformément au théorème 2 et $\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon}{3}$. Désignons par OX (resp. $O\Phi$) un voisinage polyédral de l'ensemble X (resp. de l'ensemble Φ) constitué de tous les simplexes (d'une certaine ε_0-triangulation de l'espace R^N) qui possèdent des points communs avec X (resp. avec Φ).

Choisissons maintenant $\delta_0 < \frac{\varepsilon_0}{3}$ et un δ_0-voisinage polyédral $O'X$ (resp. $O'\Phi$) des ensembles X et Φ dans R^N. Désignons par δ le plus petit des nombres δ_0, $\rho(X, R^N \setminus O'X)$, $\rho(\Phi, R^N \setminus O'\Phi)$. En vertu du théorème 2, il existe un δ-cycle z^n_δ mod Φ dans X qui n'est pas ε-homologue à zéro dans X mod Φ, dont la frontière $z^{n-1}_\delta = \Delta z^n_\delta$ dans Φ n'est pas ε-homologue à zéro dans Φ. Le cycle relatif z^n_δ et le cycle z^{n-1}_δ sont respectivement des cycles situés dans $O'X$ et dans $O'\Phi$. Démontrons qu'ils ne sont pas homologues à zéro dans $[OX]$ mod $[O\Phi)$ (resp. dans $O\Phi$).

Soit $z^n_\delta \sim 0$ dans OX mod $[O\Phi]$. Il existe alors dans OX une chaîne x^{n+1} ayant pour frontière mod $[O\Phi]$ la chaîne z^n_δ; en passant, s'il le faut, à une subdivision de la chaîne x^{n+1}, nous pouvons supposer que ses simplexes sont de diamètre $<\varepsilon_0$. Déplaçons maintenant chaque sommet de la chaîne x^{n+1} dans le point le plus proche de l'ensemble X, de sorte que les sommets situés dans $O\Phi$ soient appliqués dans des points de l'ensemble Φ. On obtient alors un ε_0-déplacement de la chaîne x^{n+1} qui laisse invariants les sommets de la chaîne z^n_δ. Ce déplacement applique la chaîne x^{n+1} dans une ε-chaîne y^{n+1} du compact X qui a pour frontière mod Φ la chaîne z^{n+1}_δ, ce qui est en contradiction avec le fait que z^n n'est pas homologue à zéro dans X mod Φ. On démontre d'une manière analogue que z^{n-1}_δ n'est pas homologue à zéro dans $O\Phi$.

Démontrons la deuxième moitié du théorème 2'.

Soit $r > n = \dim X$. Choisissons arbitrairement l'ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ et les voisinages polyédraux OX et $O\Phi$. Choisissons un nombre $\varepsilon > 0$ si petit que $O(X, \varepsilon) \subseteq OX$ et $O(\Phi, \varepsilon) \subseteq O\Phi$. Supposons que le nombre positif $\delta < \varepsilon$ est si petit que chaque δ-cycle z^r_δ de dimension r du compact X mod Φ satisfait à l'homologie $z^r_\delta \sim 0$ dans X mod Φ (un tel δ existe en vertu du théorème 2). Soit enfin $\delta' < \frac{\delta}{4}$. Choisissons un cycle z^r quelconque de $O(X, \delta')$ mod $[O(\Phi, \delta')]$ de dimension r. En passant, s'il le faut, à une subdivision de la chaîne z^r, nous pouvons supposer que tous ses simplexes ont des diamètres inférieurs à δ'. En appliquant chaque sommet du cycle Δz^r dans le point de l'ensemble Φ le plus proche, et chaque sommet de la chaîne z^r dans le point de l'ensemble X le plus proche, nous obtiendrons un δ'-déplacement de la δ'-chaîne z^r dans la $3\delta'$-chaîne $z^r_{3\delta'}$, qui est un $3\delta'$-cycle de l'ensemble X mod Φ. Le prisme de ce déplacement est situé à l'intérieur de $O(X, 4\delta')$ (pour le cycle Δz^r, à l'intérieur de $O(\Phi, 4\delta')$), de sorte que $z^r \sim z^r_{3\delta'}$ dans $O(X, 4\delta')$ mod $[O(\Phi, 4\delta')]$; donc (puisque $4\delta' < \delta < \varepsilon$) on a $z^r \sim z^r_{3\delta'}$ dans $O(X, \varepsilon)$ mod $[O(\Phi, \varepsilon)]$. D'après le choix du nombre δ' on a l'homologie

$$z^r_{3\delta'} \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \text{ dans } X \text{ mod } \Phi$$

et donc $z^r_{3\delta'} \sim 0$ dans $O(X, \varepsilon)$ mod Φ, et puisque $O(X, \varepsilon) \subseteq OX$ et $O(\Phi, \varepsilon) \subseteq O\Phi$, on aura aussi l'homologie

$$z^r \sim z^r_{3\delta'} \sim 0 \text{ dans } OX \text{ mod } [O\Phi].$$

Le théorème 2 implique immédiatement le

Théorème 3. *La dimension d'un compact X de dimension finie est le plus grand des nombres entiers n qui satisfait à une des deux conditions ci-dessous, équivalentes entre elles:*

a) *Il existe dans X un ensemble fermé Φ et un cycle relatif z^n* mod Φ *de dimension n (à coefficients variables, ou bien pour $\mathfrak{R}_1$ ou pour $\varkappa$) qui est complètement non homologue à zéro dans X* mod Φ.

b) *Il existe dans X un ensemble fermé Φ qui contient un cycle z^{n-1} de dimension $n-1$ (à coefficients variables, ou bien pour $\mathfrak{R}_1$ ou pour $\varkappa$) qui est homologue à zéro dans X mais qui est complètement non homologue à zéro dans Φ.*

Le corollaire 2 du théorème de convergence (chapitre 2, p. 128) permet d'entendre par cycles, dans la partie du théorème 3 qui a trait aux groupes de coefficients $\mathfrak{R}_1$ et $\varkappa$, les cycles convergents (relatifs, respectivement absolus). Nous obtenons ainsi une autre formulation du

Théorème 3. *La dimension d'un compact X est le plus grand nombre entier n qui satisfait à une des conditions suivantes, équivalentes entre elles :*

(a) *Il existe dans X un ensemble fermé Φ et un cycle relatif z^n* mod Φ *(convergent) de dimension n, non homologue à zéro dans X* mod Φ.

(b) *Il existe dans X un ensemble fermé Φ et un cycle z^{n-1} (convergent) de dimension $n-1$ de cet ensemble, non homologue à zéro dans Φ, mais homologue à zéro dans X.*

Pour groupes de coefficients on peut alors prendre $\mathfrak{R}_1$, aussi bien que $\varkappa$.

Si l'on se rappelle la démonstration du théorème 1, on voit que les cycles $z^n_{\omega'}$ mod $|\Phi\omega'|$ et $z^{n-1}_{\omega'}$ dont l'existence était démontrée dans le théorème, étaient choisis de manière que leurs images $\psi z^n_{\omega'}$ et $\psi z^{n-1}_{\omega'}$ par l'application $\psi = g^{\omega}\mathfrak{S}^{\omega'}_{\omega} : |\omega'| \to \overline{Q}_0$ soient enlacées avec le point o, le centre du simplexe $\overline{Q}_0$. Pour la démonstration du théorème 2, l'étape principale est la construction des cycles z^n_0 mod Φ et z^{n-1}_0, dont les images par une certaine application essentielle étaient enlacées avec le point o. Ces cycles nous ont permis d'obtenir au théorème 3 les cycles convergents z^n mod Φ et z^{n-1}, toujours enlacés avec o. Autrement dit, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit X un compact, $\dim X = n$ et $f : X \to \overline{Q}^n$ son application essentielle sur le simplexe $\overline{Q}^n$ de dimension n. Il existe alors un tel compact $\Phi \subseteq X$ et de tels cycles z^n* mod Φ *du compact X et z^{n-1} du compact Φ que l'image du cycle z^n par l'application f recouvre le centre o du simplexe $\overline{Q}^n$ avec un degré non nul et donc (pour les cycles convergents) $\mathfrak{o}(z^{n-1}, o) = \gamma \neq 0$.*

Ici on peut entendre par cycles soit les cycles à coefficients variables, soit les cycles pour un des groupes $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$, soit les cycles convergents pour chacun des groupes $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$.

Remarques concernant la définition générale de la dimension homologue. Dans mon article [1] j'avais défini (p. 142) la dimension de l'espace X pour un groupe de coefficients quelconques $\mathfrak{A}$, comme le plus grand nombre entier n pour lequel X contient un ensemble fermé Φ qui porte un cycle de dimension $n-1$ complètement non homologue à zéro dans Φ, mais homologue à zéro dans X.

La définition avait été donnée pour un compact X, mais (comme il est indiqué dans l'article cité), on la généralise facilement à des espaces beaucoup plus généraux, en particulier aux bicompacts (et donc aux espaces normaux quelconques).

Le contenu de cette définition varie suivant la signification du mot cycle : si par cycle on entend un cycle véritable quelconque (sans exiger sa convergence), nous obtenons une dimension que nous désignerons par $d_{\mathfrak{A}}X$; si par cycle on entend un cycle convergent, nous obtenons la dimension désignée $d_{\mathfrak{A}}^{(c)}X$. Les cycles à coefficients variables nous amènent de la même manière à une dimension que l'on peut désigner par $d_{\mathfrak{v}}X$.

Mais on peut aussi définir un invariant de dimension, que nous désignerons par $D_{\mathfrak{A}}X$ (resp. $D_{\mathfrak{A}}^{(c)}X$ et $D_{\mathfrak{v}}X$), comme le plus grand nombre entier n pour lequel il existe un fermé $\Phi \subseteq X$, tel que X possède un cycle relatif de dimension n (resp. convergent, ou à coefficients variables) mod Φ complètement non homologue à zéro sur X mod Φ.

Il est évident que l'invariant $D_{\mathfrak{A}}^{(c)}X$ peut être défini également comme le plus grand entier n pour lequel X possède un sous-ensemble fermé F tel que le groupe $\Delta_{\mathfrak{A}}^{n}(X, \text{mod } F)$ soit non nul. En remplaçant dans cette définition le groupe $\Delta_{\mathfrak{A}}^{n}(X, \text{mod } F)$ par le groupe $\nabla_{\mathfrak{A}}^{n}(X, \text{mod } F)$, nous obtenons la définition de la dimension cohomologique, à laquelle nous reviendrons au dernier chapitre du présent ouvrage.

Il est évident que $d_{\mathfrak{A}}X \geqslant d_{\mathfrak{A}}^{(c)}X$, $D_{\mathfrak{A}}X \geqslant D_{\mathfrak{A}}^{(c)}X$; nous verrons maintenant qu'en outre

$$D_{\mathfrak{A}}X \geqslant d_{\mathfrak{A}}X. \tag{1}$$

Avec les définitions du chapitre 6, le théorème 1 du présent chapitre peut maintenant être reformulé ainsi :

Pour chaque bicompact X on a

$$\dim X = D_{\mathfrak{v}}X = D_{\mathfrak{R}_1}X = D_{\varkappa}X = d_{\mathfrak{v}}X = d_{\mathfrak{R}_1}X = d_{\varkappa}X,$$

en plus, pour tout groupe de coefficients $\mathfrak{A}$, on a les inégalités

$$\dim X \geqslant D_{\mathfrak{A}}X \geqslant D_{\mathfrak{A}}^{(c)}X,$$

$$\dim X \geqslant d_{\mathfrak{A}}X \geqslant d_{\mathfrak{A}}^{(c)}X.$$

Le théorème 3 se met alors sous la forme :

Pour chaque compact X on a

$$\dim X = D_v X = D_{\mathfrak{R}_1} X = D^{(c)}_{\mathfrak{R}_1} X = D_\varkappa X = D^{(c)}_\varkappa X =$$
$$= d_v X = d_{\mathfrak{R}_1} X = d^{(c)}_{\mathfrak{R}_1} X = d_\varkappa X = d^{(c)}_\varkappa X.$$

La formule (1) découle immédiatement du lemme suivant.

Lemme. *Soit* (pour un groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ quelconque)

$$z^{r-1} = (z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \ldots, z_k^{r-1}, \ldots)$$

un cycle de Φ qui n'y est pas homologue à zéro, mais s'avère homologue à zero dans X, et soit x_k^r une ε_k-chaîne de X, de frontière z_k^{r-1}. Alors

$$x^r = (x_1^r, x_2^r, \ldots, x_k^r, \ldots)$$

est un cycle) de X* mod Φ, *non homologue à zéro dans X* mod Φ.

Démonstration (par l'absurde). Soient x_k^{r+1} des ε_k'-chaînes de X, $\varepsilon_k' \to 0$, dont les frontières dans X mod Φ sont les chaînes x_k^r:

$$\Delta x_k^{r+1} = x_k^r - y_k^r,$$

où y_k^r est contenu dans Φ. Puisque

$$0 \equiv \Delta\Delta x_k^{r+1} = \Delta x_k^r - \Delta y_k^r,$$

on a $z_k^{r-1} \equiv \Delta x_k^r = \Delta y_k^r$, i.e. $z_k^{r-1} \sim 0$ sur Φ, contrairement à nos hypothèses.

D'autre part, le corollaire 2 du théorème de convergence implique que pour tout compact X et un groupe de coefficients $\mathfrak{A}$, choisi parmi les groupes $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$, I_m ($m = 2, 3, \ldots$), on a

$$D_{\mathfrak{A}} X = D^{(c)}_{\mathfrak{A}} X, \quad d_{\mathfrak{A}} X = d^{(c)}_{\mathfrak{A}} X.$$

Enfin, au § 6 de ce chapitre, pour ces mêmes groupes de coefficients, nous démontrerons la formule (déjà démontrée pour $\varkappa$ et $\mathfrak{R}_1$)

$$d_{\mathfrak{A}} X \geqslant D_{\mathfrak{A}} X$$

qui implique, d'après ce que nous venons de dire, le

Théorème 5. *Supposons que le groupe de coefficients est un des groupes $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$, I_m, où $m = 2, 3, \ldots$ Alors pour tout compact X on a les égalités*

$$D_{\mathfrak{A}} X = D^{(c)}_{\mathfrak{A}} X = d_{\mathfrak{A}} X = d^{(c)}_{\mathfrak{A}} X.$$

---

*) Convergent si le cycle z^{r-1} l'était, et complètement non homologue à zéro si tel était le cycle z^{r-1}.

§ 3. Théorème d'addition et quelques conséquences

1. Remarques préliminaires: opération de décomposition d'un cycle. Supposons que le compact Φ est la réunion de deux compacts Φ' et Φ'' et que Φ possède un cycle véritable $z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$. Soit, pour chaque k, x_k' le morceau du cycle z_k^p situé sur Φ', i. e. la chaîne de dimension p que l'on obtient en prenant dans z_k^p seulement ceux des simplexes qui possèdent au moins un sommet commun avec Φ'. Alors la « chaîne véritable » $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_k', \ldots)$ est le *morceau du cycle véritable* z^p *situé dans* Φ' et a pour frontière

$$u^{p-1} = \Delta x' = (\Delta x_1', \Delta x_2', \ldots, \Delta x_k', \ldots),$$

qui (éventuellement après un déplacement infiniment petit *)) peut être considérée comme un cycle véritable du compact $\Phi_0 = \Phi' \cap \Phi''$. Si l'on pose $x_k'' = x_k' - z_k^p$, alors évidemment $\Delta x_k' = \Delta x_k''$, de sorte que le cycle véritable u^{p-1} est la frontière commune de deux chaînes véritables

$$x' = (x_1', x_2, \ldots, x_k', \ldots)$$

et

$$x'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_k'', \ldots)$$

situées respectivement dans Φ' et Φ''. Nous dirons de ce cycle u^{p-1} qu'il est obtenu par *décomposition du cycle* z^p *par le compact* $\Phi_0 = \Phi' \cap \Phi''$.

Nous nous servirons par la suite des deux propriétés suivantes de l'opération d'intersection.

Lemme 1. *Supposons que le cycle véritable* $z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$ *est homologue à zéro dans* $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$. *Alors le cycle* u^{p-1}, *obtenu par décomposition du cycle* z^p *par le compact* $\Phi_0 = \Phi' \cap \Phi''$ *est aussi homologue à zéro dans* Φ_0.

D é m o n s t r a t i o n. En effet, soit $z_k^p = \Delta y_k$, où y_k est une η_k-chaîne du compact Φ. Désignons par y_k' le morceau de cette chaîne situé dans Φ' et posons $y_k'' = y_k - y_k'$, de sorte que

$$z_k^p = \Delta y_k' + \Delta y_k''.$$

---

*) Rappelons qu'un déplacement infiniment petit est un tel déplacement du cycle (ou de la chaîne) $z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$ par lequel z_k^p est soumis à un ε_k-déplacement et $\varepsilon_k \to 0$. D'après le lemme du ε'-déplacement, le ε-cycle obtenu par un déplacement infiniment petit est homologue au cycle donné; il est convergent si le cycle donné est convergent.

Prenons dans cette égalité à droite et à gauche les morceaux situés dans Φ'. Nous obtenons alors

$$x'_k = \Delta y'_k + w_k,$$

où la chaîne w_k de dimension p est située dans un η_k-voisinage du compact Φ_0, de sorte que la chaîne véritable $w = (w_1, w_2, \ldots \ldots, w_k, \ldots)$ peut être supposée située dans Φ_0. En posant $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_k, \ldots)$ et $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, \ldots)$ nous obtenons

$$x' = \Delta y' + w,$$

ou en passant aux frontières

$$u^{p-1} = \Delta x' = \Delta w,$$

i. e. $u^{p-1} \sim 0$ dans Φ_0, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 2. *Si le cycle z^p dans le compact $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$ est convergent, alors le cycle z^{p-1} obtenu de z^p par décomposition par le compact $\Phi' \cap \Phi''$ est convergent dans $\Phi' \cap \Phi''$.*

Pour la démonstration, il suffit d'envisager dans le raisonnement ci-dessus les chaînes $y_{h;k}$ à frontières $\Delta y_{h,k} = z^p_h - z^p_k$ à la place des chaînes y_k.

2. Théorème d'addition et quelques conséquences. Nous allons maintenant considérer exclusivement les compacts de dimension finie, i. e. les compacts situés dans un espace euclidien R^n. Si l'espace R^n est donné (ce que nous supposerons dans ce paragraphe), nous désignerons comme toujours par p et q deux nombres non négatifs entiers de somme $p + q = n - 1$. D'autre part, nous appellerons brièvement cycle modulo 1 *dans un ensemble ouvert tout cycle entier*, et, *dans un compact, tout cycle convergent pour le groupe* $\mathfrak{R}_1$ ou pour le groupe $\varkappa$. Un cycle modulo 0 est toujours un cycle pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$.

Le théorème suivant a de nombreuses applications pour l'étude des compacts situés dans un espace R^n donné.

Théorème 6 (théorème d'addition) *). *Supposons que le compact $\Phi \subseteq R^n$ est la réunion de deux compacts Φ' et Φ'', et soit z^q un cycle modulo $m \geqslant 0$ situé dans $\Gamma = R^n \setminus \Phi$, non homologue à zéro dans Γ, mais homologue à zéro aussi bien dans $\Gamma' = R^n \setminus \Phi'$ que dans $\Gamma'' = R^n \setminus \Phi''$. Alors $\Phi' \cap \Phi''$ possède un cycle convergent z^p de dimension p, modulo le même m que le cycle z^{p-1} (pour $m = 1$ c'est également un cycle exponentiel), homologue à zéro dans Φ' et dans Φ'', mais non homologue à zéro dans $\Phi' \cap \Phi''$.*

*) J'ai démontré ce théorème dans l'article [1] sous le titre « théorème généralisé de Fragmén-Brouwer »; le théorème de Fragmén-Brouwer proprement dit affirme que la somme de deux compacts disjoints $\Phi_1 \subseteq R^n$ et $\Phi_2 \subseteq R^n$, qui ne décomposent pas l'espace R^n, ne décompose non plus R^n.

Démonstration. D'après les propositions 3-6 du chapitre 3 concernant les enlacements, le compact Φ possède un cycle convergent pour le groupe de coefficients approprié, enlacé avec le cycle z^q; désignons-le par $z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$. Soit

$$(1) \qquad z^{p-1} = (z_1^{p-1}, z_2^{p-1}, \ldots, z_k^{p-1}, \ldots)$$

le cycle obtenu de z^p par décomposition par le compact $\Phi' \cap \Phi''$. Par sa construction même, le cycle z^{p-1} est homologue à zéro dans Φ' aussi bien que dans Φ''. D'autre part, d'après le lemme 2, le cycle z^{p-1} sera aussi convergent. Il reste à démontrer que le cycle z^{p-1} ne peut être homologue à zéro dans $\Phi' \cap \Phi''$. Admettons le contraire: soit $z^{p-1} = \Delta y^p$, où $y^p = \{y_k^p\}$ est une chaîne véritable située dans $\Phi' \cap \Phi''$. Alors les chaînes véritables

$$z' = x'^p - y^p \quad \text{et} \quad z'' = -x''^p - y^p$$

(où $x'^p = \{x_k'^p\}$, $x''^p = \{x_k''^p\}$, et $x_k'^p$, $x_k''^p$ se définissent comme au n° 1) sont évidemment des cycles convergents, situés respectivement dans Φ' et Φ'', en outre $z^p = z' - z''$ et

$$\mathfrak{o}(z_k^p, z^q) = \mathfrak{o}(z_k', z^q) - \mathfrak{o}(z_k'', z^q).$$

Mais $z^q \sim 0$ dans $R^n \setminus \Phi'$ et dans $R^n \setminus \Phi''$, et donc pour tous les k suffisamment grands, nous avons $\mathfrak{o}(z_k', z^q) = \mathfrak{o}(z_k'', z^q) = 0$, et alors aussi $\mathfrak{o}(z_k^p, z^q) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de l'enlacement des cycles z^p et z^q. Le théorème 6 est démontré.

Exactement de la même manière que le théorème 6, on démontre le « théorème d'addition des cycles relatifs », à savoir le

Théorème 6'. *Supposons donnés dans R^n: une boule ouverte U^n de dimension n et de frontière S^{n-1}, le compact $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$ situé dans la boule fermée $\overline{U}^n$ et le cycle z^q (modulo $m \geqslant 0$) situé dans $U^n \setminus \Phi$, non homologue à zéro dans $U^n \setminus \Phi$ mais homologue à zéro dans $U^n \setminus \Phi'$ aussi bien que dans $U^n \setminus \Phi''$. Alors $\Phi' \cap \Phi''$ possède un cycle relatif* mod S^{n-1}, *homologue à zéro aussi bien dans Φ' que dans Φ'', mais non homologue à zéro dans $\Phi' \cap \Phi''$ (toutes les homologies sont considérées* mod S^{n-1}).

Une autre définition nous sera nécessaire par la suite.

Soit Φ un compact de R^n et U^n, comme toujours, une boule ouverte de R^n, où l'on suppose que U^n peut être une « boule de rayon infini », i. e. on peut envisager le cas $U^n = R^n$. Le compact Φ et le cycle z de l'ensemble ouvert $\Gamma = U^n \setminus \Phi$ sont dits *enlacés* dans U^n, si le cycle z n'est pas homologue à zéro dans Γ; si en plus $z \sim 0$ dans tout ensemble ouvert $\Gamma' \subseteq U^n$ qui contient strictement l'ensemble Γ (de sorte que $U^n \supset \Gamma' \supset \Gamma$), le compact Φ et le cycle z sont dits *irréductiblement enlacés*.

Remarque 1. Si le cycle z est de dimension nulle et consiste d'un couple de points a, b, le fait qu'il est irréductiblement enlacé avec le compact Φ dans U^n signifie que Φ sépare irréductiblement dans U^n les points a et b (voir le livre [AP], chapitre 8, p. 434). Par conséquent, la proposition suivante, presque évidente, est une généralisation d'un théorème démontré dans le livre [AP].

Proposition 1. *Si Φ_0 est un compact de R^n et le cycle z situé dans $\Gamma_0 = U^n \setminus \Phi_0$ n'est pas homologue à zéro dans Γ_0, alors il existe un compact $\Phi \subseteq \Phi_0$, irréductiblement enlacé avec z dans U^n.*

La démonstration de cette proposition se réduit, par une récurrence transfinie évidente, au lemme suivant.

Lemme. *Si l'on se donne dans R^n une suite décroissante de compacts*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_k \supseteq \ldots$$

à intersection $\Phi_\omega = \bigcap_k \Phi_k$ et un cycle z, situé dans $\Gamma_\omega = U^n \setminus \Phi_\omega$, non homologue à zéro dans aucun des ensembles $\Gamma_k = U^n \setminus \Phi_k$, alors il ne sera pas homologue à zéro dans Γ_ω.

Démontrons le lemme par l'absurde. Soit $z \sim 0$ dans Γ_ω. Prenons une chaîne x située dans Γ_ω et qui possède pour frontière le cycle z: $\Delta x = z$. Le support $\tilde{x}$ de la chaîne x se trouve à une distance positive d du compact Φ_ω. Prenons un nombre positif $\varepsilon < d$. Il existe un k tel que Φ_k est situé dans un ε-voisinage $O(\Phi_\omega, \varepsilon)$; évidemment

$$\tilde{x} \subseteq U^n \setminus O(\Phi, \varepsilon) \subseteq \Gamma_k,$$

c. e. $z \sim 0$ dans Γ_k contrairement à l'hypothèse. Le lemme et, donc, la proposition 1 sont démontrés.

Considérons le cas où le cycle z^q est non seulement homologue à zéro dans Γ, mais s'avère irréductiblement enlacé au compact Φ dans U^n. Nous aurons alors le

Théorème 7. *Si le cycle z^q (modulo $m \geqslant 0$) est irréductiblement enlacé dans U^n avec le compact $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, Φ' et Φ'' sont fermés et non vides, alors le compact $\Phi' \cap \Phi''$ contient un cycle de dimension $p-1$:*

(a) *pour $U^n = R^n$, le cycle z^{p-1};*

(b) *pour $U^n \neq R^n$, le cycle relatif z^{p-1} mod $(\bar{U} \setminus U)$, modulo le même m *), homologue à zéro dans Φ' et dans Φ'', mais n'est pas homologue à zéro dans $\Phi' \cap \Phi''$, de sorte qu'en particulier $d_{I_m} \times (\Phi' \cap \Phi'') \geqslant p-1$; si on a en même temps* dim $\Phi = p$, *alors Φ est une variété cantorienne de dimension p, « le continuum U^p ».*

---

*) Comme dans le théorème 6, on entend par cycle modulo 1 dans Φ un cycle pour $\varkappa$, et alors $d_{\mathfrak{R}_1}$ signifie $d_\varkappa$.

Démonstration. En effet, par hypothèse $z^q \sim 0$ dans $U^n \setminus \Phi'$ et $z^q \sim 0$ dans $U^n \setminus \Phi''$, de sorte que le théorème 7 découle directement du théorème d'addition 6 (respectivement 6').

Soit maintenant $q = 0$, $p = n - 1$ et soit z^q un cycle irréductiblement enlacé avec le compact Φ, étant lui-même le couple de points a, b. Alors le compact sépare irréductiblement (dans U^n) les points a et b et ne peut être de dimension n. Il est donc une variété cantorienne de dimension $n - 1$, et le théorème 7 contient comme cas particulier le

Théorème 7'. *Chaque compact $\Phi \subseteq R^n$ qui sépare irréductiblement deux points (dans U^n quelconque), en particulier, chaque frontière absolue de R^n, est une variété cantorienne de dimension $n - 1$ qui possède la propriété supplémentaire suivante: si $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, alors le compact $\Phi' \cap \Phi''$ contient un cycle z^{n-2} de dimension $n - 2$ pour un des groupes de coefficients $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$, $\mathfrak{R}$, I_m, $m = 2, 3, \ldots$, homologue à zéro sur Φ' et sur Φ'', mais non sur $\Phi' \cap \Phi''$.*

L'existence du cycle z^{n-2} pour tout groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$, $\mathfrak{R}$, I_m découle du fait qu'un couple de points a, b, séparé irréductiblement par le compact Φ, peut être envisagé comme un cycle de dimension zéro irréductiblement enlacé avec ce compact (pour tout groupe de coefficients), tandis que le théorème d'addition est vérifié pour chacun des groupes $\mathfrak{R}_1$, $\varkappa$, $\mathfrak{R}$, I_m.

Cette dernière remarque nous amène directement à la notion de variété cantorienne algébrique, i. e. à l'idée de définir cette notion pour un groupe de coefficients quelconque: *on appelle variété cantorienne de dimension p relativement au groupe de coefficients $\mathfrak{A}$, ou continuum $U^p_{\mathfrak{A}}$, le bicompact X qui satisfait aux conditions suivantes:*

1°. $d_{\mathfrak{A}} X = p$.

2°. *Si le bicompact X est la réunion de deux bicompacts Φ' et Φ'', alors* $d_{\mathfrak{A}}(\Phi' \cap \Phi'') \geqslant p - 1$.

Evidemment, la variété cantorienne usuelle de dimension p (« le continuum U^p ») n'est autre que le « continuum $U^p_{\mathfrak{R}_1}$ ».

3. Points principaux; solides de dimension donnée. On appelle *point principal d'un compact X de dimension finie* $\dim X = p$ chaque point $x \in X$ qui possède la propriété suivante: la frontière B de chaque voisinage Ox suffisamment petit du point x contient un cycle de dimension $p - 1$ (exponentiel, aussi bien que modulo 1) homologue à zéro dans $[Ox]$, mais non homologue à zéro dans $B = [Ox] \setminus Ox$ (par conséquent $\dim B \geqslant p - 1$).

Remarque 2 (concernant la définition du point principal). Il découle de cette définition que pour un choix quelconque d'un voisinage Ox (suffisamment petit) du point principal x, il existe dans $[Ox]$ un cycle relatif x^p mod B de dimension p, où $B = [Ox] \setminus Ox$,

non homologue à zéro dans $[Ox]$ mod B. Le cycle x^p peut être choisi exponentiel, ou bien convergent, pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$.

Démonstration. Soit $z^{p-1}=(z_1^{p-1}, z_2^{p-1}, \ldots, z_k^{p-1}, \ldots)$, $z_k^{p-1}=\Delta x_k^p$, où x_k^p est une ε_k-chaîne, $\varepsilon_k \to 0$. Alors $x^p=(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_k^p, \ldots)$ est un cycle dans $[Ox]$ mod B. Si l'on avait $x^p \sim 0$ dans $[Ox]$ mod B, il existerait des ε_k'-chaînes x_k^{p+1} dans $[Ox]$, $\varepsilon_k' \to 0$, $\Delta x_k^{p+1} = x_k^p + y_k^p$, où y_k^p est situé dans B, et nous aurions $0 = \Delta\Delta x_k^{p+1} = z_k^{p-1} + \Delta y_k^p$, $z_k^{p-1} = \Delta(-y_k^p)$, i.e. $z^{p-1} \sim 0$ dans B.

Le compact X s'appelle *solide de dimension* p, s'il est une variété cantorienne de dimension p qui est l'adhérence d'un ensemble ouvert G (de X) dont tous les points sont des points principaux du compact X ; chaque tel ouvert $G \subseteq X$ s'appelle *noyau* du solide $X = [G]$ de dimension p.

Remarque 3. Il découle de la définition même du point principal d'un compact X de dimension p, $\dim X = p$, que nous avons dans chaque point principal $x \in X$ l'égalité $\operatorname{ind}_x X = p$, d'où l'on déduit que pour tout solide $X = [G]$ de dimension p et de noyau G, on a $\dim G = p$.

Au § 6 nous déduirons des résultats obtenus une proposition qui se présente comme un des théorèmes « géométriques » de la dimension les plus importants, appelé troisième théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension, qui affirme que chaque compact de dimension p contient un solide de dimension p.

Remarque 4. La notion de point principal et de solide de dimension p admet une algébrisation évidente, analogue à celle à laquelle nous venons de soumettre la notion de variété cantorienne : en remplaçant dans ces définitions la dimension dim par la dimension relative au groupe de coefficients $\mathfrak{A}$, nous obtiendrons les notions de point principal et de solide de dimension p relativement au groupe $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A} = I_m$, on dira que ce sont *des points principaux et des solides de dimension p modulo m*, et dans le cas $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, *des points* et *des solides modulo zéro*.

§ 4. Deuxième théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension : décomposition des homologies

1. Enoncé du théorème; deux lemmes. Convenons de la terminologie et des notations. Par cycle d'un compact nous entendons toujours par la suite un cycle convergent pour les groupes de coefficients $\mathfrak{R}_1$ ou $\varkappa$. Par homologie de dimension r sur le compact Φ nous entendons une homologie $z^r \sim 0$ dans Φ, où z^r est un cycle du

compact Φ non homologue à zéro sur un de ses supports $\Phi_1 \subseteq \Phi$. Le compact $B \subseteq \Phi$ *décompose l'homologie* $z^r \sim 0$ dans Φ (autrement: le cycle z^r est enlacé au compact B), si $z^r \not\sim 0$ dans $\Phi \setminus B$ et $B \cap \tilde{z}^r = \Lambda$.

Pour ce qui va suivre, il faudra nous servir de la notion de diamètre de dimension k, notion importante dans beaucoup de questions de topologie et d'analyse fonctionnelle: on appelle *diamètre* $\alpha^k\Phi$ *de dimension* k *du compact* $\Phi \subseteq R^n$ la borne inférieure de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels il existe un ε-déplacement du compact Φ sur un polyèdre de dimension $\leqslant k$.

Enfin, comme toujours, $C(\Phi, R^n)$ désignera l'ensemble de toutes les applications continues $f: \Phi \to R^n$ du compact Φ dans R^n avec la métrique standard

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in \Phi} \rho(fx, gx).$$

Enonçons maintenant le théorème fondamental déjà mentionné dans l'introduction à ce chapitre.

Théorème 8. *Soit* Φ *un compact et* $\dim \Phi = n$. *Alors*:

(1) *Pour chaque* r, *toute homologie de dimension* r *dans* Φ *peut être décomposée par un compact* $B \subseteq \Phi$ *de dimension non supérieure à* $n - r - 1$.

(2) *Pour chaque* r, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$, *il existe une homologie de dimension* r, $z^r \sim 0$ *dans* Φ *que l'on ne peut décomposer par aucun compact de dimension inférieure à* $n - r - 1$.

Deux lemmes nous serons nécessaires pour la démonstration; le premier est tout à fait élémentaire, tandis que le second, dû à Froum-Ketkov, est dans un certain sens une spécification du théorème de Nöbeling-Pontriaguine ([AP], p. 259).

Lemme 1. *Soit* $f_0: \Phi \to \tilde{K} \subseteq R^m$ *un* ε-*déplacement du compact* $\Phi \subseteq R^m$ *dans le polyèdre* $\tilde{K}$. *Alors l'application* f_0 *peut être prolongée à une application* $f_1: [O\Phi] \to \tilde{K}$ *de l'adhérence d'un voisinage suffisamment petit* $O\Phi$ *du compact* Φ, *et cette application est également un* ε-*déplacement.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque pour chaque point $x \in \Phi$ nous avons $\rho(x, f_0x) = \varepsilon_x < \varepsilon$ et Φ est un compact, on a $\sup_{x \in \Phi} \varepsilon_x = \varepsilon_1 < \varepsilon$. Posons $\eta = \varepsilon - \varepsilon_1$. En vertu du théorème de Brouwer-Urysohn sur l'extension des applications, l'application $f_0: \Phi \to \tilde{K} \subseteq R^m$ peut être prolongée à une application continue $f_1: \bar{Q}^m \to R^m$, où $\bar{Q}^m$ est un cube qui contient dans son intérieur le compact Φ ainsi que le polyèdre $\tilde{K}$. En vertu de la continuité de l'application f_1, il existe, pour chaque voisinage $V = O\tilde{K}$ du polyèdre $\tilde{K}$,

un voisinage $U = O\Phi$ du compact Φ tel que $f_1[U] \subseteq V$, l'application $f_1: [U] \to V$ étant un $(\varepsilon + \eta/2)$-déplacement.

Choisissons maintenant un voisinage V si petit qu'il existe une application de rétraction *) $g: [V] \to \widetilde{K}$ qui est un $\eta/2$-déplacement.

Le fait qu'une rétraction $g: O\widetilde{K} \to \widetilde{K}$ de chaque voisinage suffisamment petit $O\widetilde{K}$ du polyèdre $\widetilde{K}$ existe est bien connu et peut être facilement démontré, par exemple de la manière suivante.

Prenons un cube quelconque $\overline{Q}^m$ qui contient dans son intérieur le polyèdre $\widetilde{K}$. Sans restriction de généralité, on peut supposer que la triangulation K est un sous-complexe d'une triangulation L du cube $\overline{Q}^m$. (Pour obtenir une telle triangulation, on peut construire dans l'espace $R^m \supset \overline{Q}^m$ un nombre suffisant de plans $R_1^{m-1}, \ldots, R_s^{m-1}$ de dimension $m - 1$ de telle sorte que chaque simplexe fermé $\overline{T} \subset \widetilde{K}$ soit l'intersection des demi-espaces fermés déterminés dans R^m par les plans $R_1^{m-1}, \ldots, R_s^{m-1}$. L'ensemble de tous ces plans décompose le cube en polyèdres convexes et chaque subdivision simpliciale du complexe cellulaire constitué par ces polyèdres convexes est une triangulation (du cube $\overline{Q}^m$) qui contient en guise de sous-complexe une certaine subdivision de la triangulation K.)

Ainsi, on se donne une triangulation K du polyèdre $\widetilde{K}$, qui est un sous-complexe fermé de la triangulation L du cube $\overline{Q}^m$ à l'intérieur duquel se trouve le polyèdre $\widetilde{K}$. Désignons par K' le sous-complexe ouvert $L \setminus K$ du complexe L et prenons la subdivision barycentrique L_1 du complexe L qui contiendra comme sous-complexe la subdivision barycentrique K_1 de la triangulation K.

Chaque sommet du complexe L_1 est le barycentre d'un certain simplexe $T \in L$. Si $T \in K$, nous dirons que le sommet e est *rouge*; dans le cas contraire, i. e. lorsque $T \in K'$, le sommet e sera dit *bleu*. Un simplexe quelconque $T \in L_1$ sera dit *rouge*, si tous ses sommets sont rouges, *bleu* si tous ses sommets sont bleus et enfin bariolé s'il possède des sommets bleus et des sommets rouges. Il est clair que les simplexes rouges forment dans le complexe L_1 la subdivision barycentrique K_1 du complexe K. Les simplexes rouges et bariolés forment ensemble un sous-complexe ouvert, l'étoile OK_1 du complexe K_1 dans L_1, dont l'espace sous-jacent $\widetilde{OK_1}$ est un certain voisinage $O\widetilde{K}$ du polyèdre $\widetilde{K}$ dans R^m (fig. 23).

Définissons de la manière suivante la rétraction $g: \widetilde{OK_1} \to \widetilde{K}$ (et donc la rétraction de tout voisinage plus petit). Chaque simplexe bariolé possède une face rouge et une face opposée bleue; il se décompose de manière unique en des « segments ouverts bariolés »: les segments dont les extrémités sont situées sur ces deux faces. L'application g sur chaque segment bariolé donné consiste à projeter tout le segment dans son extrémité rouge, d'où résulte une application continue de tout le simplexe bariolé sur sa face rouge. En laissant invariants tous les points des simplexes rouges, nous obtiendrons l'application cherchée.

Remarquons qu'en effectuant un mouvement rectiligne uniforme des points des segments bariolés vers leurs extrémités rouges, nous obtiendrons une déformation de rétraction du voisinage $\widetilde{OK_1}$ dans le polyèdre $\widetilde{K}$. Il est facile d'obtenir que g soit un $\eta/2$-déplacement, en choisissant une triangulation suffisamment fine L du cube $\overline{Q}^m$.

---

*) I. e. une application continue $g: [V] \to \widetilde{K}$ laissant invariants tous les points $x \in \widetilde{K}$.

L'application $f = gf_1$ envoie un point quelconque $x \in [U]$ dans $y = gf_1x \in \widetilde{K}$ et $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, f_1x) + \rho(f_1x, gf_1x) < \varepsilon_1 + \eta/2 + \eta/2 = \varepsilon$. Le lemme est démontré.

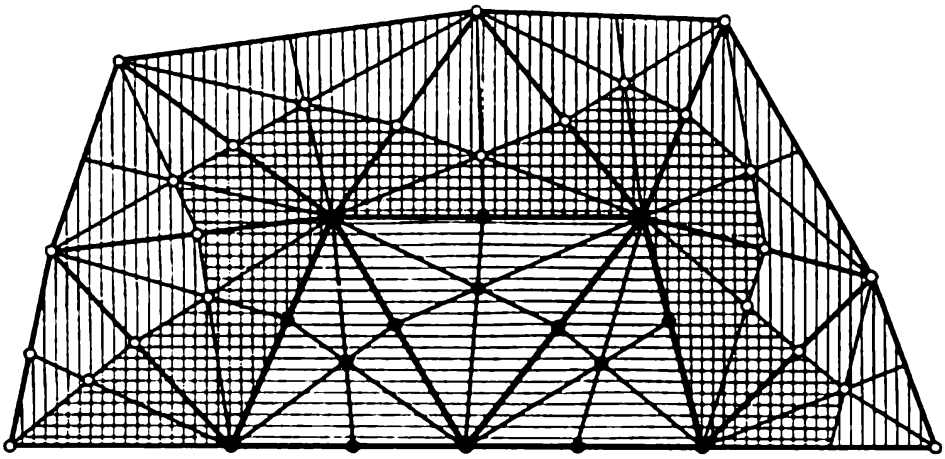

Fig. 23

Lemme 2. (de Froum-Ketkov). *Soit* $\varphi: \Phi \to R^m$ *une application continue quelconque du compact* Φ, $\dim \Phi = n$, *dans l'espace euclidien* R^m *de dimension* $m \geqslant 2n + 1$, *et supposons que l'on se donne dans* R^m *un nombre fini de plans* $R_1, \ldots, R_s$ *de dimension* $\leqslant p$. *Alors pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un homéomorphisme* $\varphi': \Phi \to R^m$, *qui est une approximation de* φ *et qui en diffère par moins de* ε (*de sorte que* $\rho(\varphi x, \varphi' x) < \varepsilon$ *quel que soit* $x \in \Phi$), *et qui vérifie* $\dim(\varphi'\Phi \cap R_i) \leqslant \max\{n + p - m, -1\}$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, s$.

Comme nous l'avons fait dans le livre [AP], p. 247, le lemme 2 peut être reformulé de la manière suivante.

Lemme 2'. *Soit* Φ *un compact*, $\dim \Phi = n$, *et supposons donné dans l'espace euclidien* R^m, $m \geqslant 2n + 1$, *un nombre fini de plans* $R_1, \ldots, R_s$ de dimension $\leqslant p$. *Alors l'ensemble* $A = A(\Phi, R^m, R_1, \ldots, R_s)$ *de tous les homéomorphismes* $f: \Phi \to R^m$ *pour lesquels* $\dim(f\Phi \cap R_i) \leqslant \max\{n + p - m, -1\}$ *pour chaque* $i = 1, 2, \ldots, s$, *est partout dense dans l'espace* $C = C(\Phi, R^m)$.

D é m o n s t r a t i o n. Il est plus commode de démontrer le lemme justement dans l'énoncé 2'. Soit $A_\varepsilon = A_\varepsilon(\Phi, R^m, R_1, \ldots, R_s)$ l'ensemble de toutes ε-applications $f: \Phi \to R^m$, pour lesquelles $\alpha^{n+p-m}(f\Phi \cap R_i) < \varepsilon$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$. On voit facilement que l'ensemble $A' = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$ ne peut contenir que des applications bijectives qui seront donc des homéomorphismes. En outre, quels que soient $f \in A'$ et $i = 1, 2, \ldots, s$, le compact

$f\Phi \cap R_i$ possède pour chaque $\varepsilon > 0$ une ε-application sur un polyèdre de dimension $\leqslant n + p - m$. Par conséquent $A' \subseteq A$ *), et il suffit de démontrer que l'ensemble A' est partout dense dans l'espace C. Puisque l'espace métrique C est complet, nous atteindrons ce but si nous montrons que chaque A_ε est ouvert et partout dense dans C.

Vérifions donc que l'ensemble A_ε est ouvert dans C. Supposons donnée une application quelconque $f \in A_\varepsilon$, i. e. f est une ε-application et le compact $f\Phi \cap R_i$ possède un ε_1-déplacement sur un polyèdre de dimension $\leqslant n + p - m$, et $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Il faut maintenant trouver un $\delta > 0$ tel que chaque application g, δ-proche de f, appartient elle-même à A_ε.

Puisque Φ est un compact, on peut trouver un $\delta_1 > 0$, tel que toute application continue $g\colon \Phi \to R^m$, δ_1-proche de la ε-application f, est elle-même une ε-application **). D'autre part, en vertu du lemme 1, on peut trouver un $\delta_2 > 0$ tel que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$ l'ensemble

$$V_i = O(f\Phi \cap R_i, \delta_2) \tag{1}$$

possède un ε-déplacement sur un polyèdre de dimension $\leqslant n + p - m$. Posons

$$W_i = O(f\Phi \cap R_i, \delta_2/2) \tag{2}$$

et

$$\delta_3 = \min_i \rho(f\Phi \setminus W_i, R_i). \tag{3}$$

Choisissons enfin

$$\delta = \min(\delta_1, {}^1/_2\delta_2, \delta_3).$$

Soit maintenant $g\colon \Phi \to R^m$ une application continue δ-proche de f: $\rho(f, g) < \delta$. Puisque g est une ε-application (d'après le choix du nombre $\delta \leqslant \delta_1$), il suffit de démontrer que chacun des compacts $g\Phi \cap R_i$ possède un ε-déplacement sur un polyèdre de dimension $\leqslant n + p - m$. Pour cela il suffit à son tour de vérifier les inclusions

$$g\Phi \cap R_i \subseteq V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

Supposons que le point $x \in \Phi$ est tel que $gx \in R_i$. Puisque $\rho(fx, gx) < \delta \leqslant \delta_3$, on a a fortiori $\rho(fx, R_i) < \delta_3$ et d'après (3) $fx \in W_i$. Mais puisque $\rho(fx, gx) < \delta \leqslant {}^1/_2\delta_2$, il découle de (1) et (2) que $gx \in V_i$. Les inclusions (4) et avec elles le fait que A_ε est ouvert, sont établis.

---

*) Il est facile de voir en effet que $A' = A$ (voir [AP], chap. 1, p. 255).
**) [AP], p. 259.

Démontrons maintenant que A_ε est partout dense dans C. Supposons donnés arbitrairement $f \in C$ et $\delta > 0$. Il s'agit de trouver un $f_\delta \in A_\varepsilon$ tel que $\rho(f_\delta, f) < \delta$. Puisque $m \geqslant 2n + 1$, il existe un homéomorphisme $g: \Phi \to R^m$ avec $\rho(f, g) < \delta/2$ *). Il existe un $\gamma > 0$ tel que l'inégalité diam $g\Phi' < \gamma$ pour $\Phi' \subseteq \Phi$ implique l'inégalité diam $\Phi' < \varepsilon$. Soit $\gamma_1 = \min(^1/_2\gamma, {}^1/_2\delta)$. Prenons enfin un γ_1-déplacement $h: g\Phi \to \tilde{K}$ du compact $g\Phi$ dans un polyèdre $\tilde{K}$ de dimension n qui se trouve en position générale avec chacun des plans R_i. Posons $f_\delta = hg$. Evidemment $\dim(f_\delta\Phi \cap R_i) = \dim(\tilde{K} \cap R_i) \leqslant n + p - m$. D'autre part, pour chaque point $a \in f_\delta\Phi$, nous avons diam $(h^{-1}a) < 2\gamma_1 < \gamma$. Par définition du nombre γ, nous avons diam $g^{-1}h^{-1}a < \varepsilon$, i.e. f_δ est une ε-application. Evidemment $\rho(f, f_\delta) \leqslant \rho(f, g) + \rho(g, f_\delta) < \delta$. Donc f_δ est l'application cherchée. La densité de A_ε dans C et en même temps le lemme 2 sont démontrés.

2. **Démonstration de l'assertion (1) du théorème 8.** Soit $\Phi \subseteq R^m$, $m = 2n + 1$, et soit z^r un cycle dans Φ, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$, non homologue à zéro dans $\Phi_1 \subseteq \Phi$, mais homologue à zéro dans Φ. Il faut trouver un compact $B \subseteq \Phi$ de dimension $\leqslant n - r - 1$, qui décompose l'homologie $z^r \sim 0$ dans Φ.

D'après la proposition 6 du chapitre 3, p. 185, l'ensemble ouvert $\Gamma = R^m \setminus \Phi$ possède un cycle entier z^{m-r-1} de dimension $m - r - 1$, enlacé avec z^r. Si $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(\tilde{z}^{m-r-1}, \Phi)$, alors, pour chaque ε-déplacement $\varphi: \Phi \to R^m$, le cycle z^{m-r-1} est enlacé avec le cycle φz^r, homologue à zéro dans $\varphi\Phi$, car $z^r \sim 0$ dans Φ. Par conséquent, le support de chaque chaîne de frontière φz^r intersecte $\tilde{z}^{m-r-1}$. Autrement dit, le compact $\tilde{z}^{m-r-1} \cap \varphi\Phi = B_1$ décompose l'homologie $\varphi z^r \sim 0$ dans $\varphi\Phi$. Mais alors le compact $B = \varphi^{-1}B_1$ décompose l'homologie $z^r \sim 0$ dans Φ.

En vertu du lemme 2, on peut choisir le ε-déplacement φ comme un homéomorphisme et de telle manière que la dimension de l'intersection du compact $\varphi\Phi$, avec chaque plan de dimension $m - r - 1$ qui supporte les simplexes du cycle z^{m-r-1}, ne soit pas supérieure à $n + (m - r - 1) - m = n - r - 1$. Ainsi, on a $\dim(\varphi\Phi \cap \tilde{z}^{m-r-1}) \leqslant n - r - 1$ et, puisque le déplacement φ est un homéomorphisme,

$$\dim B = \dim \varphi^{-1}(\varphi\Phi \cap \tilde{z}^{m-r-1}) \leqslant n - r - 1.$$

L'assertion (1) est démontrée.

---

*) Voir [AP], p. 262.

3. Démonstration de l'assertion (2) du théorème 8. Il faut construire sur le compact Φ une telle suite de cycles

$$z^{n-1},\ z^{n-2},\ \ldots,\ z^r,\ \ldots,\ z^0 \tag{5}$$

à supports $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0$ respectivement que $z^r \sim 0$ dans Φ, $z^r \not\sim 0$ dans A_r et pour chaque compact $B \subseteq \Phi \setminus A_r$, on a $\dim B < n - r - 1$, $z^r \sim 0$ dans $\Phi \setminus B$.

I. Quelques notations. Soit $\bar{Q}^n$ une boule de dimension n déterminée dans l'espace R^n par l'inégalité $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$. Soient ensuite R^r, $r = 1, 2, \ldots, n-1$, des plans de dimension r de R^n définis respectivement par les égalités $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. En outre de la boule $\bar{Q}^n$ nous allons également considérer les boules

$$\bar{Q}^r = \bar{Q}^n \cap R^r, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

et les demi-boules

$$\bar{Q}^r_+ = \bar{Q}^r \cap \{x_r \geqslant 0\}, \quad \bar{Q}^r_- = \bar{Q}^r \cap \{x_r \leqslant 0\}.$$

Il est clair que

$$\bar{Q}^r = \bar{Q}^{r+1}_+ \cap \bar{Q}^{r+1}_-, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Nous allons désigner par S^r la sphère de dimension r qui est la frontière de la boule $\bar{Q}^{r+1}$, et par S^r_+ et S^r_- respectivement les hémisphères

$$S^r \cap \bar{Q}^{r+1}_+ \quad \text{et} \quad S^r \cap \bar{Q}^{r+1}_-.$$

Il est clair que

$$S^r = S^{r+1}_+ \cap S^{r+1}_-.$$

II. Puisque $\dim \Phi = n$, il existe une application essentielle $f' : \Phi \to \bar{Q}^n$ ([AP], p. 265). En vertu du théorème 4, il existe alors sur le compact Φ un cycle convergent z^{n-1} de dimension $n-1$ (pour $\mathfrak{R}_1$ et $\varkappa$) à support Φ_1, tel que $z^{n-1} \not\sim 0$ dans Φ_1, $z^{n-1} \sim 0$ dans Φ, et que le cycle $f'z^{n-1}$ est enlacé avec le centre o de la boule $\bar{Q}^n$:

$$\mathfrak{o}\,(f'z^{n-1},\ o) = \gamma \neq 0.$$

On en déduit que le support du cycle $f'z^{n-1}$ ne contient pas le point o:

$$f\Phi_1 \cap o = \Lambda.$$

Prenons la sphère S' de centre o et de rayon inférieur à la moitié du nombre $\rho\,(f'\Phi_1,\ o)$. Définissons l'application $\psi : \bar{Q}^n \to \bar{Q}^n$, qui applique linéairement le long des rayons toute la boule $\bar{Q}'$ limitée par la sphère S' sur la boule $\bar{Q}^n$ et projetons l'ensemble $\bar{Q}^n \setminus \bar{Q}'$ le long des rayons sur la sphère S^{n-1}. Envisageons l'application $f = \psi f' : \Phi \to \bar{Q}^n$. Il est clair que $f\Phi_1 \subseteq S^{n-1}$, puisque $f\Phi_1 \subseteq \bar{Q}^n \setminus \bar{Q}'$.

Autrement dit, le cycle z^{n-1} est situé dans $f^{-1}S^{n-1}$. En outre, le cycle fz^{n-1} est situé dans Φ et on a toujours (chapitre 3, p. 154)

$$\mathfrak{o}(fz^{n-1}, o) = \gamma \neq 0.$$

Donc *)

$$fz^{n-1} = cy^{n-1}, \quad c \neq 0, \tag{6}$$

où y^{n-1} est le cycle d'orientation de la sphère S^{n-1}.

Fixons maintenant l'application obtenue $f: \Phi \to \overline{Q}^n$, le cycle z^{n-1} à support $f^{-1}S^{n-1}$ (non homologue à zéro dans $f^{-1}S^{n-1}$, mais homologue à zéro dans Φ), le cycle d'orientation y^{n-1} de la pseudo-variété S^{n-1} (tel que $fz^{n-1} = cy^{n-1}$).

III. Construisons une suite spéciale

$$y^{n-1}, y^{n-2}, \ldots, y^r, \ldots, y^0 \tag{7}$$

de cycles de la boule $\overline{Q}^n$, *en commençant par le cycle* y^{n-1}. Le premier membre de cette suite (7) est défini. Les autres sont construits par récurrence : le cycle y^{n-2} s'obtient de y^{n-1} par intersection avec le compact $\overline{Q}^{n-1} = \overline{Q}^n_+ \cap \overline{Q}^n_-$, le cycle y^{n-3} s'obtient de y^{n-2} par intersection avec le compact $\overline{Q}^{n-2} = \overline{Q}^{n-1}_+ \cap \overline{Q}^{n-1}_-$, etc.

On vérifie facilement que le cycle y^r est une orientation de la pseudo-variété S^r et par conséquent n'est pas homologue à zéro dans S^r mais s'avère homologue à zéro dans la boule $\overline{Q}^{r+1}$ (comme d'ailleurs chaque cycle de dimension r d'une boule de dimension $r+1$).

IV. Passons à la construction de la suite (5). Servons-nous pour cela seulement de l'application f et du cycle z^{n-1}.

Le premier terme de la suite est le cycle donné z^{n-1}. Le cycle $z^{n-2} = z_f^{n-2}$ s'obtient du cycle z^{n-1} par décomposition par le compact $f^{-1}\overline{Q}^{n-1} = f^{-1}\overline{Q}^n_+ \cap f^{-1}\overline{Q}^n_-$. Le cycle $z^{n-3} = z_f^{n-3}$ s'obtient du cycle z^{n-2} que nous venons de construire par décomposition par le compact $f^{-1}\overline{Q}^{n-2} = f^{-1}\overline{Q}^{n-1}_+ \cap f^{-1}\overline{Q}^{n-1}_-$. En continuant ainsi de proche en proche, nous construirons tous les cycles de la suite (5). En guise de supports A_r des cycles z^r_n, fixons respectivement les compacts $f^{-1}S^r$. La construction est terminée.

On montre très facilement que chaque cycle z^r est homologue à zéro dans $f^{-1}\overline{Q}^{r+1}$. En effet, c'est évident pour le cycle z^{n-1} : on a $f^{-1}\overline{Q}^n = \Phi$. Le cycle z^{n-2} s'obtient à partir du cycle z^{n-1}, qui est homologue à zéro dans $f^{-1}\overline{Q}^n$, par décomposition par le compact $f^{-1}\overline{Q}^{n-1} = f^{-1}\overline{Q}^n_+ \cap f^{-1}\overline{Q}^n_-$. En vertu du lemme 1, p. 227, on a alors $z^{n-2} \sim 0$ dans $f^{-1}\overline{Q}^{n-1}$. Mais alors, en vertu du même lemme, le cycle z^{n-3} obtenu de z^{n-2} par décomposition par le compact $f^{-1}\overline{Q}^{n-2}$ sera homologue à zéro dans $f^{-1}\overline{Q}^{n-2}$, etc.

*) Théorème 4, chapitre 3, p. 168.

Il est important de noter que nous obtiendrons *la même suite* (5) en commençant par une application $\varphi\colon \Phi \to \bar{Q}^n$ *quelconque* pour laquelle $\varphi^{-1}S^{n-1} = f^{-1}S^{n-1}$ et $f = \varphi$ sur $f^{-1}S^{n-1}$. En effet, le cycle z_φ^{n-2}, obtenu à partir de z^{n-1}, φ est construit par décomposition du cycle z^{n-1} par le compact $\varphi^{-1}\bar{Q}^{n-1} = \varphi^{-1}\bar{Q}_+^n \cap \varphi^{-1}\bar{Q}_-^n$. Mais le cycle z^{n-1} est en fait situé sur $\varphi^{-1}S^{n-1}$, de sorte que nous obtiendrons le même résultat par décomposition du cycle z^{n-1} par le compact $\varphi^{-1}S^{n-2} = \varphi^{-1}S_+^{n-1} \cap \varphi^{-1}S_-^{n-1}$. Mais d'après la condition imposée sur φ, nous avons $\varphi^{-1}S^{n-2} = f^{-1}S^{n-2}$, $\varphi^{-1}S_+^{n-1} = f^{-1}S_+^{n-1}$, $\varphi^{-1}S_-^{n-1} = f^{-1}S_-^{n-1}$, de sorte que $z_f^{n-2} = z_\varphi^{n-2}$. On démontre exactement de la même manière les égalités $z_f^{n-3} = z_\varphi^{n-3}$, $z_f^{n-4} = z_\varphi^{n-4}$, etc.

Remarquons aussi que nous avons dans ce cas aussi bien $z^r \sim 0$ dans $f^{-1}\bar{Q}^{r+1}$ que $z^r \sim 0$ dans $\varphi^{-1}\bar{Q}^{r+1}$.

V. Démontrons que $z^r \not\sim 0$ dans $A_r = f^{-1}S^r$. Pour cela il suffit de démontrer l'égalité

$$(6_r) \qquad fz^r = cy^r$$

pour chaque $r = n-1, n-2, \ldots, 0$: si (6_r) était déjà démontré et nous avions $z^r \sim 0$ dans $f^{-1}S^r$, alors nous aurions $cy^r = fz^r \sim 0$ dans S^r, ce qui est impossible d'après le choix de y^r.

Passons à la démonstration des égalités (6_r). Comme partout précédemment, nous ferons la démonstration par récurrence en commençant par les plus grandes dimensions.

L'égalité (6_{n-1}) coïncide avec (6) et ne doit donc pas être démontrée. Déduisons de (6_{n-1}) l'égalité (6_{n-2}).

Le fondement de cette déduction est la remarque générale suivante (dont la vérification est laissée au lecteur). Soient Φ, X deux compacts et $f\colon \Phi \to X$ une application continue. Supposons que le compact Φ possède une ε-chaîne x et que l'on se donne dans le compact X un sous-compact $X_1 \subseteq X$, et $\Phi_1 = f^{-1}X_1$. Soit enfin $J_{\Phi_1}x$ le morceau de la chaîne x sur Φ_1 et $J_{X_1}fx$, le morceau de la chaîne fx sur X_1. Alors

$$fJ_{\Phi_1}x = J_{X_1}fx.$$

Déduisons (6_{n-2}) de (6_{n-1}). Soit

$$z^{n-1} = \{z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \ldots, z_k^{n-1}, \ldots\},$$
$$z^{n-2} = \{z_1^{n-2}, z_2^{n-2}, \ldots, z_k^{n-2}, \ldots\},$$
$$y^{n-1} = \{y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, \ldots, y_k^{n-1}, \ldots\},$$
$$y^{n-2} = \{y_1^{n-2}, y_2^{n-2}, \ldots, y_k^{n-2}, \ldots\}.$$

Nous avons pour chaque k, $fz_k^{n-1} = cy_k^{n-1}$, $z_k^{n-2} = \Delta J_{f^{-1}\bar{Q}_+^n} z_k^{n-1}$, $y_k^{n-2} = \Delta J_{\bar{Q}_+^n} y_k^{n-1}$ et donc également $cy_k^{n-2} = \Delta J_{\bar{Q}_+^n} cy_k^{n-1}$. Par conséquent,

$$fz_k^{n-2} = f\Delta J_{f^{-1}\bar{Q}_+^n} z_k^{n-1} = \Delta J_{\bar{Q}_+^n} fz_k^{n-1} = \Delta J_{\bar{Q}_+^n} cy_k^{n-1} = cy_k^{n-2}$$

pour tout k, i.e.

$$fz^{n-2} = cy^{n-2}.$$

Les étapes suivantes de la récurrence sont laissées au lecteur.

VI. Passons enfin à la vérification de la propriété fondamentale des cycles de la suite (5), celle que l'homologie $z^r \sim 0$ dans Φ ne peut être décomposée par un compact de petite dimension.

Ainsi, fixons le nombre r, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, et le compact $B \subseteq \Phi \setminus f^{-1}S^r$, $\dim B < n-r-1$; démontrons que $z^r \sim 0$ dans $\Phi \setminus B$.

Si nous avons $B \cap f^{-1}\bar{Q}^{r+1} = \Lambda$, alors $z^r \sim 0$ dans $\Phi \setminus B$, puisque $z^r \sim 0$ dans $f^{-1}\bar{Q}^{r+1}$; mais si $B \cap f^{-1}\bar{Q}^{r+1} \neq \Lambda$, alors nous trouverons maintenant une application $\varphi\colon \Phi \to \bar{Q}^n$ telle que $\varphi^{-1}S^{n-1} = f^{-1}S^{n-1}$, $f = \varphi$ sur $f^{-1}S^{n-1}$ et $B \cap \varphi^{-1}\bar{Q}^{r+1} = \Lambda$. Comme nous l'avons déjà dit, on a alors $z^r \sim 0$ dans $\varphi^{-1}\bar{Q}^{r+1}$ et à plus forte raison dans $\Phi \setminus B$. Il ne reste ainsi qu'à construire l'application φ, ce que l'on peut faire en se basant sur le lemme général suivant, qui est dans un certain sens une spécification du premier théorème d'approximation du livre AP.

Lemme (de Froum-Ketkov). *Soit Φ un compact. $\dim \Phi = n$ et $f\colon \Phi \to \bar{Q}^n$ son application continue sur une boule de dimension n. Supposons que le compact $B \subseteq \Phi \setminus f^{-1}S^r$ est de dimension $< n-r-1$. Il existe alors une application $\varphi\colon \Phi \to \bar{Q}^n$ telle que $\varphi^{-1}S^{n-1} = f^{-1}S^{n-1}$, $f = \varphi$ sur $f^{-1}S^{n-1}$ et $B \cap \varphi^{-1}\bar{Q}^{r+1} = \Lambda$.*

VII. Démonstration du lemme. Puisque $fB \cap S^r = \Lambda$ et fB est compact, on a $\rho(fB, S^r) > 0$. Il existe alors un $\beta > 0$ tel que

$$\{[O(\bar{Q}^{r+1}, \beta)] \cap fB\} \cap S^{n-1} = \Lambda.$$

Autrement dit,

$$[O(\bar{Q}^{r+1}, \beta)] \cap fB \subseteq \bar{Q}^n \setminus S^{n-1}. \tag{8}$$

Soit

$$B_2 = B \cap f^{-1}[O(\bar{Q}^{r+1}, \beta)]. \tag{9}$$

Il découle de (8) que

$$fB_2 \subseteq \bar{Q}^n \setminus S^{n-1}.$$

Par conséquent, pour un certain ε-voisinage du compact B_2 on a

$$f[O(B_2, \varepsilon)] \subseteq \bar{Q}^n \setminus S^{n-1}.$$

Ainsi pour chaque $\delta \leqslant \varepsilon$

$$f^{-1}S^{n-1} \subseteq \Phi \setminus O(B_2, \delta). \tag{10}$$

Puisque $\dim B_2 \leqslant \dim B = k < n - r - 1$, il existe, d'après le premier théorème d'approximation ([AP], p. 247), une telle application $g: B_2 \to \Pi$ du compact B_2 dans un polyèdre $\Pi \subseteq \bar{Q}^n \setminus S^{n-1}$ de dimension k que

$$\rho(gx, fx) < \frac{1}{2}\beta \tag{11}$$

quel que soit $x \in B_2$. On a alors, en vertu de l'inégalité $k < n - r - 1$, la possibilité de choisir le polyèdre Π de sorte que

$$\Pi \cap \bar{Q}^{r+1} = \Lambda. \tag{12}$$

Prolongeons l'application $g: B_2 \to \Pi$ à une application continue $g: \Phi \to \bar{Q}^n$ et choisissons $\delta \leqslant \varepsilon$ de manière à vérifier l'inégalité (11) quel que soit $x \in [O(B_2, \delta)]$.

Soit $\lambda(x)$ une telle fonction continue sur Φ que $0 \leqslant \lambda(x) \leqslant 1$, $\lambda(B_2) = 1$ et $\lambda(\Phi \setminus O(B_2, \delta)) = 0$. La compacité de Φ permet alors de choisir $\lambda(x)$, de sorte que $\lambda^{-1}(1) = B_2$. Définissons l'application $\varphi: \Phi \to \bar{Q}^n$ par la formule

$$\varphi x = (1 - \lambda(x)) f(x) + \lambda(x) gx.$$

Montrons que cette application est l'application cherchée. En effet, l'égalité $\varphi x = fx$ sur $f^{-1}S^{n-1}$ se déduit de (10) et il nous reste à montrer que $\bar{Q}^{r+1} \cap \varphi B = \Lambda$. Si $x \in B_2$, alors $\varphi x = gx \in \Pi$, et, en vertu de (12), $\varphi x \notin \bar{Q}^{r+1}$. Soit $x \in B \setminus B_2$. Alors, en vertu de (9), $\rho(fx, \bar{Q}^{r+1}) \geqslant \beta$. Si l'on a en même temps $x \notin O(B_2, \delta)$, alors $\varphi x = fx \notin \bar{Q}^{r+1}$. Mais si $x \in O(B_2, \delta)$, alors (11) est vérifié. Donc, $\rho(\varphi x, \bar{Q}^{r+1}) \geqslant \beta - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\beta$ et l'on a toujours $\varphi x \notin \bar{Q}^{r+1}$.

Il reste à vérifier que $\varphi^{-1}S^{n-1} = f^{-1}S^{n-1}$, i.e. $\varphi x \in S^{n-1}$ implique $\varphi x = fx$. Mais φx est un point du segment $\overline{fx, gx}$ qui appartient à la boule $\bar{Q}^n$. L'inclusion $\varphi x \in S^{n-1}$ peut donc avoir lieu dans les trois cas suivants: $fx = gx = \varphi x$; $\varphi x = gx$; $\varphi x = fx$. Le premier et le dernier cas sont évidents. Dans le deuxième nous avons alors $\lambda(x) = 1$ et donc $x \in B_2$ et $gx \in \bar{Q}^n \setminus S^{n-1}$, i.e. le deuxième cas est impossible. Le lemme et, donc, le théorème sont démontrés.

§ 5. Troisième théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension : théorème des obstructions et théorèmes apparentés

1. Remarques préliminaires. Urysohn et Menger surent déjà démontrer que l'ensemble fermé Φ, situé dans un espace euclidien R^n de dimension n, est de dimension n si, et seulement si, il contient

des points intérieurs relativement à R^n. Ils démontrèrent aussi qu'un ensemble fermé Φ, situé dans le plan R^2, est de dimension 1 lorsqu'il ne contient pas de points intérieurs relativement au plan, mais possède au moins un point qui sépare localement le plan (nous dirons que l'ensemble Φ *sépare localement le plan* au point a, s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit δ, $0 < \delta < \varepsilon$, on peut trouver dans le δ-voisinage $O(a, \delta)$ du point a deux points qui n'appartiennent pas à l'ensemble Φ et possèdent la propriété suivante : chaque compact connexe situé dans $O(a, \varepsilon)$ et joignant ces deux points coupe l'ensemble Φ). Ainsi, la dimension des ensembles fermés du plan peut être entièrement caractérisée par des propriétés (locales) de la situation de cet ensemble dans le plan : l'ensemble non vide Φ est de dimension deux s'il possède des points intérieurs ; il est de dimension un s'il ne contient aucun point intérieur, mais sépare localement le plan dans au moins un de ses points ; enfin, l'ensemble est de dimension nulle si, et seulement si, il ne contient aucun point intérieur, ni aucun point où il sépare localement le plan.

Le but du présent paragraphe est de caractériser d'une manière analogue la dimension des ensembles fermés situés dans un espace euclidien de dimension quelconque n. Naturellement, on s'attend à ce que pour $p < n - 1$ il faudra se servir de la notion d'« enlacement local » (dans le sens de la proposition 5, chapitre 3, p. 184) à la place de la notion de séparation locale pour obtenir une caractérisation des ensembles de dimension p. Nous verrons qu'il est facile de définir un tel concept.

2. Notations. Dans tout ce paragraphe, Φ désignera un compact situé dans R^n et $\Gamma = R^n \setminus \Phi$. Pour chaque entier p, $0 \leqslant p \leqslant n$, nous poserons $q = n - p - 1$, de sorte que toujours $p + q = n - 1$. Pour rendre les formulations plus compactes, nous conviendrons d'appeler les cycles (convergents, relatifs) du compact Φ pour les groupes de coefficients $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, I_m, où $m = 2, 3, \ldots$, respectivement cycles (convergents, relatifs) modulo 0, 1, m.

Par analogie avec la dimension homologique modulo $m \geqslant 2$ (i.e. pour le groupe de coefficients I_m), nous appellerons dimension modulo zéro la dimension pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$, dimension modulo 1 la dimension pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, i.e. la dimension usuelle d'Urysohn. La dimension de Φ modulo $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sera désignée par $d_m\Phi$ (ainsi $\dim \Phi = d_1\Phi = d_0\Phi$). Toujours pour la commodité des énoncés, nous appellerons les cycles entiers de l'ensemble ouvert Γ (voir chapitre 2, § 10), selon les circonstances, soit cycles modulo 0, soit cycles modulo 1, et nous dirons que le cycle entier z^q est homologue à zéro dans Γ modulo 0, s'il est la frontière d'une chaîne de Γ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$; mais si le cycle entier z^q est la frontière dans Γ d'une chaîne entière, alors nous dirons qu'il est homologue à zéro

dans Γ modulo 1 (ainsi, si $z^q \sim 0$ dans Γ modulo 1, alors a fortiori cela est vrai modulo 0) *).

3. Obstructions (de dimension donnée). Désignons par S^{n-1} la sphère de dimension $n-1$ située dans R^n, et par U, son intérieur.

Proposition 1. *Soit z^q un cycle modulo $m \geqslant 0$ situé dans $U \cap \Gamma$ et non homologue à zéro dans $U \cap \Gamma$ modulo m. Alors $d_m\Phi \geqslant p$.*

En effet, il découle de nos hypothèses qu'en vertu de la proposition 5 sur les enlacements (chapitre 3, p. 184) il existe dans $\Phi \cap [U]$ un cycle relatif z^p mod $(\Phi \cap S^{n-1})$ enlacé avec z^q modulo m, d'où découle la proposition 1.

D é f i n i t i o n p r i n c i p a l e. *Soit un point $a \in \Phi$.* Nous dirons que Φ *est une obstruction de dimension p* mod m, $m \geqslant 0$, *en ce point* si l'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que, pour chaque $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe dans $O(a, \delta) \cap \Gamma$ un certain cycle z^q mod m, de dimension q, non homologue à zéro mod m dans $O(a, \varepsilon) \cap \Gamma$ **).

Nous dirons que Φ *est une obstruction de dimension p* mod $m \geqslant 0$ dans R^n, indépendamment de tout point a, si la condition suivante est vérifiée.

Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on peut trouver dans Γ un cycle z^q_δ modulo m, de dimension q et de diamètre ***) $< \delta$, tel que la chaîne x^{q+1} située dans Γ et ayant pour frontière le cycle z^q_δ ou bien n'existe pas du tout, ou est de diamètre $\geqslant \varepsilon$.

Démontrons la

Proposition 2. *Si Φ est une obstruction de dimension p, il existe alors un tel point $a \in \Phi$ auquel Φ est une obstruction de dimension p.*

D é m o n s t r a t i o n. Admettons qu'un tel point n'existe pas. Choisissons $\varepsilon > 0$ arbitrairement et définissons pour chaque point $a \in \Phi$ un tel $\delta_a > 0$ que chaque cycle z^q situé dans $\Gamma \cap O(a, \delta_a)$ est homologue à zéro dans $\Gamma \cap O\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Auprès de chaque point a choisissons le voisinage $O_a = O\left(a, \frac{\delta_a}{2}\right)$ et prenons un nombre fini

---

*) Nous ne risquons pas de malentendus, puisque nous n'envisagerons jamais de cycles pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$ dans les ensembles ouverts, tandis que dans les compacts Φ nous n'envisagerons jamais les cycles entiers.

**) Conformément à nos conventions, cette définition pour $m = 0$ signifie que $O(a, \delta) \cap \Gamma$ possède un cycle entier non homologue à zéro dans $O(a, \varepsilon) \cap \Gamma$ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$; pour $m = 1$ on exige que $O(a, \delta) \cap \Gamma$ contienne un cycle entier non homologue à zéro dans $O(a, \varepsilon) \cap \Gamma$ pour le groupe de coefficients I. Ainsi, si Φ présente au point donné a une obstruction (de dimension donnée) modulo 0, elle le sera à plus forte raison modulo 1.

***) On appelle diamètre d'une chaîne le diamètre de son support.

de tels voisinages, mettons

$$O_{a_1}, \ldots, O_{a_s},$$

de sorte que leur réunion $O\Phi$ contienne Φ. Soit δ un nombre positif, inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$, à tous les $\frac{1}{2}\delta_{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ et à $\rho(\Phi, R^n \setminus O\Phi)$. Nous affirmons que pour chaque cycle z^q de Γ de diamètre inférieur à δ, il existe dans Γ une chaîne x^{q+1} de diamètre $< \varepsilon$ ayant le cycle z^q pour frontière.

En effet, deux cas sont possibles:

1. z^q est en dehors de $O\Phi$. Dans ce cas, construisons une sphère de rayon δ avec comme centre un des sommets du cycle z^q; l'intérieur de cette sphère contient z^q et ne coupe pas Φ, de sorte que z^q est une frontière à l'intérieur de cette sphère, et notre assertion est démontrée.

2. Pour un certain i, le morceau du cycle z^q situé dans O_{a_i} est non nul; mais alors z^q est situé dans $O(a_i, \delta_i)$ et par conséquent $z^q \sim 0$ dans $\Gamma \cap O\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Notions de ε-modification; théorème fondamental. La proposition qu'il s'agit maintenant de démontrer est la suivante:

Proposition 3. *Si $d_m\Phi = p$ (pour $m \geqslant 0$ donné) et $0 \leqslant \dim \Phi < n$, alors Φ est une obstruction de dimension p (modulo m).*

La démonstration de cette assertion se base sur la notion appelée ε-modification du complexe K situé dans R^n.

Nous entendrons par *modification* (modulo $m = 0, 1, 2, \ldots$ donné) *du complexe K*, qui est la triangulation d'un certain polyèdre $\tilde{K} \subset R^n$, l'ensemble Y dont les éléments sont des chaînes y_i^r situées dans R^n, avec les groupes de coefficients pour ces chaînes: le corps des nombres rationnels $\mathfrak{R}$ lorsque $m = 0$; l'anneau des entiers I lorsque $m = 1$ et l'anneau I_m lorsque $m \geqslant 2$. On exige aussi les trois conditions suivantes:

1. Les chaînes y_i^r (pour tout $r \leqslant \dim K$) sont en bijection avec les simplexes orientés t_i^r du complexe K (les chaînes y_i^r et $-y_i^r$ correspondant aux simplexes t_i^r et $-t_i^r$).

2. Si pour un simplexe orienté t_i^r du complexe K on a

$$\Delta t_i^r = \sum_j c_i^j t_j^{r-1},$$

alors *)

$$\Delta y_i^r = \sum_j c_i^j y_j^{r-1}.$$

*) Les conditions 1 et 2 signifient évidemment que les chaînes y_i^r forment un complexe cellulaire (chapitre 1, p. 26), isomorphe au complexe cellulaire qui consiste de tous les simplexes orientés du complexe K.

3. Pour $r = 0$ nous avons $y_i^0 = t_i^0$ (i.e. y_i^0, $-y_i^0$ sont simplement des sommets du complexe K, munis respectivement des coefficients 1 et -1).

La modification donnée Y du complexe K s'appelle *ε-modification* si elle vérifie la condition.

4. La réunion d'un simplexe quelconque $|t_i^r|$ du complexe K et de tous les simplexes de la chaîne y_i^r qui correspond au simplexe t_i^r est un ensemble de diamètre $<\varepsilon$.

R e m a r q u e 1. Il découle de la condition 4 que la notion de ε-modification ne se rapporte qu'à des complexes dont tous les simplexes sont suffisamment petits (de diamètre au moins inférieur à ε).

R e m a r q u e 2. Si K est un complexe de R^n et Y, sa ε-modification, alors à chaque chaîne $x^r = \Sigma c_i t_i^r$ du complexe K correspond une chaîne $\Sigma c_i y_i^r$ que l'on appelle *ε-modification de la chaîne* x^r (correspondant à la ε-modification donnée du complexe K et déterminée par celle-ci).

R e m a r q u e 3. Si K' est un sous-complexe fermé du complexe K, alors, en considérant dans une ε-modification Y donnée du complexe K seulement ceux des éléments y_i^r pour lesquels $|t_i^r| \in K'$, nous obtiendrons une ε-modification Y' du complexe K'. En particulier, l'ensemble Y_i^r de toutes les chaînes y_i^r qui correspondent au simplexe donné $|t_i^r|$ *) et à toutes ses faces est la ε-modification de l'adhérence combinatoire $[t_i^r]$ du simplexe $|t_i^r|$.

Par la suite, nous allons seulement considérer les ε-modifications qui satisfont à une certaine condition supplémentaire. Pour énoncer cette condition, nous appellerons *sommets intérieurs* d'une chaîne y tous ses sommets qui n'appartiennent pas à la chaîne Δy. La condition supplémentaire que nous imposons aux ε-modifications envisagées du complexe K est la suivante:

5. Aucun couple d'éléments y_i et y_j d'une ε-modification Y donnée du complexe K qui correspondent à des simplexes distincts $|t_i| \in K$ et $|t_j| \in K$ ne possède pas de sommets intérieurs communs.

Il est facile de satisfaire à cette condition: il suffit de soumettre les sommets des éléments y_i^r de la modification donnée Y à un petit déplacement. En effet, en écrivant les éléments de Y dans l'ordre de croissance de leurs dimensions, supposons que tous les éléments de dimension donnée r sont

$$y_1^r,\ y_2^r,\ \ldots,\ y_h^r.$$

Si un des sommets intérieurs de la chaîne y_1^r est un sommet d'une des chaînes y_j^k de dimension $k < r$, on peut exiger qu'après un déplacement aussi petit que l'on veut il cesse d'être un sommet de toute

*) Envisagé, bien entendu, avec les deux orientations possibles.

chaîne y_j^k pour $k < r$; faisons de même avec les sommets intérieurs de y_2^r qui sont en même temps des sommets de la chaîne y_1^r ou d'une chaîne y_j^k pour $k < r$, etc.

En supposant que cette condition est satisfaite une fois pour toutes, nous voyons que pour chaque sommet e (d'un élément quelconque) de la modification Y du complexe K, il existe un simplexe unique $|t_i^r| \in K$ tel que e est un sommet intérieur de l'élément $y_i^r \in Y$; ce simplexe $|t_i^r|$ du complexe K s'appelle « support » *) du sommet donné e.

Nous avons le

Lemme 1. *Si e est un sommet non intérieur de l'élément $y_i^r \in Y$, alors son « support » est une face du simplexe $|t_i^r|$.*

Le lemme est évident pour $r = 0$. Supposons qu'il est démontré pour tous les y_j^k de dimension $k < r$ et démontrons-le pour y_i^r. Puisque e est un sommet non intérieur de la chaîne y_i^r, il sera le sommet de la chaîne $\Delta y_i^r = \Sigma c_j y_j^{r-1}$ et donc le sommet d'un certain y_j^{r-1} qui correspond à la face $|t_j^{r-1}|$ du simplexe t_j^r. Si e est un sommet intérieur de l'élément y_j^{r-1}, alors son « support » est la face $|t_j^{r-1}|$ du simplexe $|t_i^r|$; mais si e n'est pas un sommet intérieur de l'élément y_j^{r-1}, alors d'après l'hypothèse de récurrence, son « support » sera une certaine face du simplexe $|t_j^r|$, i.e. à nouveau une face du simplexe $|t_i^r|$.

Il découle immédiatement du lemme: si l'on fait correspondre à chaque sommet du complexe $|Y| = \bigcup |y|$ (on prend la réunion sur tous les éléments $y \in Y$) un certain sommet de son « support », on obtient une application simpliciale f du complexe $|Y|$ dans le complexe K. Nous avons alors le

Lemme 2.

$$fy_i^r = t_i^r \text{ pour tous les } y_i^r \in Y.$$

Ce lemme est évidemment vérifié si le complexe K est de dimension nulle. Supposons qu'il a été démontré pour tous les complexes K de dimension $< k$ et démontrons-le pour un complexe K de dimension k. En ne considérant que les éléments de la modification Y du complexe K qui correspondent à un certain simplexe $|t_i^r|$ et à ses faces, nous obtenons une modification Y_i^r du complexe $[t_i^r]$ et donc (puisque le lemme 2 est supposé démontré pour tous les complexes de dimension $< k$) il suffit de considérer le complexe $[t_i^k]$, où $|t_i^k|$ est un simplexe quelconque de dimension k du complexe K. L'application f du complexe $|y_i^k|$ est une application simpliciale dans $[t_i^k]$, par conséquent $fy_i^k = ct_i^k$, où c est un nombre entier. Mais d'après

*) Entre guillemets, car le sommet e n'est généralement pas situé sur son « support ».

l'hypothèse de récurrence $f\Delta y_i^k = \Delta t_i^k$ *); mais d'autre part, $f\Delta y_i^k = \Delta f y_i^k = c\Delta t_i^k$, d'où l'on a $c = 1$. Le lemme 2 est démontré.

Si la modification donnée Y est une ε-modification du complexe K, alors l'application f est un ε-déplacement du complexe $|Y|$ sur K. Il en découle que chaque cycle du complexe K est homologue dans son ε-voisinage à chacune de ses ε-modifications. Alors l'application f du complexe $|Y|$ dans le complexe K, que nous venons de définir, s'appelle *déplacement canonique de la ε-modification Y du complexe K dans le complexe K.*

5. Démonstration de la proposition 3. Soit $\Phi \subseteq R^n$, $d_m\Phi = p < n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Considérons le cycle véritable de dimension $p-1$, modulo m, situé dans un compact $\Phi' \subseteq \Phi$:

$$z^{p-1} = (z_1^{p-1}, z_2^{p-1}, \ldots, z_k^{p-1}, \ldots) \tag{1}$$

homologue à zéro dans Φ et complètement non homologue à zéro dans Φ'.

Remarque 4. Conformément à nos conventions, dans le cas $m = 0$ tous les cycles z_k^{p-1} sont des cycles pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}$; lorsque $m = 1$, z_k^{p-1} est un cycle modulo un certain m_k qui dépend de k; enfin, si $m \geqslant 2$, alors tous les z_k^{p-1} sont des cycles modulo m.

Construisons une suite de cycles dans $\Gamma' = R^n \setminus \Phi'$:

$$z_1^{q+1}, z_2^{q+1}, \ldots, z_k^{q+1}, \ldots \tag{2}$$

où z_k^{p-1} et z_k^{q+1} sont des cycles pour le même groupe de coefficients, enlacés entre eux. Nous supposerons que les cycles (2) sont situés en dehors d'un voisinage polyédral $O\Phi'$ bien déterminé de l'ensemble Φ', mais à l'intérieur d'un certain cube $Q \supseteq \Phi$ suffisamment grand, et qu'ils appartiennent tous à une même triangulation K du cube Q. Nous supposons aussi qu'aucun sommet de K n'est situé sur Φ (car Φ est partout non dense **) dans R^n) et que tous les cycles (1) sont situés dans un certain voisinage polyédral $O_1\Phi' \subseteq O\Phi'$ de l'ensemble Φ', et $\varepsilon > 0$ a été choisi si petit que $\rho([O_1\Phi'], R^n \setminus O\Phi') > 2\varepsilon$.

Après avoir fixé ε de cette manière, choisissons $\delta_1 > 0$ aussi petit que l'on veut, de toute manière $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

---

*) En effet, soit $\Delta t_i^k = \sum a_i^j t_j^{k-1}$. Alors, d'après la condition 2 du n° 4, on a $\Delta y_i^k = \sum a_i^j y_j^{k-1}$ et donc $f\Delta y_i^k = \sum a_i^j f y_j^{k-1}$, i.e., par hypothèse de récurrence, $f\Delta y_i^k = \sum a_i^j t_j^{k-1} = \Delta t_i^k$.

**) Si Φ possédait un point intérieur, la dimension de Φ pour un groupe de coefficients quelconque serait supérieure ou égale (et donc égale) à n.

En vertu de la proposition 1, un ensemble qui forme une obstruction de dimension h est de dimension $\geqslant h$. Par conséquent, Φ ne peut être une obstruction de dimension h pour aucun $h \geqslant p + 1$. Ceci étant vrai en particulier pour $h = p + 1$, on peut trouver un nombre positif $\delta_2 < \delta_1$ tel que chaque cycle de dimension $q - 1$ et de diamètre $<\delta_2$, situé dans Γ, est la frontière dans Γ d'une chaîne de diamètre $<\frac{1}{2}\delta_1$. Supposons que les nombres $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_{i-1}$, $i \leqslant q$, sont déjà déterminés et choisissons un nombre positif $\delta_i < \delta_{i-1}$ si petit que chaque cycle de Γ de dimension $q + 1 - i$ et de diamètre $<\delta_i$ est la frontière dans Γ d'une chaîne de diamètre $<\frac{1}{2}\delta_{i-1}$. Ainsi, nous avons les nombres

$$\frac{\varepsilon}{2} > \delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_{q+1} = \delta.$$

Considérons maintenant la subdivision K' de la triangulation K si fine que tous les simplexes sont de diamètre $<\delta$; nous exigeons aussi qu'aucun sommet de la triangulation K' ne soit situé sur Φ. Pour chaque simplexe $T \in K'$ nous choisissons une orientation positive, désignée par t.

Considérons tous les simplexes t_h^1 de dimension 1 de la triangulation K'. Le couple de sommets de chacun d'eux est un cycle Δt_h^1 de dimension nulle dans Γ et de diamètre $<\delta_{q+1}$; il est donc la frontière dans Γ d'une chaîne y_h^1 de dimension 1 et de diamètre $<\frac{1}{2}\delta_q$. Les sommets du simplexe t_h^1 sont alors des sommets de y_h^1.

Faisons correspondre à tous les simplexes t_h^i de dimension i, $i \leqslant q - 1$, du complexe K' des chaînes y_h^i situées dans Γ, pour le groupe de coefficients correspondant (à savoir, $\mathfrak{R}$ pour $m = 0$, I pour $m = 1$, I_m pour $m \geqslant 2$), qui satisfont aux conditions suivantes:

(1) le diamètre de chaque chaîne y_h^i est $<\frac{1}{2}\delta_{q+1-i}$;

(2) chaque sommet du simplexe t_h^i est en même temps un des sommets de la chaîne y_h^i.

Considérons tous les simplexes t_h^{i+1} de dimension $i + 1$ du complexe K', et soit

$$\Delta t_h^{i+1} = \sum_j c_h^j t_j^i.$$

Conformément à la condition 2 de la définition d'une ε-modification, des chaînes y_j^i, qui correspondent à deux faces t_j^i du simplexe t_h^{i+1}, possèdent des sommets communs (par exemple, tous les sommets communs à ces deux faces); par conséquent, en vertu de la condi-

tion (1), le diamètre de la chaîne $\sum_j c_h^j y_j^i$ est inférieur à δ_{q+1-i}, de sorte que Γ contient une chaîne y_h^{i+1} de diamètre $<\delta_{q-i}$ qui satisfait à la condition

$$\Delta y_h^{i+1} = \sum_j c_h^j y_j^i.$$

Puisque chaque sommet du simplexe t_h^{i+1} est le sommet d'une de ses faces t_j^i et donc de la chaîne correspondante y_j^i, tous les sommets de t_j^{i+1} sont des sommets de y_j^i, donc pour les sommets de la chaîne y_h^{i+1} les deux conditions (1) et (2) sont vérifiées et le raisonnement par récurrence continue. Il nous amène à une δ_1-modification du complexe K^q consistant de tous les simplexes de dimension $\leqslant q$ du complexe K'.

Supposons maintenant que t_h^{q+1} est un simplexe de dimension $q+1$ du complexe K' (avec l'orientation choisie ci-dessus) et

$$\Delta t_h^{q+1} = \sum_j c^j t_j^q.$$

Le cycle $\sum_j c^j y_j^q$ est de diamètre $<2\delta$; il est la frontière d'une chaîne y_h^{q+1}, également de diamètre $<2\delta$ (mais qui, évidemment, n'est pas nécessairement située dans Γ). En remplaçant tous les t_h^{q+1} par les y_h^{q+1} correspondants, nous obtiendrons en particulier une 2δ-modification $z_k'^{q+1}$ de tout cycle z_k^{q+1} de la suite (2) : précisément, si $z_k^{q+1} = \sum_h a_k^h t_h^{q+1}$, alors $z_k'^{q+1} = \sum_h a_k^h y_h^{q+1}$. D'après ce que nous avons dit à la fin du numéro 4, on a $z_k'^{q+1} \sim z_k^{q+1}$ dans un ε-voisinage du cycle z_k^{q+1}, i.e. de toute façon en dehors de Φ' ; par conséquent, les cycles $z_k'^{q+1}$ sont enlacés respectivement avec z_k^{p-1}.

Choisissons une ε-chaîne x_k^p dans Φ en position générale avec le cycle $z_k'^{q+1}$ qui vérifie

$$\Delta x_k^p = z_k^{p-1}.$$

Alors

$$(x_k^p \times z_k'^{q+1}) = \sum_h a_k^h (x_k^p \times y_h^{q+1}) \neq 0. \tag{3}$$

Puisque le nombre de toutes les chaînes y_h^{q+1} est fini, il existe au moins une chaîne y_h^{q+1} — mettons y_1^{q+1} — telle que pour un ensemble infini de k on a

$$a_k^1 (y_1^{q+1} \times x_k^p) \neq 0. \tag{3'}$$

En passant, s'il le faut, à une sous-suite, on peut supposer que la relation (3') est satisfaite pour tous les k.

Posons $z_1^q = \Delta y_1^{q+1}$. Le diamètre du cycle z_1^q est inférieur à $2\delta_1$ et ce cycle est situé dans Γ. Nous affirmons — et cette affirmation démontrera la proposition 3 — que Γ ne possède pas de chaîne *) x_1^{q+1} ayant pour frontière z_1^q et étant de diamètre $<\varepsilon$.

Supposons qu'une telle chaîne x_1^{q+1} existe, et construisons les cycles

$$u_k^{q+1} = (z_k'^{q+1} - a_k^1 y_1^{q+1}) + a_k^1 x_1^{q+1}.$$

Puisque $u_k^{q+1} \sim z_k'^{q+1}$ dans $O(\tilde{z}_k'^{q+1}, \varepsilon)$, et a fortiori dans $R^n \setminus O_1\Phi$, nous avons pour chaque k

$$\mathfrak{o}(u_k^{q+1}, z_k^{p-1}) = \mathfrak{o}(z_k'^{q+1}, z_k^{p-1}) \neq 0, \tag{4}$$

et donc aussi

$$(u_k^{q+1} \times x_k^p) = (z_k'^{q+1} \times x_k^p). \tag{5}$$

Mais, d'autre part,

$$(z_k'^{q+1} \times x_k^p) = a_k^1 (y_1^{q+1} \times x_k^p) + ((z_k'^{q+1} - a_k^1 y_1^{q+1}) \times x_k^p),$$

$$(u_k^{q+1} \times x_k^p) = a_k^1 (x_1^{q+1} \times x_k^p) + ((z_k'^{q+1} - a_k^1 y_1^{q+1}) \times x_k^p),$$

ce qui contredit l'égalité (5), puisque $a_1^k (y_1^{q+1} \times x_k^p) \neq 0$ et $a_1^k (x_1^{q+1} \times x_k^p) = 0$.

La proposition 3 est ainsi démontrée.

Les propositions 1 et 3 impliquent directement le troisième théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension.

Théorème 9 (théorème des obstructions). *Le compact $\Phi \subseteq R^n$ est de dimension p modulo m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, si, et seulement si, il est une obstruction de dimension p modulo m dans un de ces points et ne forme en aucun point d'obstruction de plus grande dimension modulo le même m.*

Ce théorème implique le

Corollaire 1. *Pour $\Phi \subseteq R^n$ on a $d_m\Phi = n - 1$ si et seulement si Φ n'est nulle part dense dans R^n et sépare un certain ouvert connexe $G \subseteq R^n$.*

On peut déduire ensuite:

Pour $\Phi \subseteq R^n$, l'égalité $d_m R = n - 1$, vérifiée pour un quelconque $m = 0, 1, 2, \ldots$, implique cette même égalité pour tout m. En particulier, $\dim \Phi = n - 1$ implique $d_m\Phi = n - 1$ pour tout m.

Et enfin, on a le

Corollaire 2. *Si $\Phi \subset R^3$, alors pour tous les m on a*

$$d_m\Phi = \dim \Phi.$$

*) Pour les groupes de coefficients correspondants, qui sont le corps $\mathfrak{R}$ (si $m = 0$), l'anneau I (si $m = 1$, i.e. pour la dimension de Urysohn) et l'anneau I_m (pour $m \geqslant 2$).

6. Quelques conséquences du troisième théorème fondamental. Il découle de la démonstration donnée de la proposition 2 que chaque complexe de dimension $\leqslant q$ à subdivision suffisamment fine peut être (pour un ε quelconque) débarrassé des points d'un compact $\Phi \subset R^n$ de dimension p par une ε-modification (de ce complexe). D'autre part, le complexe qui consiste de tous les éléments de dimension $\leqslant q+1$ du complexe K' (n° 5) ne peut être débarrassé des points de l'ensemble Φ par aucune ε-modification pour la valeur de ε définie au n° 5. En effet, chaque ε-modification applique les cycles z_k^{q+1} dans des cycles $z_k'^{q+1} = \sum_h a_k^h y_h^{q+1}$, également enlacés avec z^{p+1}; à l'aide des raisonnements du n° 5, on peut donc déduire l'existence d'une chaîne y_1^{q+1} qui intersecte un nombre infini de complexes x_k^r et, par conséquent, possède un point commun avec Φ, ce qu'il fallait démontrer.

Autrement dit, nous avons le

Théorème 10. *On a $d_m\Phi = p$ (pour le compact $\Phi \subset R^n$ et un nombre donné $m = 0, 1, 2, \ldots$) si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont simultanément satisfaites:*

1) *pour tout $\varepsilon > 0$ chaque complexe de dimension $\leqslant q$ de R^n (dans une subdivision suffisamment fine) peut être débarrassé des points de l'ensemble Φ par une ε-modification;*

2) *il existe un tel complexe K de dimension $q+1$ et un tel $\varepsilon > 0$ que (quelle que soit la subdivision du complexe K) aucune ε-modification du complexe K (subdivisé) ne peut le débarrasser des points de l'ensemble Φ.*

Par ε-modification du compact Φ, nous entendons un ε-déplacement de l'ensemble Φ dans un polyèdre P suivi d'une ε-modification du complexe obtenu par une subdivision suffisamment fine de ce polyèdre. Le théorème 8 implique la

Proposition 4. *Si les compacts Φ_1 et Φ_2 sont situés dans R^n et $\dim \Phi_1 + \dim \Phi_2 < n$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ ces compacts peuvent être transformés en des compacts disjoints par une ε-modification de l'un d'eux.*

Dans l'énoncé de ce théorème, on ne peut pas remplacer ε-modification par ε-déplacement (ε-déformation) comme le montre l'exemple de l'ensemble de L. Antoine dans R^3 (voir, par exemple, P. Alexandrov, [9]).

On démontre facilement la proposition suivante qui donne une caractérisation de la dimension de Urysohn.

Théorème 11. *Si le compact $\Phi \subset R^n$ est de dimension p (dans le sens de Urysohn), on peut débarrasser, pour tout $\varepsilon > 0$, chaque polyèdre de dimension $\leqslant q$ des points de l'ensemble Φ par un ε-déplacement de*

cet ensemble, mais il existe en même temps un tel polyèdre Π *de dimension* $q+1$ *et un tel* $\varepsilon > 0$ *que* Π *possède des points communs avec tout compact* Φ_ε, *obtenu de* Φ *par un* ε*-déplacement.*

Démonstration. La première assertion du théorème est évidente : si $\dim \Phi = p$ et Π est un polyèdre de dimension $\leqslant q$, il suffit, pour chaque ε donné, d'appliquer à l'aide d'un ε-déplacement l'ensemble Φ dans le polyèdre Φ_ε de dimension p qui est en position générale relativement au polyèdre Π : alors $\Phi_\varepsilon \cap \Pi$ est vide.

Passons à la démonstration de la deuxième assertion qui ne présente également pas de difficultés. Puisque $\dim \Phi = p$, il existe un $\varepsilon' > 0$ tel que chaque ε'-recouvrement fermé du compact Φ par les ensembles fermés est de multiplicité $\geqslant p+1$. Choisissons un tel ε' et décomposons en cubes congruents de diamètre $< \frac{1}{3}\varepsilon'$ l'espace R^n qui contient par hypothèse Φ, de sorte que les points qui appartiennent à k cubes ou plus sont situés sur les faces de dimension $n-k+1$ de ces cubes ; une décomposition qui vérifie cette condition sera appelée *décomposition de Lebesgue* ; pour $n = 2$ elle peut être facilement construite par le lecteur ; ensuite, le cas général de n quelconque s'obtient par une généralisation immédiate de la construction plane. Soient

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$$

tous les cubes fermés de notre décomposition de Lebesgue qui possèdent des points communs avec Φ. Désignons par Π le polyèdre constitué par toutes les faces de dimension $\leqslant q+1$ des cubes $Q_1, \ldots, Q_s$. Désignons enfin par ε un nombre positif inférieur à $\varepsilon'/3$ et à $\rho(\Phi, R^n \setminus \bigcup_{i=1}^{s} Q_i)$. Obtenons une contradiction à partir de l'hypothèse que l'ensemble Φ peut être transformé par un ε-déplacement f en un ensemble Φ_ε qui n'intersecte pas Π. Remarquons pour cela que l'ensemble $Q_i \cap \Phi_\varepsilon$ forme un $\varepsilon'/3$-recouvrement de l'ensemble Φ_ε qui sera, d'après notre construction, de multiplicité $\leqslant p$. On voit donc que les ensembles $f^{-1}(Q_i \cap \Phi_\varepsilon)$ forment un $\left(\frac{\varepsilon'}{3} + 2\varepsilon\right)$-recouvrement de multiplicité $\leqslant p$ du compact Φ ; puisque $\frac{\varepsilon'}{3} + 2\varepsilon < \varepsilon'$, la contradiction voulue est obtenue, et le théorème, démontré.

En comparant les théorèmes 10 et 11, nous obtenons la proposition suivante, dans laquelle la notion de dimension ne s'applique qu'aux polyèdres et a donc une signification géométrique élémentaire.

Théorème 12 (théorème de réciprocité). *Si* $\Phi \subset R^n$ *et si tout polyèdre de dimension k donnée peut être débarrassé, pour chaque* $\varepsilon > 0$, *des points de l'ensemble* Φ *par un* ε*-déplacement de l'ensemble* Φ,

alors l'ensemble Φ *peut être, pour tout* $\varepsilon > 0$, *débarrassé des points de tout polyèdre de dimension* k, *donné d'avance, par une* ε*-modification d'une certaine triangulation de ce polyèdre, et inversement. Ici* k *est un entier non négatif qui vérifie* $k \leqslant n - 1$.

Comme on voit d'après l'exemple de L. Antoine, on ne peut remplacer dans cette formulation les ε-modifications par des ε-déformations.

7. Obstructions homotopiques et nouvelle caractérisation de la dimension dans le sens de Urysohn. Nous donnerons une autre caractérisation, particulièrement claire, des compacts de dimension r dans le sens usuel de Urysohn.

Cette caractérisation est basée sur la définition suivante.

Supposons donnés: le compact $\Phi \subseteq R^n$, la boule ouverte $U \subseteq R^n$ de dimension n, à frontière S^{n-1}, de centre o, et enfin le compact $\Pi \subseteq U \cap \Gamma$ où, comme toujours, $\Gamma = R^n \setminus \Phi$. Par *déformation qui sépare les compacts* Φ *et* Π *dans* U, nous entendons une déformation continue f_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, de l'ensemble $\Phi \cup \Pi$ qui satisfait pour $\theta = 1$ à la condition $f_1\Pi = o$ et pour tout θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, aux conditions

$$f_\theta x = x \quad \text{pour} \quad x \in \Phi \setminus U; \tag{1}$$

$$f_\theta \Pi \subseteq U; \tag{2}$$

$$f_\theta \Phi \cap f_\theta \Pi = \Lambda. \tag{3}$$

Nous dirons que $\Phi \subseteq R^n$ et $\Pi \subseteq U$ *peuvent* (resp. ne peuvent pas) *être séparés dans* U s'il existe (resp. n'existe pas) la déformation qui sépare Φ et Π dans U.

Sous ces hypothèses nous avons le

Théorème 13 (théorème des obstructions homotopiques; première formulation). *Si* $\Phi \subseteq R^n$ *et* $\dim \Phi = p$, *alors il existe dans* R^n *une telle boule* U *et un tel polyèdre* $\Pi \subset U$ *de dimension* q *que* Φ *et* Π *ne peuvent être délacés dans* U, *tandis que si le polyèdre* Π *est de dimension* $\leqslant q-1$, *alors quel que soit* U *le compact* Φ *et le polyèdre* Π *peuvent être délacés dans* U.

Essentiellement le même théorème peut être énoncé d'une autre manière. Nous dirons que le compact $\Phi \subset R^n$ est une *obstruction homotopique de dimension* p *auprès du point* $a \in \Phi$ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout choix de $\delta > 0$, on peut trouver dans $O(a, \delta) \cap \Gamma$ un polyèdre Π_δ de dimension q tel que Φ et Π_δ ne peuvent être séparés dans $O(a, \varepsilon)$.

Théorème 13′ (théorème des obstructions homotopiques; deuxième formulation). *Le compact* Φ *est de dimension* p (*dans le sens de Urysohn*) *si, et seulement si,* Φ *est une obstruction homotopique de dimension* p *auprès d'au moins un de ses points mais n'est nulle part une obstruction homotopique de plus haute dimension.*

D é m o n s t r a t i o n. Démontrons d'abord que si $\dim \Phi = p$, alors le compact Φ est une obstruction homotopique de dimension p dans au moins un de ses points.

D'après le théorème précédent, il existe un point $a \in \Phi$ auprès duquel Φ est une obstruction de dimension p (modulo 1). Choisissons arbitrairement un δ et un cycle z^q de $O(a, \delta) \cap \Gamma$, qui n'est pas une frontière dans $O(a, \varepsilon) \cap \Gamma$; soit S^{n-1} la frontière de la boule $U = O(a, \varepsilon)$. Alors, en vertu du cinquième lemme d'enlacement, le cycle z^q est enlacé avec un certain cycle relatif z^p, mod S^{n-1}, situé dans $[U] \cap \Phi$. Si $z^p = (z_1^p, z_2^p, \ldots, z_k^p, \ldots)$, alors pendant que l'on délace Φ et le support $\widetilde{z}^q$ du cycle z^q dans U, les cycles Δz_k^p dans S^{n-1} restent invariants, et donc leurs supports n'intersectent pas $\widetilde{z}^q$ pendant toute la déformation. On en déduit que la relation d'enlacement entre z^q et z^p ne varie pas pendant la déformation, de sorte que $\widetilde{z}^q$ et Φ ne peuvent être délacés dans U. Par conséquent, Φ est une obstruction homotopique de dimension p auprès du point a.

Démontrons maintenant que si $\Phi \subset R^n$, $\dim \Phi = p$ et $\Pi^r \subset \subset U \cap \Gamma$ est un polyèdre de dimension $r < q$, alors Φ et Π^r peuvent être délacés dans U.

Soit o le centre et ρ le rayon de la boule U. Le polyèdre Π^r est situé dans U et, par conséquent (étant un ensemble fermé), il est contenu dans une certaine boule $O(o, d)$, $d < \rho$. Choisissons un nombre d' de sorte que $d < d' < \rho$, et prenons un δ positif, inférieur à $d' - d$ et à $\rho(\Phi, \Pi^r)$.

Considérons enfin une certaine δ-déformation g_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1/2$, qui applique $[O(o, d')] \cap \Phi$ dans un polyèdre P^p de dimension p. Pendant toute cette déformation, l'ensemble déformé $[O(o, d')] \cap \Phi$ reste disjoint avec Π^r, et les points de la frontière S' de la boule $O(o, d')$ ne pénètrent pas à l'intérieur de la boule $O(o, d)$. Nous étendons la déformation g_θ de l'ensemble $[O(o, d')] \cap \Phi$ à l'ensemble $[O(o, \rho)] \cap \Phi$ et choisissons $d'' > d'$ si proche de d' que la déformation prolongée g_θ reste une δ-déformation dans $[O(o, d'')] \cap \Phi$; par conséquent, aucun point de Φ, appartenant à l'ensemble $[O(o, d'')] \setminus \setminus O(o, d')$, ne peut pénétrer dans $O(o, d)$. Définissons maintenant la déformation f_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1/2$, de l'ensemble Φ de la manière suivante. Lorsque $x \in \Phi \setminus O(o, d'')$ (et donc à plus forte raison lorsque $x \in \Phi \setminus U$), nous poserons $f_\theta x = x$ pour tous les θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1/2$. Mais lorsque $x \in (O(o, d'') \setminus O(o, d')) \cap \Phi$, nous poserons $x_\theta = g_\theta x$ et choisirons en guise de $f_\theta x$ le point y_θ du segment $\overline{x x_\theta}$ déterminé par le rapport

$$\rho(y_\theta, x) : \rho(x_\theta, x) = (d'' - \rho(x, o)) : (d'' - d').$$

Enfin, lorsque $x \in O(o, d') \cap \Phi$, posons $f_\theta x = g_\theta x$. Pendant la déformation f_θ aucun point de $\Phi \setminus O(o, d')$ ne pénètre dans $O(o, d)$, de sorte que $O(o, d) \cap f_{1/2}\Phi$ est un sous-ensemble du polyèdre P^p.

Prenons maintenant pour chaque point $x \in \Phi$ et chaque $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$

$$f_\theta x = f_{1/2} x$$

et passons à la définition de la déformation f_θ sur le polyèdre Π^r.

Posons d'abord pour tous les $x \in \Pi^r$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 1/2$

$$f_\theta x = x.$$

Pour définir la déformation f_θ quand $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$, faisons glisser tous les points du polyèdre Π^r en un mouvement uniforme rectiligne dans un certain point $o' \in O(o, d) \cap \Gamma$ dans l'intervalle de temps $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$, le point o' ayant été choisi de manière à ce que le polyèdre Π^{r+1} que nous venons d'obtenir du polyèdre Π^r (la trace du polyèdre Π^r pendant la déformation f_θ, $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$) se trouve en position générale avec P^p, i.e., dans notre cas, n'ait pas de points communs avec P^p. La déformation f_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, de l'ensemble $\Phi \cup \Pi^r$ ainsi définie est évidemment une déformation qui délace Φ et Π^r dans U, ce qu'il fallait obtenir. Toutes les assertions du théorème sont ainsi démontrées.

Remarque 5. Comme nous montre l'exemple de l'ensemble d'Antoine, il existe déjà dans R^3 des ensembles fermés de dimension nulle et des polygones fermés simples Π^1 tels qu'il est impossible, en laissant invariants les points de l'ensemble Φ, d'effectuer une déformation continue qui, en dehors de Φ, fasse un polygone Π^1 se contracter dans un point unique. La condition de déformation simultanée des ensembles Φ et Π est ainsi essentielle.

Il faut croire que le théorème des obstructions homotopiques, ainsi que la caractérisation de la dimension par les ω-applications, respectivement les ε-déplacements, et à l'aide des applications essentielles, attribue à la dimension de Urysohn une place privilégiée parmi les autres dimensions homologiques, tandis que dans le cadre de la théorie homologique proprement dite, une telle préférence pour la dimension de Urysohn est à peine possible (il est particulièrement difficile de la préférer, pour des raisons purement homologiques, à la dimension modulo 0).

§ 6. Quatrième théorème fondamental : solides de dimension p dans les compacts de même dimension ; nouvelle spécification de la notion de variété cantorienne (les continuums Γ^n)

1. Solides de dimension p dans les compacts de même dimension. Revenons aux notations du paragraphe précédent, n° 2. Rappelons-nous qu'en particulier la dimension $d_m X$ d'un compact X modulo m, $m = 2, 3, \ldots$, est la dimension pour le groupe I_m, tandis que

la dimension modulo 0 est la dimension pour le groupe $\mathfrak{R}$ de tous les nombres rationnels, et enfin la dimension modulo 1 est la dimension usuelle dim. Une remarque analogue s'applique à la notion de solide de dimension p, définie à la fin du § 3 (voir remarque 3).

Dans notre exposé, le quatrième théorème fondamental sera le

Théorème 14. *Pour chaque $m = 0, 1, 2, \ldots$ tout compact de dimension p (modulo m) contient un solide de dimension p (modulo le même m).*

Avant de passer à la démonstration de ce théorème (qui est la même pour tous les $m = 0, 1, 2, \ldots$ sous les conditions indiquées au n° 2 du § 5), remarquons que la définition même du solide de dimension p implique que chaque sous-ensemble fermé d'un solide Φ de dimension p qui n'est nulle part dense dans Φ, doit nécessairement être de dimension p (modulo le nombre m envisagé). Pour cette raison, et parce qu'aucun compact n'est la somme dénombrable de ses ensembles nulle part denses, l'assertion suivante est un corollaire du théorème 14:

Théorème d'addition. *Si le compact Φ est la somme d'une famille dénombrable de ses sous-ensembles fermés Φ_k, alors (pour tout $m = 0, 1, 2, \ldots$) le nombre $d_k\Phi$ est le maximum des nombres $d_m\Phi_k$.*

Démonstration du théorème 14. Supposons que le compact X, situé dans un espace euclidien donné R^n, est de dimension p modulo $m = 0, 1, 2, \ldots$. En vertu du théorème des obstructions, il existe alors dans R^n une telle boule U^n de dimension n et de frontière S^{n-1} que $U^n \setminus X$ contient un cycle z^q (modulo m) non homologue à zéro dans $U^n \setminus X$, ce qui signifie, en vertu de la proposition 1, p. 224, qu'il existe une variété cantorienne $\Phi \subseteq X$ enlacée irréductiblement avec z^q dans U^n. L'intersection $\Phi \cap U^n$ n'est pas vide (en effet, $z^q \sim 0$ dans U^n; pour $\Phi \cap U^n = \Lambda$ nous aurions $U^n = U^n \setminus \Phi$, i.e. $z^q \sim 0$ dans $U^n \setminus \Phi$). Choisissons un point $a \in \Phi \cap U^n$. Choisissons un voisinage Oa du point a relativement à Φ, de frontière $B = [Oa] \setminus Oa \subset \Phi$, $\dim B \leqslant p - 1$, et si petite que $[Oa] \subset U^n \cap \Phi$. Posons

$$\Phi' = [Oa] = Oa \cup B, \quad \Phi'' = (\Phi \setminus \Phi') \cup B.$$

Alors

$$\Phi' \cup \Phi'' = \Phi, \quad \Phi' \cap \Phi'' = B \tag{1}$$

et nous sommes dans les hypothèses du théorème d'addition, duquel on déduit que le compact $B = \Phi' \cap \Phi''$ de dimension $p - 1$ contient un cycle de dimension $p - 1$ (exponentiel, respectivement convergent pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$), non homologue à zéro sur son support B, mais homologue à zéro dans X (même dans

$[Oa] = \Phi'$ et dans Φ''). Le théorème 14 est démontré. On en déduit immédiatement une proposition qui sera nécessaire au paragraphe suivant.

Corollaire 1 (du théorème 14). *Chaque compact X de dimension finie*, $\dim X = p$, *contient un ensemble de dimension p consistant de points principaux.*

On déduit tout aussi facilement du théorème 14 le

Théorème 15. *Soit X un compact de dimension finie*, $\dim X = p$. *Alors il existe dans X un cycle z^{p-1} convergent essentiel de dimension $p-1$ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$ qui est une frontière, et aussi un cycle exponentiel essentiel z^{p-1} de dimension $p-1$ et à support B qui est une frontière.*

Remarque 1. Pour les dimensions $d_{\mathfrak{A}}X$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, I_m, $m \geqslant 2$, nous avons une proposition analogue au théorème 15, mais dans laquelle on n'affirme pas que les compacts B qui supportent les cycles z^{p-1}, vérifient les inégalités $d_{\mathfrak{A}}B \leqslant p-1$.

On déduit aussi du théorème 15 le

Corollaire. *Si X est un compact*, $\dim X = p$, *alors il existe un ensemble fermé $\Phi \subset X$ de dimension $p-1$ tel que:*

il est impossible de trouver une application continue du compact X sur un compact Y de dimension $\dim Y < p$ *qui soit injective sur Φ.*

En effet, d'après le théorème 1 nous pouvons choisir un ensemble fermé Φ, $\dim \Phi = p-1$, de telle manière qu'il contienne un cycle z^{p-1} homologue à zéro dans X, mais non dans Φ. Si l'application continue $f\colon X \to Y$ est bijective (donc un homéomorphisme) sur Φ, alors fz^{p-1} est un cycle de $f\Phi$ non homologue à zéro sur $f\Phi \subseteq Y$, mais homologue à zéro sur Y; par conséquent, $\dim Y \geqslant p$ et notre corollaire est démontré.

Démontrons maintenant l'inégalité promise depuis longtemps (voir p. 219)

$$d_{\mathfrak{A}}^{(c)}X \geqslant D_{\mathfrak{A}}^{(c)}X = D_{\mathfrak{A}}X \tag{2}$$

pour un compact quelconque $X \subset R^n$ et les groupes de coefficients

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{R},\ \mathfrak{A} = I_m,\ m \geqslant 2.$$

En effet, soit $D_{\mathfrak{A}}^{(c)}X = p$; alors il existe dans X un cycle relatif convergent x^p mod Ψ de dimension p, non homologue à zéro, où Ψ est fermé dans X; démontrons alors que Ψ contient un cycle z^{p-1} de dimension $p-1$ homologue à zéro dans X, mais non dans Ψ. Ceci démontrera $d_{\mathfrak{A}}^{(c)}X \geqslant p$ et donc l'inégalité (2).

Ainsi, soit

$$x^p = (x_1^p,\ x_2^p,\ \ldots,\ x_k^p,\ \ldots)$$

un cycle de X mod Ψ, non homologue à zéro dans X mod Ψ. En posant $z_k^{p-1} = \Delta x_k^p$, nous avons dans Ψ un cycle

$$z^{p-1} = (z_1^{p-1}, z_2^{p-1}, \ldots, z_k^{p-1}, \ldots)$$

homologue à zéro dans X par sa définition même. Si notre cycle z^{p-1} n'est pas homologue à zéro dans Ψ, alors notre assertion est démontrée. Soit $z^{p-1} \sim 0$ dans Ψ, précisément $z_k^{p-1} = \Delta y_k^p$, où y_k^p est une δ_k-chaîne de Ψ et $\delta_k \to 0$. Alors

$$z^p = (x_1^p - y_1^p, x_2^p - y_2^p, \ldots, x_k^p - y_k^p, \ldots)$$

est un cycle véritable de X. Démontrons que z^p n'est pas homologue à zéro dans X: dans le cas contraire il existerait des ε_k-chaînes x_k^{p+1} dans X, $\varepsilon_k \to 0$, de frontières $x_k^p - y_k^p$, d'où l'on déduirait (puisque les chaînes y_k^p sont situées sur Ψ) que

$$x^p \sim 0 \text{ sur } X, \text{ mod } \Psi,$$

contrairement à l'hypothèse.

Puisque le cycle véritable z^p n'est pas homologue à zéro dans X, il existe, en vertu du théorème de convergence, un cycle convergent z'^p de X pour le groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ qui est également non homologue à zéro dans X.

Alors, en vertu du premier lemme d'enlacement (chapitre 3, p. 177), il existe dans $R^n \setminus X$ un cycle z^q enlacé avec z'^p. Pour le cycle z^q, il existe un ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ enlacé avec lui. Prenons un point $a \in \Phi$ et un voisinage Oa de ce point (relativement à Φ) suffisamment petit pour que les deux ensembles fermés $\Phi' = [Oa]$ et $\Phi'' = \Phi \setminus Oa$ soient non vides.

Il existe alors dans $\Phi' \cap \Phi''$ un cycle z^{p-1} non homologue à zéro dans $\Phi' \cap \Phi''$, mais homologue à zéro dans Φ' et dans Φ'' et, par conséquent, dans X. L'inégalité (2) est démontrée.

2. Spécification du concept de variété cantorienne (continuums V^p). Les variétés cantoriennes furent introduites par P. Urysohn dans la classe des continuums *) de dimension donnée, comme des continuums « particulièrement bien connexes ». Cette connexité forte s'exprime justement par la propriété des variétés cantoriennes qui sert à les définir: une variété cantorienne de dimension p n'est séparée par aucun sous-ensemble de dimension $\leqslant p - 2$. Les exemples simples nous montrent néanmoins que la « connexité forte » d'une variété cantorienne ne nous assure pas de toutes les propriétés que nous attendons d'elle. La figure 24 représente un continuum plan qui consiste de deux carrés Π_0 et Π_∞, des rectangles Π_1, Π_2, ...

*) Un espace topologique est un continuum s'il est compact et connexe.— *Note du traducteur.*

..., Π_s, ... et de leurs « linteaux » P_1, P_2, ..., P_s, ... qui réunissent de proche en proche Π_{k-1} et Π_k, $k = 1, 2, \ldots$, et ont des diamètres $\delta_k \to 0$, de sorte que l'ensemble $C = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant \infty} \Pi_k \cup \bigcup_{0 \leqslant k < \infty} P_k$ est non seulement connexe, mais s'avère être, comme on vérifie facilement, une variété cantorienne de dimension deux. Néanmoins, justement parce que les diamètres des rectangles P_k qui joignent successivement Π_{k-1} avec Π_k tendent vers zéro, la connexité du continuum C ne nous semble pas suffisamment « bonne » : on peut

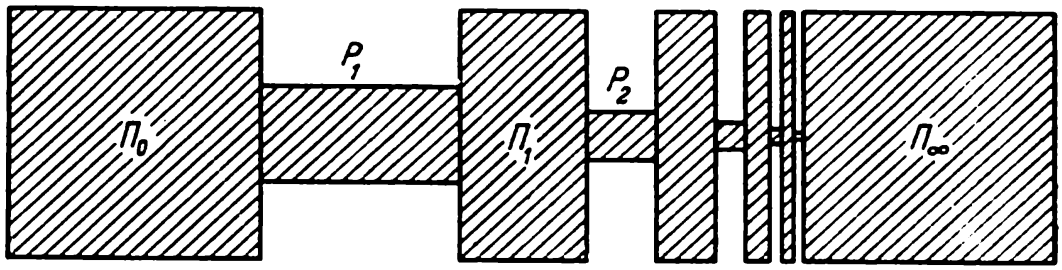

Fig. 24

aller d'un point du carré Π_0 à un point du carré Π_∞ en vélo, mais pas en automobile ! Mais ce défaut n'est qu'apparent ; tous les doutes quant à la connexité de notre continuum C seront dissipés grâce à la définition d'une « variété cantorienne spéciale V^p » qui sera donnée ci-dessous.

Nous avons déjà rencontré, dans le § 4 de ce chapitre, la notion de diamètre $\alpha^p\Phi$ de dimension p du compact Φ situé dans un espace euclidien (ou hilbertien) ; rappelons que c'est la borne inférieure de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels il existe un ε-déplacement du compact Φ dans un polyèdre de dimension p. Pour un compact quelconque Φ on peut définir de manière analogue le nombre $\alpha'^p\Phi$ comme la borne inférieure de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels il existe une ε-application du compact Φ sur un polyèdre de dimension p. Il est évident que l'on obtiendra les mêmes nombres si l'on remplace dans les définitions citées le mot « polyèdre » par « compact ». Il est aussi évident que pour $\dim \Phi = r$ tous les $\alpha'^p\Phi$ sont nuls lorsque $p \geqslant r$ et $\alpha'^p\Phi > 0$ pour $p < r$.

D'autre part, le diamètre de Urysohn $u^p\Phi$ dans le sens du compact Φ, qui est par définition la borne inférieure de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels Φ possède un ε-recouvrement (fermé ou ouvert, ce qui revient au même) de multiplicité $\leqslant p + 1$, présente un certain intérêt.

Les nombres $\alpha^p\Phi$, $\alpha'^p\Phi$ et $u^p\Phi$ pour un compact donné Φ sont en général distincts, mais nous nous intéresserons pas tellement à leurs valeurs exactes, mais à la question de savoir s'il existe, dans une classe donnée, de tels compacts qu'un de ces trois nombres prend

des valeurs aussi petites que l'on veut. On remarque immédiatement que si cela est vérifié pour un des trois nombres, ce sera vérifié pour les autres; en particulier, si un des nombres est nul, les autres le sont aussi.

Il est commode en outre de convenir, pour tout compact non vide, que

$$\alpha^{-1}\Phi = \alpha'^{-1}\Phi = u^{-1}\Phi = 1$$

et pour un Φ vide

$$\alpha^{-1}\Phi = \alpha'^{-1}\Phi = u^{-1}\Phi = 0.$$

Les variétés cantoriennes usuelles (« continuums de Urysohn ») seront appelées continuums U, en particulier les variétés cantoriennes de dimension p, continuums U^p. Avant de passer à la définition d'une variété cantorienne spéciale, « la variété V », nous voulons changer la forme de la définition du continuum U. A savoir, on a la

Remarque. Le continuum C de dimension p est un continuum U^p si, et seulement si, il satisfait à la condition suivante:

Condition (U^p). *Soient C_1 et C_2 deux sous-continuums disjoints du continuum C, chacun d'entre eux contenant des points intérieurs relativement à C. Alors chaque cloison B entre C_1 et C_2 doit être de dimension* $\dim B \geqslant p - 1$ *ou, ce qui revient au même, on doit avoir* $\alpha'^{p-2}B > 0$.

La démonstration de cette remarque ne présente pas de difficultés.

Enonçons maintenant la condition principale qui définit les continuums V^p.

Condition (V^p). *Soient C_1 et C_2 deux ensembles fermés disjoints du compact C, possédant chacun des points intérieurs relativement à C. Il doit alors exister un nombre d tel que, pour chaque cloison B entre C_1 et C_2, on a*

$$\alpha'^{p-2}B > d. \tag{1}$$

Il est évident que si le compact Φ est situé dans un certain R^n, on peut, sans altérer la signification des conditions (U^p), (V^p), remplacer dans l'inégalité (1) le nombre $\alpha'^{p-2}B$ par le nombre $\alpha^{p-2}B$ ou (dans tous les cas) par le nombre $u^{p-2}B$.

Le compact Φ de dimension p s'appelle *continuum* V^p s'il satisfait à la condition (V^p). Le compact C s'appelle *continuum* V si pour $p = \dim C$ il est un continuum V^p.

Il est évident que chaque continuum V^p est en même temps un continuum U^p; néanmoins, le continuum U^p représenté sur la figure 24 n'est pas un continuum V^p.

Les continuums V^p forment une classe topologiquement invariante, puisque la condition (V^p) peut être mise sous la forme suivante, topologiquement invariante:

Condition $\mathfrak{o}^p$. *Soient C_1 et C_2 deux ensembles fermés disjoints du compact C qui contiennent tous deux des points intérieurs relativement à C. Il doit alors exister un tel recouvrement ouvert fini ω du compact C qu'aucune cloison B entre C_1 et C_2 n'admet de ω-application continue dans un compact de dimension $\leqslant p-2$.*

La démonstration de l'équivalence des conditions V^p et $\mathfrak{o}^p$ peut être effectuée à l'aide de simples raisonnements, usuels en des cas analogues (voir, par exemple, le livre AP, chapitre 2, p. 165) et peut donc être laissée au lecteur.

Parmi les théorèmes concernant les continuums V^p formulons d'abord le suivant:

Théorème 16. *Chaque compact $C \subseteq R^n$, de dimension p, irréductiblement enlacé dans une boule ouverte $U^n \subseteq R^n$ avec un cycle z^q, $q = n-p-1$, est un continuum V^p.*

Avant de démontrer ce théorème, déduisons-en quelques conséquences. Comme nous savons déjà (§ 4), chaque compact de dimension p, situé dans un R^n donné, contient un compact (de même dimension p), irréductiblement enlacé avec un certain cycle, étant donc, en vertu du théorème 16, un continuum V^p. Ainsi, l'assertion suivante, qui semble fondamentale, découle immédiatement du théorème 16.

Théorème 17. *Chaque compact de dimension p contient un continuum V^p.*

Remarquons aussi que pour $p = n-1$, i.e. $q = 0$, le théorème 17 se transforme dans la proposition suivante:

Théorème 17_0. *Chaque compact qui est la frontière commune de deux régions (ou plus) de l'espace R^n est un continuum V^{n-1}.*

Pour la démonstration du théorème 16 nous nous servirons du

Lemme d'Alexander. *Supposons que le compact $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$ est situé à l'intérieur du cube $\overline{Q}^n \subseteq R^n$, tandis que le cycle z^q est situé dans $\Gamma = Q^n \setminus \Phi$ et s'avère homologue à zéro aussi bien dans $\Gamma' = Q^n \setminus \Phi'$ que dans $\Gamma'' = Q^n \setminus \Phi''$, les chaînes x_1^{q+1} et x_2^{q+1} qui ont pour frontières le cycle z^q respectivement dans Γ' et Γ'' pouvant être choisies de sorte que le cycle $z^{q+1} = x_2^{q+1} - x_1^{q+1}$ soit homologue à zéro dans $\Gamma_0 = Q^n \setminus (\Phi' \cap \Phi'')$. Alors le cycle z^q est homologue à zéro dans Γ.*

Démonstration (du lemme d'Alexander). Soit $z^{q+1} = \Delta x^{q+2}$, où la chaîne x^{q+2} est située dans $\Gamma_0 = Q^n \setminus (\Phi' \cap \Phi'')$, de sorte que les compacts $\Phi' \cap \widetilde{x}^{q+2}$ et $\Phi'' \cap \widetilde{x}^{q+2}$ sont à une distance positive σ l'un de l'autre. En supposant que les simplexes de toutes les chaînes x^{q+2}, x_1^{q+1}, x_2^{q+1} sont non dégénérés et en passant, s'il le faut, à leurs subdivisions, on peut admettre que toutes les chaînes

nommées appartiennent à une triangulation K du cube $\bar{Q}^n$ et que les simplexes de cette triangulation ont des diamètres plus petits que le nombre $\min\left\{\frac{\sigma}{2}, \rho(\tilde{x}_1, \Phi'), \rho(\tilde{x}_2, \Phi'')\right\}$. En remplaçant les compacts Φ, Φ', Φ'' par les adhérences de leurs étoiles relativement à la triangulation K, on peut même supposer que Φ, Φ', Φ'' sont les espaces sous-jacents aux sous-complexes L, L', L'' de la triangulation K. Choisissons le morceau $\Phi' x^{q+2}$ de la chaîne *) x^{q+2} situé sur Φ' et envisageons la chaîne $y^{q+1} = x_2^{q+1} - \Delta\Phi' x^{q+2}$; sa frontière est évidemment $\Delta y^{q+1} = \Delta x_2^{q+1} = z^q$, de sorte que pour établir l'homologie $z^q \sim 0$ dans Γ il suffit de montrer que la chaîne y^{q+1} se trouve dans Γ, i.e. en dehors de Φ' et Φ''. Mais puisque x_2^{q+1}, de même que $\Phi' x^{q+2}$ et donc $\Delta\Phi' x^{q+2}$, ainsi que toute la chaîne y^{q+1} sont situés, évidemment, en dehors de Φ'', il suffit de montrer que y^{q+1} est situé en dehors de Φ', i.e. $\Phi' y^{q+1} = 0$, ou bien $\Phi' x_2^{q+1} = \Phi'\Delta\Phi' x^{q+2}$. Mais

$$\Phi' x_2^{q+1} = \Phi'(x_2^{q+1} - x_1^{q+1}) = \Phi'\Delta x^{q+2} =$$
$$= \Phi'\Delta(\Phi' x^{q+2} + \Phi'' x^{q+2} + \Gamma x^{q+2}) =$$
$$= \Phi'\Delta\Phi' x^{q+2} + (\Phi' \cap \Phi'')\Delta x^{q+2} + (\Phi' \cap \Gamma)\Delta x^{q+2},$$

le deuxième et le troisième terme du dernier membre de cette suite d'égalités étant évidemment nuls, de sorte que $\Phi' x_2^{q+1} = \Phi'\Delta\Phi' x^{q+2}$, ce qui termine la démonstration du lemme d'Alexander.

Démonstration du théorème 16. Supposons que $C \subseteq R^n$ est un compact de dimension p, irréductiblement enlacé avec le cycle z^q, $q = n - p - 1$, dans une certaine boule ouverte U^n. Supposons donnés dans C les ensembles disjoints fermés C_1, C_2 avec des points intérieurs $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$ relativement à C. Trouvons une contradiction à hypothèse de l'existence de cloisons $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ entre C_1 et C_2, pour lesquelles $\alpha^{p-2} B_k < \varepsilon_k$, $\varepsilon_k \to 0$. Puisque chaque cloison contient une cloison fine (i.e. nulle part dense dans C), on peut admettre sans restriction de généralité que la cloison B_k jouit de cette propriété.

Supposons, conformément à la définition d'une cloison, que $C = A_k \cup B_k \cup D_k$, $C_1 \subseteq A_k$, $C_2 \subseteq D_k$, où A_k, B_k, D_k sont dis-

*) Puisqu'il s'agit de chaînes dans R^n, il est naturel d'entendre par chaîne $\Phi' x$ celle que l'on obtient de $x = \sum a_i t_i$ en y conservant seulement les termes $a_i t_i$ pour lesquels les adhérences des simplexes t_i possèdent au moins un point commun avec Φ'; si les ensembles Φ', Φ'' sont des polyèdres sous-jacents aux complexes L', L'' de la triangulation K, alors $\Phi' x$ contiendra tous les termes pour lesquels le simplexe t_i possède une face propre ou impropre dans L'. Ceci étant vu, nous entendons par morceau Γx de la chaîne $x = \sum a_i t_i$ la chaîne formée de ceux des $a_i t_i$ pour lesquels les adhérences des simplexes t_i sont situées dans Γ, de sorte que $\rho(\widetilde{\Gamma x}, \Phi) > 0$.

joints, A_k et D_k sont ouverts et $[A_k] \cap [D_k] \subseteq B_k$. Puisque B_k n'est nulle part dense dans C, on a $[A_k] \cup [D_k] = C$. Choisissons les voisinages O_1, O_2 (relativement à C) des points c_1, c_2, de sorte que les distances $\rho(O_i, C \setminus C_i)$, $i = 1, 2$, soient supérieures à un certain nombre positif σ_0. Puisque le cycle z^q est irréductiblement enlacé avec C, il existe des chaînes x_1^{q+1} et x_2^{q+1}, ayant ce cycle pour frontière et situées respectivement dans $U^n \setminus (C \setminus O_1)$ et $U^n \setminus (C \setminus O_2)$. Nous avons les inclusions

$$\tilde{x}_1^{q+1} \cap C \subseteq O_1, \quad \tilde{x}_2^{q+1} \cap C \subseteq O_2,$$

de sorte que les nombres $\sigma_1 = \rho(O_1, C \setminus C_1)$, $\sigma_2 = \rho(O_2, C \setminus C_2)$ et $\sigma_3 = \rho(\tilde{x}_1^{q+1} \cup \tilde{x}_2^{q+1}, C \setminus (O_1 \cup O_2))$ sont positifs. Supposons que le nombre positif σ est inférieur au plus petit des nombres σ_0, σ_1 σ_2, σ_3. Pour chaque k nous avons $B_k \subseteq C \setminus (C_1 \cup C_2) \subseteq C \setminus (O_1 \cup O_2)$, de sorte que $\rho(B_k, \tilde{x}_1^{q+1} \cup \tilde{x}_2^{q+1}) > \sigma$. Le cycle $z^{q+1} = x_1^{q+1} - x_2^{q+1}$ possède donc un support qui satisfait à l'inégalité $\rho(\tilde{z}^{q+1}, B_k) > \sigma$ pour tous les $k = 1, 2, \ldots$. La chaîne x_1^{q+1} est en dehors de D_k et la chaîne x_2^{q+1}, en dehors de A_k.

Ainsi,

$$[A_k] \cup [D_k] = C,$$
$$[A_k] \cap [D_k] \subseteq B_k.$$

Le cycle z^q n'est pas homologue à zéro dans $U^n \setminus C$. Nous sommes dans les hypothèses du lemme d'Alexander, et par conséquent, le cycle z^{q+1} n'est pas homologue à zéro dans $U^n \setminus [A_k] \cap [D_k]$, et à plus forte raison dans $U^n \setminus B_k$.

Supposons maintenant que k est si grand que $\varepsilon_k < \sigma$. Désignons par P_k^{p-2} le polyèdre de dimension $\leqslant p - 2$ dans lequel (conformément au choix de B_k) on peut appliquer le compact B_k par un ε_k-déplacement. Puisque $\varepsilon_k < \sigma$, le cycle z^{q+1} reste non homologue à zéro dans $U^n \setminus P_k^{p-2}$, ce qui est impossible, car tous les cycles non homologues à zéro dans $U^n \setminus P_k^{n-2}$ ont une dimension certainement non inférieure à $n - (p - 2) - 1 = q + 2$; la contradiction cherchée est obtenue, et le théorème 16, démontré.

Remarque 2. Il est naturel de poser la question suivante: qu'arrivera-t-il si nous omettons dans la condition (V^p) l'existence de points intérieurs relativement à C dans les compacts C_1 et C_2? Cette question nous amène à considérer une nouvelle classe de continuums (V'^p), évidemment contenue dans la classe (V^p): un compact C de dimension homogène p s'appelle continuum V'^p, s'il existe un $\sigma > 0$ tel que pour chaque cloison B entre deux compacts disjoints C_1 et C_2 de dimension p dans C on a l'inégalité

$$\alpha'^{p-2} B \geqslant \sigma.$$

Nous montrerons maintenant que la classe des continuums (V'^p) est effectivement plus restreinte que la classe (V^p). En outre, nous construirons le continuum C, qui est la frontière commune de deux régions de l'espace tridimensionnel (c'est donc, d'après les faits démontrés, un continuum V^p) mais qui n'est pas un continuum V'^p. Cette classe de continuums (V'^p) se trouve donc suffisamment compromise : il est naturel d'exiger que chaque spécification de la classe des variétés cantoriennes contienne les frontières communes de deux

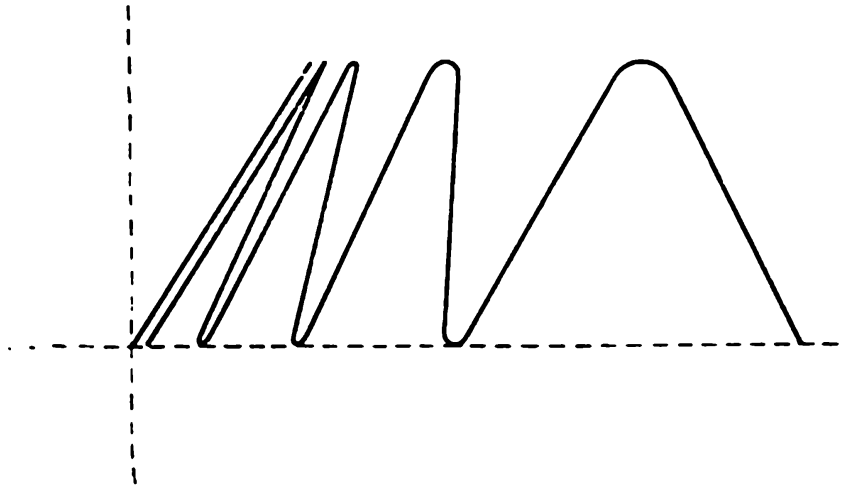

Fig. 25

régions (ou plus) de l'espace R^n (pour $n = 2$ ce sont les « courbes fermées » dans R^2 et, pour $n = 3$, les « surfaces fermées » dans R^3).

Ainsi, nous construisons une surface fermée C dans R^3 qui n'est pas un continuum V'^2, mais qui est, bien sûr, un continuum V^2. Un élément de cette construction simple est la courbe bien connue L, définie (dans le plan R^2 muni d'un système de coordonnées cartésiennes) comme le graphe de la fonction $y = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x < \frac{1}{\pi}$, auquel on a ajouté le segment limite $\Delta = [-1 \leqslant y \leqslant 1]$ sur l'axe des ordonnées. La figure 25 représente l'image topologique L' de la courbe L, qui diffère de la courbe L proprement dite surtout par le fait que le segment limite Δ' de la courbe L' est incliné relativement aux deux axes de coordonnées, et toute la courbe est disposée dans le demi-plan supérieur.

Effectuons maintenant une rotation de la courbe L' autour de l'axe des ordonnées et complétons la surface obtenue (comme indiqué sur la figure 26) par un hémisphère H^2, de manière à obtenir une surface fermée, qui sera le continuum C cherché. La partie bornée C_1 de la surface conique, obtenue par rotation du segment limite Δ' de la courbe L', est un sous-ensemble du continuum C, nulle part dense sur lui.

En guise de continuum C_2 prenons, par exemple, un voisinage suffisamment petit du point inférieur s de l'hémisphère H^2 (la « calotte » de l'hémisphère H^2 autour de son pôle sud s).

On voit facilement qu'il existe entre C_1 et C_2 des cloisons de diamètre aussi petit que l'on veut, et donc le continuum C n'est pas un continuum V'^p.

Des considérations ultérieures concernant les continuums V^p et V'^p se trouvent dans mon article [8]. On y rencontrera en particulier

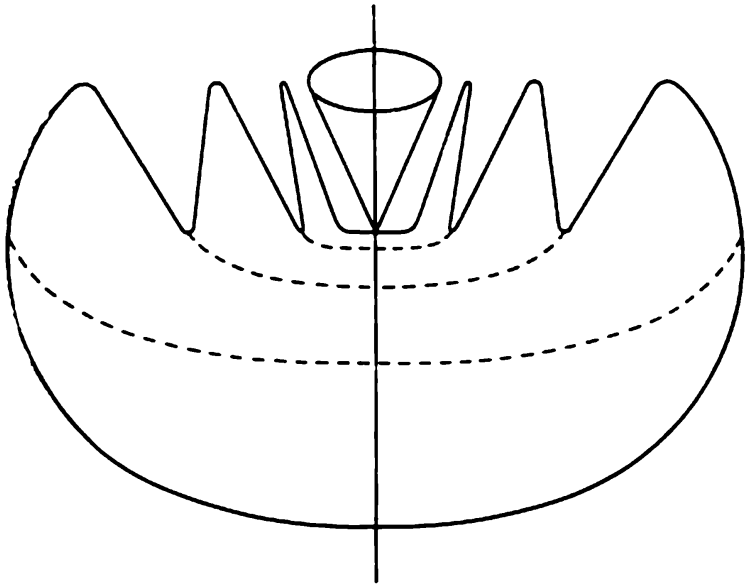

Fig. 26

la question suivante : est-ce que chaque compact de dimension p contient un continuum V'^p? D'ailleurs, d'après ce que nous venons de dire, cette question nous semble peu intéressante ; à moins que la solution soit négative, ce qui serait une autre confirmation du caractère définitif de la spécification des variétés cantoriennes donnée par les continuums V^p.

§ 7. Surfaces de Pontriaguine

Dans ce paragraphe nous allons construire pour chaque entier $m \geqslant 2$ les continuums $\Pi^{(m)}$ de dimension deux — les fameuses « surfaces de Pontriaguine » qui possèdent la propriété suivante : $\dim(\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}) = 3$, si m et m' sont premiers entre eux, et $\dim(\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}) = 4$, dans le cas contraire.

1. Ruban de Mœbius modulo m. Désignons par A l'anneau circulaire plan usuel (on peut supposer, ce qui n'a d'ailleurs pas d'importance, que cet anneau est limité par les cercles s et s' de rayons 1,

respectivement 2, de centre commun à l'origine des coordonnées). Les deux cercles s et s' sont supposés appartenir à l'anneau A, de sorte que A est un compact.

Si l'on colle l'un à l'autre chaque couple de points diamétralement opposés d'un des deux cercles, par exemple du cercle s', alors l'anneau A devient un ruban de Mœbius que nous appellerons *ruban de Mœbius* modulo 2 et désignerons par $\tilde{\mu}_2$.

Autrement dit, prenons une décomposition ∂_2 de l'anneau A qui consiste des points $x \in A \setminus s'$ et des couples de points diamétralement opposés du cercle s' ; alors μ_2 est l'espace quotient de cette décomposition ∂_2.

Appelons maintenant, pour $m > 2$, « m-tuple » de points régulier (sur s') tout ensemble qui consiste de m points du cercle s' qui sont les sommets d'un polygone régulier de m côtés. Considérons la décomposition ∂_m de l'anneau A qui consiste des points séparés de A non situés sur le cercle s' et des m-tuples réguliers du cercle s'.

L'espace quotient de cette décomposition s'appelle *ruban de Mœbius modulo m*; on le note $\tilde{\mu}_m$. Le cercle $s \subseteq \tilde{\mu}_m$, qui reste invariant, s'appelle bord du ruban de Mœbius $\tilde{\mu}_m$ (modulo m).

R e m a r q u e 1. On peut dire brièvement que le continuum $\tilde{\mu}_m$ s'obtient de l'anneau A en collant entre eux tous les points de chaque m-tuple régulier du cercle s'. Ce collage peut être envisagé comme une opération combinatoire en imaginant un polyèdre $\tilde{A}$, homéomorphe à l'anneau A et triangulé de manière à ce qu'un des polygones frontières, à savoir s', soit un polygone régulier de m côtés. On peut alors établir une isométrie naturelle entre les côtés (orientés de même manière) du polygone s', et nous identifions entre eux n'importe quels m points de ses côtés qui se correspondent par l'isométrie indiquée, i.e. nous collons entre eux tous les côtés du polygone s'. Il résulte de ce collage que la triangulation donnée de l'anneau A se transforme en une triangulation τ_m du polyèdre $\tilde{\mu}_m$, tandis que le polygone fermé simple s' se transforme en un polygone fermé (simple) λ_m, à chaque côté duquel s'attachent m triangles de la triangulation τ_m. Le polygone λ_m sera appelé *bord multiple* du complexe τ_m (et de son ensemble sous-jacent $\tilde{\mu}_m$).

2. Collage des trous. On peut obtenir le plan projectif à partir de la sphère S^2 en y découpant un trou et en le collant à l'aide d'un ruban de Mœbius. En découpant dans la sphère plusieurs trous et en les recollant par des rubans de Mœbius, nous obtiendrons une surface fermée non orientable quelconque (voir par exemple à ce sujet CT, chap. 3, § 7).

Toute la construction de la surface de Pontriaguine $\Pi^{(m)}$ consistera d'un nombre infini de collages de trous par des rubans de

Mœbius modulo m (et en passant ensuite à la limite); pour cette raison, bien que l'opération de collage des trous paraisse intuitivement claire, nous en donnerons maintenant une définition rigoureuse.

Tous les polyèdres envisagés seront des polyèdres P de dimension deux, connexes, situés dans l'espace euclidien R^5 de dimension 5, munis d'une triangulation bien déterminée $P = \widetilde{K}$ *).

Faire un trou dans le polyèdre P signifie en ôter l'intérieur γ d'un certain polygone convexe $\overline{\gamma}$ situé à l'intérieur d'un triangle $T \in K$, i.e. passer du polyèdre P au polyèdre $P \setminus \gamma$. Posons $\widetilde{\sigma} = \overline{\gamma} \setminus \gamma$, en désignant par σ le complexe de dimension 1 dont l'ensemble sous-jacent est $\widetilde{\sigma}$.

Nous allons coller ces trous par des polyèdres connexes $\widetilde{\mu}$, de dimension deux, en entendant par « bord » du polyèdre $\widetilde{\mu}$ (et de sa triangulation τ) une certaine ligne brisée fermée s, qui consiste de segments de la triangulation τ **). On supposera alors que les lignes brisées fermées σ et s ont le même nombre de côtés, i.e. sont des complexes isomorphes de dimension 1.

Le *collage du trou γ dans le polyèdre $P = \widetilde{K}$* est l'opération suivante: nous construisons dans R^5 la triangulation du polyèdre μ, isomorphe à la triangulation τ, de sorte que l'isomorphisme $\tau \to \mu$ applique la ligne s sur la ligne σ (le « bord du trou γ ») et satisfait à la condition

$$(P \setminus \gamma) \cap \widetilde{\mu} = \widetilde{\sigma}. \tag{1}$$

Le polyèdre $\widetilde{\mu}$ s'appelle polyèdre de collage, ou simplement collage (du trou γ).

Coller un trou γ du polyèdre P signifie passer de P au polyèdre

$$P_{+1} = (P \setminus \gamma) \cup \widetilde{\mu} \tag{2}$$

et effectuer ensuite une triangulation K_{+1} de ce polyèdre. Il est important de se souvenir que

$$\widetilde{\sigma} \subset P_{+1}. \tag{2'}$$

Un collage s'appelle ε-collage, si diam $\widetilde{\mu} < \varepsilon$ ***).

---

*) Toutes les constructions peuvent être effectuées dans R^4, ce qui n'a d'ailleurs pas d'importance.

**) En fait le polyèdre $\widetilde{\mu}$ sera toujours par la suite le ruban de Mœbius $\widetilde{\mu}_m$ (modulo m) à bord $s = s_2$.

***) Dans ce cas on a aussi diam $(\gamma \cup \widetilde{\mu}) < \varepsilon$; en effet, le polygone $\widetilde{\gamma}$ est contenu dans l'enveloppe convexe de sa frontière $\sigma \subset \widetilde{\mu}$, et donc dans l'enveloppe convexe du polyèdre $\widetilde{\mu}$, et cette dernière est de même diamètre que $\widetilde{\mu}$.

Il est toujours possible d'effectuer un ε-collage du trou γ dans un polyèdre si le diamètre du trou lui-même γ, i.e. de sa frontière $\tilde{\sigma}$, est suffisamment petit. En effet, soit diam $\tilde{\sigma} < \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe alors une boule $U\left(o, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, où $o \in \gamma$, qui contient $\tilde{\gamma}$. Soient $a_1, \ldots, a_\nu$ tous les sommets de la triangulation τ; supposons que les sommets $a_1, \ldots, a_p$ appartiennent à la ligne s; appliquons-les sur les sommets $b_1, \ldots, b_p$ d'une ligne brisée (convexe) σ. Appliquons les autres sommets

$$a_{p+1}, \ldots, a_\nu$$

sur les sommets $b_{p+1}, \ldots, b_\nu$ situés en position générale à l'intérieur de la boule $U\left(o, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, mais en dehors des plans de tous les triangles $T_i \in K$.

L'application $a_k \to b_k$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, est un isomorphisme du complexe τ sur le complexe μ situé dans $U\left(o, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ (de sorte que diam $\tilde{\mu} < \varepsilon$).

Du fait que les points $b_{p+1}, \ldots, b_\nu$ sont en position générale dans R^5 et sont en dehors des plans des triangles $T_i \in K$, on déduit qu'aucun élément (ouvert) du complexe μ (autre que les éléments du complexe σ de dimension 1) n'intersecte aucun élément du complexe K, ce qui implique à son tour la formule (1).

Définition 1. Dans la triangulation K_{+1} (du polyèdre $P_{+1} = (P \setminus \gamma) \cup \tilde{\mu}$) les simplexes du complexe μ peuvent être choisis et seront choisis d'une manière invariante, tandis que les simplexes du complexe K_{+1} situés sur T forment une subdivision de l'anneau $\bar{T} \setminus \gamma$; tous ces simplexes (i.e. les simplexes du complexe μ et les simplexes du complexe K_{+1} situés sur $\bar{T} \setminus \gamma$) s'appellent simplexes (du complexe K_{+1}) subordonnés au simplexe $T \in K$.

Remarque 2. Le collage de plusieurs trous $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (choisis respectivement à l'intérieur des triangles $T_1, \ldots, T_n$) par les polyèdres $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_n$ se réduit au collage successif de chacun de ces trous et ne nécessite donc pas de définition spéciale. Dans ce cas, les distances entre les polyèdres $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_n$ sont toujours positives.

Définition 2. Nous dirons que le polyèdre triangulé $\tilde{K}_{h+1}$ s'obtient du polyèdre triangulé $\tilde{K}_h$ par un ε-collage si l'on a choisi dans chaque triangle $T_{h,i} \in K_h$ un trou $\gamma_{h,i}$ et si on l'a collé par un polyèdre $\tilde{\mu}_{h,i}$, chaque collage étant un ε_h-collage. Il faut se rappeler que les bords $\tilde{\sigma}_{h,i}$ de tous les trous collés sont contenus dans le polyèdre $\tilde{K}_{h+1}$.

La définition 2 implique que la distance de Hausdorff *) adh $(\widetilde{K}_h, \widetilde{K}_{h+1})$ entre les polyèdres $\widetilde{K}_h$, $\widetilde{K}_{h+1}$ est inférieure à ε_h.

Remarque 3. Le lecteur aura saisi l'analogie entre cette construction et celle des « ε-modifications » des complexes exposée au § 5.

Le processus de construction des compacts de R^5 par collage consiste à construire, dans un domaine borné, par exemple dans la boule unité $\overline{U}$ de l'espace R^5, une suite de polyèdres connexes triangulés

$$\widetilde{K}_0, \widetilde{K}_1, \ldots, \widetilde{K}_h, \ldots \tag{3}$$

dans laquelle le premier polyèdre $\widetilde{K}_0$ est arbitraire et chaque polyèdre suivant $\widetilde{K}_{h+1}$ s'obtient du polyèdre précédent $\widetilde{K}_h$ par un ε_h-collage, où $\{\varepsilon_h\}$ est une suite de nombres positifs qui décroît si rapidement que la suite (3) converge (dans l'espace métrique $F(\overline{U})$ de tous les compacts situés dans $\overline{U}$) vers un certain continuum $\Phi = \lim\limits_{h\to\infty} \widetilde{K}_h$**).

Le continuum de Pontriaguine $\Pi^{(m)}$ s'obtient de cette manière si l'on prend en guise de polyèdre $\widetilde{K}_0$ le triangle fermé $\overline{T}_0$ et que l'on effectue tous les collages (transformant K_h en K_{h+1}) par des rubans de Mœbius modulo m, en imposant des conditions de décroissance suffisamment fortes sur les nombres ε_h; ces conditions seront maintenant exposées; on les supposera toujours satisfaites par la suite.

3. Suite de l'étude et conditions imposées sur le processus de collage. Nous allons toujours supposer que le polyèdre initial $\widetilde{K}_0$ est un triangle équilatéral $\overline{T}_0$ de côté 1.

Comme nous savons, le triangle $T_{h+1.j} \in K_{h+1}$ s'appelle subordonné au triangle $T_{h.i} \in K_h$ dans chacun des cas suivants:

a) $T_{h+1.j}$ est situé sur $T_{h.i} \setminus \gamma_{h.i}$;

b) $T_{h+1.j} \in \mu_{h.i}$.

Le triangle $T_{h+p.j}$ (où $p > 1$) est dit subordonné au triangle $T_{h.i}$ s'il existe une suite de triangles

$$T_{h.i}, T_{h+1.i_1}, \ldots, T_{h+p-1.i_{p-1}}, T_{h+p.j}$$

(qui commence par $T_{h.i}$ et se termine par $T_{h+p.j}$) dans laquelle chaque triangle (sauf, bien sûr, le premier) est subordonné au précédent.

---

*) La distance de Hausdorff adh (A, B) est par définition la borne inférieure de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels $A \subseteq O(B, \varepsilon)$ et $B \subseteq O(A, \varepsilon)$; relativement à cette distance, l'espace des sous-compacts d'un compact donné est compact (voir C. Kuratowski [2]).

**) Pour la convergence de cette suite il suffit d'exiger par exemple que la série $\sum \varepsilon_h$ converge.

La définition suivante est fondamentale pour la suite. Si $T_{h,i}$ est un triangle quelconque du complexe K_h, on appelle *morceau du complexe* K_{h+p} *situé sur* $T_{h,i}$ le sous-complexe fermé $Q_{h+p}(T_{h,i})$ du complexe K_{h+p} consistant de tous les triangles $T_{h+p} \in K_{h+p}$ subordonnés au triangle $T_{h,i}$ et de tous leurs côtés et sommets. Il découle de notre construction que la frontière $\tilde{s}_{h,i} = \bar{T}_{h,i} \setminus T_{h,i}$ du triangle $T_{h,i}$ est contenue dans l'ensemble sous-jacent $\tilde{Q}_{h+p}(T_{h,i})$ au complexe $Q_{h+p}(T_{h,i})$ pour tout $p \geqslant 1$, et l'on appelle donc $\sigma_{h,i}$ bord du complexe $Q_{h+p}(T_{h,i})$ pour tout $p \geqslant 1$.

La frontière s_0 du triangle initial T_0 s'appelle *bord* du complexe K_h (pour tout h).

Maintenant, en suivant l'exposé de Boltianski [1], nous allons définir, en même temps que la suite (3), les nombres positifs ε_h, en commençant par $\varepsilon_0 = 1$, de manière à satisfaire aux conditions suivantes: supposons que les complexes $K_0, \ldots, K_h$ ont déjà été construits et les nombres $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_h$ déjà choisis. Posons $\varepsilon'_{h+1} = \frac{\varepsilon_h}{3 \cdot 2^h}$. Exigeons que le passage de K_h à K_{h+1} soit un ε'_{h+1}-collage et que les diamètres de tous les éléments du complexe K_{h+1} soient inférieurs à ε'_{h+1}. Désignons ensuite par ε_{h+1} un nombre positif inférieur à la plus petite des distances entre deux éléments disjoints arbitraires du complexe K_{h+1}; on a alors $\varepsilon_{h+1} < \varepsilon'_{h+1}$ (car ε_{h+1} doit être, en particulier, plus petit que la distance entre deux sommets quelconques du complexe K_{h+1} et donc plus petit que le diamètre de tout élément de ce complexe, qui est à son tour $< \varepsilon'_{h+1}$).

Ainsi,

$$\operatorname{diam} \tilde{\mu}_{h,i} < \frac{\varepsilon_h}{3 \cdot 2^h}, \quad \operatorname{diam} T_{h+1,j} < \frac{\varepsilon_h}{3 \cdot 2^h} \tag{4}$$

quel que soit $i = 1, 2, \ldots, r_h$ (où r_h est le nombre de triangles dans le complexe K_h).

On déduit de ce que l'on vient de dire

$$\operatorname{diam} T_{h,i} \leqslant \operatorname{diam} \tilde{Q}_{h+1}(T_{h,i}) \leqslant \operatorname{diam} T_{h,i} + \operatorname{diam} \tilde{\mu}_{h,i} < \frac{2\varepsilon_h}{3 \cdot 2^h} < \frac{1}{2^h}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par δ_h le maximum des diamètres des ensembles $Q_{h+1}(T_{h,i})$, on a

$$\delta_h < \frac{1}{2^h}. \tag{5}$$

Le passage de $\tilde{K}_h$ à $\tilde{K}_{h+1}$ consiste à remplacer chaque triangle $T_{h,i} \in K_h$ par le polyèdre $\tilde{Q}_{h+1}(T_{h,i})$ situé dans un δ_h-voisinage du triangle $T_{h,i}$ (qui se trouve, à son tour, dans un δ_h-voisinage du polyèdre $\tilde{Q}_{h+1}(T_{h,i})$). Chacun des deux polyèdres $\tilde{K}_h$, $\tilde{K}_{h+1}$ est donc situé dans un δ_h-voisinage de l'autre, i.e. nous avons l'inéga-

lité suivante pour la distance de Hausdorff entre ces polyèdres:

$$\operatorname{adh}(\widetilde{K}_h, \widetilde{K}_{h+1}) < \frac{1}{2^h}.$$

On en obtient alors que la suite des polyèdres connexes

$$\widetilde{K}_0, \widetilde{K}_1, \ldots, \widetilde{K}_h, \ldots \tag{6}$$

est une suite fondamentale dans l'espace métrique compact $F(\overline{U})$ de tous les ensembles fermés, situés à l'intérieur de la boule $\overline{U}$ de rayon 2, de centre au milieu du triangle T_0. Puisque la suite (6) converge vers un certain continuum *) Φ situé dans la boule $\overline{U}$. Nous dirons de tout continuum obtenu par le processus décrit comme limite de la suite (6), toutes les conditions exposées ayant été vérifiées, qu'il est obtenu « par collages ».

Remarque 4. Si la frontière $\widetilde{s}_{h,i}$ de tout triangle $T_{h,i}$ est contenue dans $\widetilde{Q}_{h+p}(T_{h,i})$ pour tout p, elle sera donc contenue dans le continuum limite Φ.

La suite

$$\overline{T}_{h,i}, \quad \widetilde{Q}_{h+1}(T_{h,i}), \ \ldots, \quad \widetilde{Q}_{h+p}(T_{h,i})$$

(où $h > 0$) converge également vers un certain continuum $\Phi_{h,i} \subseteq \Phi$ que nous appellerons morceau du continuum Φ situé sur le triangle fermé $\overline{T}_{h,i}$. La frontière $\widetilde{s}_{h,i}$ du triangle $T_{h,i}$ est alors contenue dans $\Phi_{h,i}$ et s'appelle bord du continuum $\Phi_{h,i}$.

La frontière s_0 du triangle T_0 s'appelle naturellement bord du continuum Φ.

Si K'_h est un sous-complexe de dimension homogène deux du complexe K_h, alors la réunion de tous les compacts $\Phi_{h,i}$, construits pour tous les triangles $T_{h,i} \in K'_h$, sera appelée morceau du continuum Φ situé sur K'_h; nous le désignerons par $\Phi(K'_h)$. Il est évident que nous avons pour deux sous-complexes K'_h et K''_h

$$\Phi(K'_h \cup K''_h) = \Phi(K'_h) \cup \Phi(K''_h). \tag{7}$$

Enfin, en ôtant de $\Phi_{h,i}$ la frontière $\widetilde{s}_{h,i}$ du triangle $T'_{h,i}$, nous obtiendrons l'ensemble $Q_{h,i}$, appelé *morceau du continuum* Φ *situé sur le triangle ouvert* $T_{h,i}$.

---

*) La limite C de la suite des continuums C_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, est un continuum. En effet, dans le cas contraire $C = F_1 \cup F_2$, où $\rho(F_1, F_2) = d > 0$. En choisissant les $\frac{d}{3}$-voisinages $U_1 = O\left(F_1, \frac{d}{3}\right)$, $U_2 = O\left(F_2, \frac{d}{3}\right)$, nous aurons pour k suffisamment grand : $C_k \subseteq U_1 \cup U_2$, $C'_k = U_1 \cap C_k \neq \Lambda$, $C''_k = U_2 \cap C_k \neq \Lambda$, C'_k et C''_k sont des ensembles fermés non vides, $C_k = C'_k \cup C''_k$, $\rho(C'_k, C''_k) \geqslant \frac{d}{3} > 0$. Contradiction.

Lemme 1. *Si l'intersection des triangles fermés $T_{h,i}$ et $T_{h,i'}$ est vide, alors il en sera de même de l'intersection $\Phi_{h,i} \cap \Phi_{h,i'}$.*

En effet, il découle de nos hypothèses que

$$\rho(T_{h,i},\ T_{h,i'}) > \varepsilon_h, \quad \operatorname{diam} \widetilde{Q}_{h+p}(T_{h,i}) < \frac{\varepsilon_h}{3 \cdot 2^p},$$

$$\operatorname{diam} \widetilde{Q}_{h+p}(T_{h,i'}) < \frac{\varepsilon_h}{3 \cdot 2^p},$$

par conséquent, $\Phi_{h,i}$ et $\Phi_{h,i'}$ sont situés respectivement dans des $\frac{1}{3}\varepsilon_h\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^r}+\dots\right)$-voisinages des triangles $T_{h,i}$ et $T_{h,i'}$, i.e. dans leurs $\frac{1}{3}\varepsilon_h$-voisinages, d'où découle le lemme.

Lemme 2. *Si $\overline{T}_{h,i} \cap \overline{T}_{h,i'} \neq \Lambda$, i.e. les triangles $T_{h,i}$ et $T_{h,i'}$ possèdent un sommet ou un côté commun $t = s_{h,i} \cap s_{h,i'}$, alors*

$$\Phi_{h,i} \cap \Phi_{h,i'} = \overline{t}.$$

Il suffit de démontrer l'inclusion

$$\Phi_{h,i} \cap \Phi_{h,i'} \subseteq \overline{t}.$$

Choisissons arbitrairement $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer que

$$\Phi_{h,i} \cap \Phi_{h,i'} \subseteq O(\overline{t},\ \varepsilon).$$

Prenons pour cela un si grand p que tous les $\Phi(T_{h+p,j})$, où $T_{h+p,j} \in K_{h+p}$, sont de diamètre inférieur à ε. Représentons le complexe $Q_{h+p}(T_{h,i})$ comme la somme de deux sous-complexes

$$Q_{h+p}(T_{h,i}) = Q_i^+ \cup Q_i^-,$$

où Q_i^+ consiste de tous les triangles du complexe $Q_{h+p}(T_{h,i})$ adjacents à t, de leurs côtés et sommets, tandis que Q_i^- désigne le sous-complexe du complexe $Q_{h+p}(T_{h,i})$ consistant de tous les autres triangles (non contenus dans Q_i^+), de leurs côtés et sommets.

Représentons d'une manière analogue $Q_{h+p}(T_{h,i'})$ sous la forme

$$Q_{h+p}(T_{h,i'}) = Q_{i'}^+ \cup Q_{i'}^-.$$

Alors Q_i^- et $Q_{i'}^-$ sont des sous-complexes fermés disjoints du complexe K_{h+p}, de sorte que

$$\Phi(Q_i^-) \cap \Phi(Q_{i'}^-) = \Lambda. \tag{8}$$

Mais

$$\Phi_{h,i} = \Phi(Q_{h+p}(T_{h,i})) = \Phi(Q_i^+) \cup \Phi(Q_i^-)$$

et aussi

$$\Phi_{h,i'} = \Phi(Q_{i'}^+) \cup \Phi(Q_{i'}^-),$$

donc (en se servant de (8))

$$\Phi_{h,i} \cap \Phi_{h,i'} = (\Phi(Q_i^+) \cap \Phi(Q_{i'}^+)) \cup (\Phi(Q_i^+) \cap \Phi(Q_{i'}^-)) \cup$$
$$\cup (\Phi(Q_i^-) \cap \Phi(Q_{i'}^+)) \subseteq \Phi(Q_{i'}^+) \cup \Phi(Q_i^+) \subseteq O(\bar{t}, \varepsilon),$$

ce qu'il fallait démontrer.

On déduit des faits démontrés que

$$\Phi_{h,i} \cap \Phi(K_h \setminus T_{h,i}) \subseteq s_{h,i}, \tag{9}$$

d'où découle à son tour le

Lemme 3. *L'ensemble*

$$Q_{h,i} \equiv \Phi_{h,i} \setminus s_{h,i} = \Phi \setminus \Phi(K_h \setminus T_{h,i})$$

est ouvert dans Φ.

Posons maintenant

$$Q_h = \bigcup_{i=1}^{r_h} Q_{h,i}, \quad L_h = \bigcup_{i=1}^{r_h} s_{h,i}.$$

Nous avons $Q_h \cap L_h = \Lambda$, $Q_h \cup L_h = \Phi$. L'ensemble Q_h est ouvert et se décompose en ensembles ouverts disjoints $Q_{h,i}$, dont les diamètres sont aussi petits que l'on veut (pour h suffisamment grand), d'où il découle que $\bigcap_h Q_h = Q$ est un ensemble de dimension nulle (du type G_δ).

L'ensemble $L = \bigcup_h L_h$ est un ensemble (du type F_σ) qui est la somme d'une quantité dénombrable de segments; il est donc unidimensionnel en vertu du théorème d'addition. On a donc, d'après la formule de Urysohn *),

$$1 = \dim L \leqslant \dim \Phi \leqslant \dim Q + \dim L + 1 = 2.$$

Ainsi,

Lemme 4. *La dimension du continuum* Φ *est inférieure ou égale à* 2.

R e m a r q u e 5. Si les polyèdres de collage sont homéomorphes à l'anneau circulaire plan, et si l'un des deux cercles frontières est choisi pour bord, alors on obtient à la limite un continuum unidimensionnel Φ (à savoir, un continuum homéomorphe au tapis de Sierpiński; le lecteur le démontrera sans difficulté).

4. Surfaces de Pontriaguine. Supposons maintenant que tous les complexes de collage sont des rubans de Mœbius μ_m modulo $m = 2, 3, \ldots$. Alors le continuum Φ obtenu à la limite est par définition le continuum de Pontriaguine $\Pi^{(m)}$. Le continuum $\Phi_{h,i}$ pour tout triangle $T_{h,i} \in K_h$, quels que soient h et $i = 1, 2, \ldots, r_h$, se construit à partir de $T_{h,i} \in K_h$ exactement de la même manière

*) Voir le livre [AP], chap. 2, p. 180.

que l'on a construit Φ à partir du triangle T_0. Tous les continuums $\Phi_{h,i}$ sont donc homéomorphes au continuum Φ.

Démontrons qu'ils sont tous de dimension deux:

$$\dim \Phi_{h,i} = \dim \Phi = 2,$$

de sorte que l'appellation « surface de Pontriaguine » est justifiée.

Rappelons-nous tout d'abord que nous distinguons, sur chaque ruban de Mœbius triangulé $\tilde{\mu}_m$, premièrement, son bord s (qui consiste de tous les segments auxquels adhère un seul triangle de la triangulation μ_m) et, deuxièmement, son « bord multiple » (qui consiste de tous les segments auxquels s'attachent m triangles). En ôtant de μ_m le bord et le bord multiple, nous obtenons une pseudo-variété ouverte orientée μ_m^- qui est en fait une variété homéomorphe à l'anneau plan ouvert (i.e. à l'anneau auquel on a ôté les deux cercles frontières). Ayant orienté de même manière (d'une des deux manières possibles) tous les triangles de la pseudo-variété ouverte μ_m^- et ayant muni tous ces triangles du coefficient 1, nous obtenons sur μ_m^- un cycle entier x^2 de dimension deux. Sur le complexe μ_m la chaîne x^2 est un cycle relatif mod $(s \cup s')$. Puisque tous les segments situés sur s' figurent dans la chaîne Δx^2 avec les coefficients $\pm m$, la chaîne x^2 sur μ_m est un cycle relatif mod s relativement au groupe de coefficients I_m et l'on a $\Delta x^2 = z^1$ (pour le groupe I_m), où z^1 est un cycle de dimension 1, le bord s du complexe μ_m avec l'orientation appropriée.

Revenons aux complexes K_h; ils contiennent tous les frontières s_0 du triangle T_0 dans la subdivision s_h induite par K_h. Choisissant une fois pour toutes une orientation bien déterminée du triangle T_0 (et donc de sa frontière s_0), transformons cette frontière (ainsi que chacune de ses subdivisions s_h) en un cycle z^1 (de dimension 1), respectivement z_h^1. Nous obtenons un cycle entier convergent de dimension 1

$$z^1 = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_h^1, \ldots)$$

qui peut être envisagé comme un cycle pour tout groupe de coefficients I_q, $q = 2, 3, \ldots$. Ce cycle n'est évidemment pas homologue à zéro sur son support $\tilde{s}$.

Démontrons que le cycle $z^1 \sim 0$ dans $\Phi \equiv \Pi^{(m)}$ pour le groupe de coefficients I_m, ce qui démontrera que $d_m\Pi^{(m)} \geqslant 2$ et, puisque $d_m\Pi^{(m)} = \dim \Pi^{(m)} \leqslant 2$, que l'on a l'égalité $d_m\Pi^{(m)} = \dim \Pi^{(m)} = 2$.

Il suffit de démontrer que $z_h^1 \sim 0$ dans K_h (pour le groupe I_m). Pour le faire, nous choisirons maintenant de telles orientations $t_{h,i}^2$ de tous les triangles $T_{h,i} \in K_h$ qu'en posant $x_h^2 = \sum t_{h,i}^2$, nous aurons

$$\Delta x_h^2 = z_h^1 \text{ (pour le groupe } I_m).$$

Les orientations t_h^2 seront choisies par récurrence sur h. L'orientation t_0^2 du triangle T_0 a déjà été choisie et $\Delta t_0^2 = z^1$. Supposons que les orientations $t_{h,i}^2$ ont été choisies. Choisissons les orientations $t_{h+1,j}^2$. Chaque triangle $T_{h+1,j}$ est subordonné à un $T_{h,i}$ unique; il est contenu soit dans $T_{h,i}$, soit sur le ruban de Mœbius $\mu_{h,i}$ collé au trou $\gamma_{h,i}$.

L'orientation choisie $t_{h,i}^2$ détermine l'orientation de chaque polygone convexe situé dans le triangle $T_{h,i}$ et donc l'orientation $t_{h+1,j}^2$, si $T_{h+1,j}$ est contenu dans $T_{h,i}$, ainsi que l'orientation de la frontière $\sigma_{h,i}$ du trou $\gamma_{h,i}$. Orientons maintenant tous les triangles du ruban de Mœbius $\mu_{h,i}$, de sorte que le cycle fondamental $x_{h,i}^2$, déterminé par cette orientation, de la pseudo-variété $\mu_{h,i}$ vérifie

$$\Delta x_{h,i}^2 = +\sigma_{h,i}.$$

Répétant cette construction pour les trous $\gamma_{h,i}$ de tous les simplexes $T_{h,i} \in K_h$ nous obtiendrons de telles orientations $t_{h+1,j}^2$ de tous les triangles $T_{h+1,j}$ que $\Delta \sum t_{h+1,j}^2 = z_{h+1}^1$. Notre but a été atteint.

5. Produit de deux surfaces de Pontriaguine. Soient

$$\Phi \equiv \Pi^{(m)} = \lim K_h \text{ et } \Phi' \equiv \Pi^{(m')} = \lim K'_h$$

deux surfaces de Pontriaguine obtenues à partir des triangles T_0 et T'_0 de frontières s_0 et s'_0 par collages de rubans de Mœbius μ_m, respectivement $\mu_{m'}$.

Les continuums Φ et Φ' sont situés respectivement dans les espaces euclidiens de dimension 5 R^5 et R'^5, dont le produit est l'espace euclidien R^{10} de dimension 10. Il contient le produit $\Phi \times \Phi'$ des continuums Φ et Φ' ainsi que le produit $K_h \times K'_h$ des complexes K_h et K'_h pour tout h.

Le produit $K_h \times K'_h$ est un complexe de dimension 4 consistant des polyèdres convexes $T_{h,i} \times T'_{h,i'}$ (où $T_{h,i}$, $T'_{h,i'}$ sont des éléments quelconques des complexes K_h, K'_h). La subdivision barycentrique $(K_h \times K'_h)_1$ du complexe $K_h \times K'_h$ est un complexe simplicial que nous désignerons par C_h. Le sous-complexe $(s \times K'_h) \cup \cup (K_h \times s')$ du complexe $K_h \times K'_h$ (respectivement l'ensemble sous-jacent) sera appelé bord et désigné par B_h (respectivement $\widetilde{B}_h$). Puisque $\dim \Phi = 2$ et $\dim \Phi' = 2$, on a $\dim (\Phi \times \Phi') \leqslant 4$ *).

Supposons maintenant que

$$\dim (\Phi \times \Phi') = 4 \tag{10}$$

et étudions en détail ce cas.

En vertu du corollaire du théorème 14 du paragraphe précédent, le compact $\Phi \times \Phi'$ contient l'ensemble W de dimension quatre de

*) Voir le livre [AP], chap. 5, p. 344.

points principaux $\zeta = (\xi \times \xi') \in \Phi \times \Phi'$. D'après la remarque 2 du paragraphe 3 (p. 225), on a en chaque point $\zeta \in W$ la condition suivante:

Quel que soit le voisinage suffisamment petit $O\zeta$ du point ζ (voisinage relativement à $\Phi \times \Phi'$) de frontière $B = [O\zeta] \setminus O\zeta$, l'ensemble $[O\zeta]$ possède un cycle exponentiel relatif z^4 mod B, de dimension quatre, non homologue à zéro dans $[O\zeta]$ mod B.

L'ensemble $L \subseteq \Phi$ (défini au n° 3, p. 268) et l'ensemble analogue $L' \subseteq \Phi'$ sont unidimensionnels, et leur produit $L \times L' \subseteq \subseteq \Phi \times \Phi'$ est de dimension deux; puisque l'ensemble $\Phi \times \Phi'$ est par hypothèse de dimension quatre, il existe des points $\zeta = (\xi, \xi') \in \in W$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $(\Phi \times L') \cup (L \times \Phi)$, i.e. tels que leurs coordonnées ξ; ξ' ne sont contenues dans aucun des polyèdres unidimensionnels L, L'. Ayant fixé un tel point $\zeta \in W$, choisissons ε si petit que, quel que soit le ε-voisinage $O\zeta$, il existe dans $[O\zeta]$ un cycle relatif exponentiel z^4 mod B, $B = [O\zeta] \setminus O\zeta$, non homologue à zéro dans $[O\zeta]$ mod B. Prenons ensuite un si grand N que pour $h \geqslant N$ tous les éléments des complexes K_h, K'_h soient de diamètre $< \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $T_{h,i} \in K_h$, $T'_{h,j} \in K'_h$ de tels triangles que $\xi \in \Phi_{h,i}$, $\xi' \in \Phi'_{h,j}$. Alors, conformément au choix du point ζ, on a nécessairement

$$\xi \in \Phi_{h,i} \setminus s_{h,i} \equiv Q_{h,i}, \quad \xi' \in \Phi'_{h,j} \setminus s'_{h,j} \equiv Q'_{h,j}.$$

L'ensemble $Q_{h,i} \times Q'_{h,j}$ ouvert dans $\Phi \setminus \Phi'$ est un ε-voisinage $O\zeta$ du point $\zeta = (\xi, \xi')$ à frontière

$$B_{i,j} = (\Phi_{h,i} \times s'_{h,j}) \cup (\Phi'_{h,j} \times s_{h,i}) \tag{11}$$

et $[O\zeta]$ contient donc un cycle relatif exponentiel z^4 mod $B_{i,j}$ qui n'y est pas homologue à zéro.

Ainsi, nous avons démontré le

Lemme 5. *Si l'on a* dim $(\Phi \times \Phi') = 4$ *et h est suffisamment grand, alors il existe toujours de tels triangles $T_{h,i} \in K_h$ et $T_{h,j} \in K'_h$ que le continuum $\Phi_{h,i} \times \Phi'_{h,j}$ contient un cycle relatif exponentiel z^4* mod $B_{i,j}$ *de dimension quatre où la frontière $B_{i,j}$ de l'ensemble ouvert $Q_{h,i} \times Q_{h,j}$ est donnée par la formule* (1).

Mais les continuums $\Phi_{h,i}$ et Φ, ainsi que $\Phi'_{h,j}$ et Φ', sont homéomorphes, et par conséquent le lemme démontré peut être formulé de la manière suivante:

Lemme 5'. *Si* dim $(\Phi \times \Phi') = 4$, *alors il existe sur $\Phi \times \Phi'$ un cycle relatif exponentiel z^4* mod B *de dimension quatre (où $B = = (\Phi \times s'_0) \cup (s_0 \times \Phi')$), non homologue à zéro dans $\Phi \times \Phi'$* mod B.

6. Deux lemmes d'approximation. Le premier est presque évident, c'est le

Lemme 6. *Le continuum* $\Phi \subseteq R^5$, *pour un* $\varepsilon > 0$ *quelconque, peut être, pour* h *suffisamment grand, appliqué par un* ε*-déplacement sur le polyèdre* $\widetilde{K}_h$ *en laissant invariants tous les points du bord* $s_0 \equiv \equiv \overline{T}_0 \setminus T_0$ *du continuum* Φ.

Pour la démonstration, prenons un h si grand que diam $\Phi_{h,i} < < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $T_{h,i} \in K_h$, et projetons perpendiculairement le continuum $\Phi_{h,i}$ dans le plan $R^2_{h,i}$ du triangle $T_{h,i}$. Cette projection $\pi_{h,i}\colon \Phi_{h,i} \to R^2_{h,i}$ est un $\frac{\varepsilon}{2}$-déplacement pour lequel l'ensemble $\pi_{h,i}\Phi_{h,i} \setminus T_{h,i} \subset R^2_{h,i}$ peut être non vide.

Désignons par $\rho\colon R^2_{h,i} \to \overline{T}_{h,i}$ l'application identique sur $T_{h,i}$ et définie sur $R^2_{h,i} \setminus T_{h,i}$ comme projection centrale sur la frontière du triangle $T_{h,i}$. L'application

$$\psi_{h,i} = \rho\pi_{h,i}\colon \Phi_{h,i} \to \overline{T}_{h,i}$$

du continuum $\Phi_{h,i}$, identique sur le bord $s_{h,i} = \overline{T}_{h,i} \setminus T_{h,i}$, est en outre un ε-déplacement.

En effectuant l'application $\psi_{h,i}\colon \Phi_{h,i} \to T_{h,i}$ pour chaque $T_{h,i} \in K_h$ et en se rappelant que $\Phi = \bigcup_{i=1}^{r_h} \Phi_{h,i}$, $s_0 \subseteq L_h = \bigcup_{i=1}^{r_h} s_{h,i}$, nous obtenons un ε-déplacement $\psi_h\colon \Phi \to \widetilde{K}_h$, identique sur s_0.

Le lemme 6 est démontré.

Remarque 6. On démontre sans difficulté que l'application $\psi_{h,i}\colon \Phi_{h,i} \to T_{h,i}$ est essentielle, d'où l'on peut déduire que le continuum $\Phi_{h,i}$, ainsi que le continuum Φ qui lui est homéomorphe, est de dimension deux.

Le lemme 6 est nécessaire pour la démonstration du lemme fondamental suivant:

Lemme 7. *Soit*

$$\Phi = \lim \widetilde{K}_h \subseteq R^5,$$

$$\Phi' = \lim \widetilde{K}'_h \subseteq R^5, \quad \Phi \times \Phi' \subseteq R^5 \times R^5 = R^{10}.$$

Soient $B = (s' \times \Phi) \cup (\Phi' \times \widetilde{s})$, *respectivement* $B_h = (s' \times \widetilde{K}_h) \cup \cup (\widetilde{K}'_h \times \widetilde{s})$, *le bord du continuum* $\Phi \times \Phi'$, *respectivement du polyèdre* $\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h$. *Supposons que dans* $\Phi \times \Phi'$ *l'assertion du lemme 4 est satisfaite, i.e. il existe un cycle relatif exponentiel* z^4 mod B, *de dimension quatre, non homologue à zéro dans* $(\Phi \times \Phi')$ mod B. *Alors pour chaque* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit, et chaque entier naturel* N_ε *suffisamment grand, il existe pour* $h > N_\varepsilon$ *dans le complexe* $C_h = = (K_h \times K'_h)_1$ *un cycle relatif* z^4 mod $(B_h)_1$, *pour un certain groupe* I_q, *non homologue à zéro dans* $O(\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h, \varepsilon)$ mod $O(\widetilde{B}_h, \varepsilon)$.

Démonstration. Choisissons $\varepsilon > 0$ si petit que le cycle $z^4 = (z_1^4, z_2^4, \ldots, z_k^4, \ldots)$ soit non homologue à zéro dans $O(\Phi \times \Phi', 6\varepsilon) \subset \subset R^{10}$ *) mod B. Choisissons ensuite un N_ε si grand qu'il existe, en vertu du lemme 5, des ε-déplacements

$$\psi\colon \Phi \to \widetilde{K}_h, \quad \psi'\colon \Phi' \to \widetilde{K}'_h$$

identiques sur les bords $\widetilde{S}$ et $\widetilde{S}'$ des continuums Φ et Φ'. Nous avons alors le 2ε-déplacement $\varphi \equiv (\psi \times \psi')\colon (\Phi \times \Phi') \to (\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h)$ pour lequel $\varphi B \subseteq \widetilde{B}_h$. Le cycle φz^4 est donc un cycle relatif de $(\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h)$ mod $\widetilde{B}_h$; démontrons que $\varphi z^4 \not\sim 0$ dans $O(\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h)$ mod $O(\widetilde{B}_h, \varepsilon)$. Soient

$$z^4 = (z_1^4, z_2^4, \ldots, z_k^4, \ldots),$$
$$\varphi z^4 = (\varphi z_1^4, \varphi_2^4, \ldots, \varphi z_k^4, \ldots),$$

où z_k^4 sont des δ_k-cycles dans $\Phi \times \Phi'$ mod B, les φz_k^4 sont des δ_k-cycles **) dans $\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h$ mod $\widetilde{B}_h$, $\delta_k \to 0$. Désignons par x_k^5, respectivement x_k^4, le prisme du déplacement φ, basé sur z_k^4, φz_k^4, respectivement sur Δz_k^4, $\varphi \Delta z_k^4$. Alors ***)

$$\Delta x_k^5 = z_k^4 - \varphi z_k^4 - x_k^4. \tag{12}$$

Les prismes x_k^5 et x_k^4 sont des $(2\varepsilon_k + \delta_k)$-chaînes (voir chapitre 2, § 5, p. 118); par conséquent, pour un k suffisamment grand, chaque simplexe de chacun de ces prismes est contenu dans une boule de rayon 3ε et de centre dans un des sommets (de ce simplexe) situé dans l'ensemble $\Phi \times \Phi'$ (au moins un tel sommet existe dans chaque simplexe des chaînes x_k^5 et x_k^4).

Par conséquent (pour un k suffisamment grand) les supports des chaînes x_k^5 et x_k^4 et de toutes les chaînes qui figurent dans la formule (12) sont situés dans $O(\Phi \times \Phi', 3\varepsilon)$.

Supposons maintenant que $\varphi z^4 \sim 0$ dans $O(\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h, \varepsilon)$ mod $O(\widetilde{B}_h, \varepsilon)$. Alors il existe dans $O(\widetilde{K}_h \times \widetilde{K}'_h, \varepsilon)$ de telles chaînes y_k^5 que

$$\Delta y_k^5 = \varphi z_k^4 + y_k^4, \tag{13}$$

où y_k^4 sont des chaînes situées dans $O(\widetilde{B}_k, \varepsilon)$. On a

$$z_k^4 = (z_k^4 - \varphi z_k^4) + \varphi z_k^4$$

*) I.e. qu'il existe des z_k^4 de numéro k aussi grand que l'on veut, qui ne sont la frontière (mod B) d'aucune chaîne de l'ouvert $O(\Phi \times \Phi', 6\varepsilon) \subseteq R^{10}$.

**) Si z_k^4 et φz_k^4 sont respectivement des δ'_k- et δ''_k-cycles, nous désignons par δ_k le plus grand des nombres δ'_k, δ''_k.

***) Ici et partout dans la suite les chaînes munies de l'indice k ont pour groupe de coefficients le même groupe que z_k^4.

ou, d'après les formules (12) et (13),

$$z_k^4 = (\Delta x_k^5 + x_k^4) + \Delta y_k^5 - y_k^4,$$

i.e.

$$z_k^4 = \Delta (x_k^5 + y_k^5) + (x_k^4 - y_k^4), \tag{14}$$

où x_k^4 et y_k^4 sont situées dans $O(B, 3\varepsilon)$ à partir d'un k suffisamment grand.

Effectuons un 3ε-déplacement de la chaîne $x_k^4 - y_k^4$ en remplaçant chacun de ses sommets par le point de l'ensemble B le plus proche; nous obtiendrons d'après la formule (14) l'homologie

$$z_k^4 \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \text{ dans } O(\Phi \times \Phi', 6\varepsilon) \bmod B$$

vérifiée pour tous les k suffisamment grands, ce qui est en contradiction avec la définition du cycle z^4.

Ainsi, $\varphi z^4 \not\sim 0$ dans $O(\widetilde{C}_h, \varepsilon) \bmod O(\widetilde{B}_h, \varepsilon)$. Considérons maintenant le complexe simplicial $C_h = (K_h \times K'_h)_1$ et désignons par δ le nombre de Lebesgue du recouvrement ω constitué des étoiles ouvertes des sommets du complexe C_h.

Parmi les cycles relatifs $\varphi z_k^4 \bmod \widetilde{B}_h$, non homologues à zéro dans

$$O(\widetilde{C}_h, \varepsilon) \bmod O(\widetilde{B}_h, \varepsilon),$$

il existe des cycles φz_k^4, avec k aussi grand que l'on veut, et donc tels que tous leurs simplexes ont des diamètres inférieurs à δ. Choisissons un tel cycle φz_k^4 et appliquons-le, par un déplacement canonique relativement à ω, dans un cycle relatif u_h^4 du complexe $C_h \bmod B_h$. Tout ce déplacement s'effectue à l'intérieur du polyèdre $\widetilde{C}_h$ (puisque chaque sommet de la chaîne φz_k^4 est appliqué dans un des sommets de son support dans le complexe C_h). Donc,

$$\varphi z_k^4 \sim u_h^4 \text{ dans } \widetilde{C}_h \bmod \widetilde{B}_h$$

et

$$u_h^4 \not\sim 0 \text{ dans } O(\widetilde{C}_h, \varepsilon) \bmod O(\widetilde{B}, \varepsilon).$$

Le lemme 7 est démontré.

7. Démonstration de l'inégalité dim $(\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}) \leqslant 3$ lorsque m et m' sont premiers entre eux. Soit

$$\Phi \equiv \Pi^{(m)} = \lim K_h, \quad \Phi' \equiv \Pi^{(m')} = \lim K'_h \quad (m, m') = 1.$$

Appelons bord du complexe $K_h \times K'_h$ le complexe

$$B_h = (K_h \times s'_0) \cup (s_0 \times K'_h).$$

Appelons bord multiple λ_h du complexe K_h la réunion de tous les bords multiples de tous les rubans de Mœbius, i.e. la somme de tous

les éléments de dimension 1 du complexe K_h auxquels adhèrent m triangles. D'une manière analogue, le bord multiple $\lambda'_h \subseteq K'_h$ du complexe K'_h consiste de tous les segments auxquels adhèrent m' triangles du complexe K'_h.

Appelons bord multiple du complexe $K_h \times K'_h$ le complexe

$$\Lambda_h = (K_h \times \lambda'_h) \cup (\lambda_h \times K_h);$$

l'ensemble sous-jacent s'appelle bord multiple du polyèdre $\widetilde{K}_h \times \times \widetilde{K}'_h \subseteq R^{10}$.

Nous voyons que l'on peut affecter à tous les triangles $T_{h,i} \in \in K_h$ de telles orientations $t^2_{h,i}$ que $v^2_h = \sum_i t^2_{h,i}$ soit un cycle relatif mod s_0 du complexe K_h pour le groupe I_m; d'une manière analogue, les triangles $T'_{h,i} \in K'_h$ peuvent être munis de telles orientations $t'^2_{h,i}$ que $v'^2 = \sum_i t'^2_{h,i}$ soit un cycle relatif mod s'_0 du complexe K'_h pour le groupe $I_{m'}$. Les complexes $M^2_h = K_h \setminus (\lambda_h \cup s_0)$ et $M'^2_h = = K'_h \setminus (\lambda'_h \cup s'_0)$ sont des pseudo-variétés ouvertes orientables de dimension 2, et les chaînes v^2_h et v'^2_h sont leurs cycles fondamentaux (orientations).

Démontrons que les complexes cellulaires formés de polyèdres convexes *)

$$M^4_h = (K_h \times K'_h) \setminus (\Lambda_h \cup B_h)$$

sont des pseudo-variétés ouvertes orientables de dimension 4. En effet, désignons par $T^1_{h,j}$, respectivement $T'^1_{h,j}$, les éléments de dimension 1 du complexe K_h, respectivement du complexe K'_h. Alors les éléments de dimension trois du complexe $K_h \times K'_h$ sont de la forme $T^2_{h,i} \times T'^1_{h,j}$ et $T^1_{h,j} \times T'^2_{h,i}$ où $T^2_{h,i}$, $T'^2_{h,i}$ sont des triangles quelconques appartenant respectivement aux complexes K_h et K'_h.

Démontrons: si T^3_h est un élément quelconque de dimension trois du complexe M^4_h, alors il existe exactement deux éléments de dimension quatre du complexe M^4 qui ont le polyèdre T^3_h pour face. Soit $T^3_h = T^1_{h,j} \times T'^2_{h,i}$ (le cas $T^3_h = T'^1_{h,j} \times T^2_{h,i}$ est analogue); puisque $T^3_h = T^1_{h,j} \times T'^2_{h,i}$ n'appartient pas au complexe $\Lambda_h \cup B_h$, alors $T^2_{h,j}$ n'appartient pas à $\lambda_h \cup s_0$. Il existe donc exactement deux triangles $T^2_{h,1}$ et $T^2_{h,2}$ de côté $T^1_{h,j}$. Alors les éléments de dimension quatre $T^2_{h,1} \times T'^2_{h,i}$ et $T^2_{h,2} \times T'^2_{h,i}$ du complexe M^4_h ont une face commune de dimension trois $T^1_{h,j} \times T'^2_{h,i}$. Il n'existe pas de troisième élément du complexe M^4_h ayant pour face $T^1_{h,j} \times T'^2_{h,i}$; un tel élément devrait être de la forme $T^2_{h,k} \times T'^2_{h,i}$, le triangle $T^2_{h,k}$ devant avoir pour côté $T^1_{h,j}$; mais alors $T^2_{h,k}$ est nécessairement soit $T^2_{h,1}$, soit $T^2_{h,2}$.

*) Les complexes M^2_h, M'^2_h, M^4_h sont même des variétés (combinatoires) ouvertes.

Démontrons que deux éléments quelconques $T^2_{h,i} \times T'^2_{h,j}$ et $T^2_{h,k} \times T'^2_{h,l}$ du complexe M^4_h peuvent être liés par une chaîne d'éléments de dimension quatre, tels que deux éléments voisins possèdent une face commune (de dimension trois).

Soient

$$T^2_{h,i},\ T^2_{h,i_1},\ \ldots,\ T^2_{h,i_r},\ T^2_{h,k}$$

et

$$T'^2_{h,j},\ T'^2_{h,j_1},\ \ldots,\ T'^2_{h,j_s},\ T'^2_{h,l}$$

les chaînes de triangles qui joignent (dans M^2, respectivement dans M'^2) les triangles $T^2_{h,i}$ et $T^2_{h,k}$, respectivement $T'^2_{h,j}$ et $T'^2_{h,l}$. On peut alors lier les éléments $T^2_{h,i} \times T'^2_{h,j}$ et $T^2_{h,k} \times T'^2_{h,l}$ par exemple par la chaîne

$$\begin{cases} (T^2_{h,i} \times T'^2_{h,j}),\ (T^2_{h,i} \times T'^2_{h,j_1}),\ \ldots,\ (T^2_{h,i} \times T'^2_{h,j_s}),\ (T^2_{h,i} \times T'^2_{h,l}), \\ (T^2_{h,i_1} \times T'^2_{h,l}),\ (T^2_{h,i_2} \times T'^2_{h,l}),\ \ldots,\ (T^2_{h,i_r} \times T'^2_{h,l}),\ (T^2_{h,k},\ T'^2_{h,l}). \end{cases}$$

Ainsi, M^4_h est une pseudo-variété ouverte de dimension quatre.

Démontrons que M^4_h est orientable. Pour cela, considérons les cycles fondamentaux z^2 et z'^2 sur les pseudo-variétés orientables M^2_h et M'^2_h et montrons que leur produit *) $z^4 = z^2 \times z'^2$ est un cycle (entier) sur M^4_h. En effet,

$$\Delta z^4 = (\Delta z^2 \times z'^2) + \varepsilon\,(z^2 \times \Delta z'^2), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Puisque Δz^2 est situé sur $\lambda_h \cup s_0$ et $\Delta z'^2$ sur $\lambda'_h \cup s'_0$, alors Δz^4 est situé sur $\Lambda_h \cup B_h$ et donc z^4 est un cycle (non nul) de la pseudo-variété ouverte M^4_h. On peut donc donner les orientations $t^4_{i,j}$ aux polyèdres convexes $T^4_{i,j} = T^2_{h,i} \times T'^2_{h,j}$ de sorte que la chaîne z^4 soit de la forme $\sum_k t^4_k$ (où t^4_k sont les mêmes $t^4_{i,j}$ dans une nouvelle numération).

---

*) Le produit topologique des polyèdres $\widetilde{X} \subset R^n$ et $\widetilde{Y} \subset R^m$, donnés avec leurs triangulations X et Y, se présente naturellement sous forme de réunion de polyèdres convexes disjoints $T^p_i \times T^q_j$ et se transforme dans un complexe cellulaire $X \times Y$ si l'on choisit l'orientation de $T^p_i \times T^q_j$ pour les orientations données t^p_i et t^q_j des simplexes T^p_i et T^q_j conformément à l'orientation du plan $R^{p+q} = R^p \times R^q$, les orientations des plans R^p et R^q ayant été choisies conformément aux orientations t^p_i et t^q_j. Dans le cas des polyèdres de dimension deux que nous envisageons, tous les raisonnements sont intuitivement clairs et seront facilement retrouvés par le lecteur. Ensuite, pour deux chaînes quelconques $x^p \in L^p(X, I)$ et $y^q \in L^q(Y, I)$, définissons la chaîne $x^p \times y^q \in L^{p+q}(X \times Y, I)$ par la formule $(x^p \times y^q,\ t^p \times t^q) = (x^p,\ t^p)\,(y^q,\ t^q)$, qui implique immédiatement la formule de la frontière $\Delta\,(x^p \times y^q) = \Delta x^p \times y^q + \varepsilon\,(x^p \times \Delta y^q)$ (le nombre $\varepsilon = \pm 1$ ne dépend que des dimensions p et q et non du choix des chaînes x^p et y^q). Dans la situation la plus générale, le lecteur pourra trouver toutes les définitions dans le livre [AH], p. 303.

Soit maintenant $y^4 = \sum_k a_k t_k^4$ un cycle relatif quelconque sur $(K_h \times K'_h)$ mod B_h pour le groupe de coefficients I_q, où q est un entier quelconque $\geqslant 2$. Démontrons que $y^4 = 0$. Les coefficients a_k sont envisagés comme des résidus modulo q, i.e. comme les plus petits entiers positifs dans chaque classe $\alpha_k \in I - qI$.

Remarquons avant tout que tous les a_k sont égaux entre eux. Il suffit de démontrer que $a_k = a_{k'}$ si T_k^4 et $T_{k'}^4$ sont deux éléments du complexe M^4 à face commune T^3 de dimension trois.

Soit t^3 une orientation quelconque de la face T^3. Alors, pour les coefficients d'incidence $\varepsilon = (t_k^4 : t^3)$ et $\varepsilon' = (t_{k'}^4 : t^3)$, nous avons $\varepsilon' = -\varepsilon$; mais Δy^4 prend sur t^3 la valeur $\varepsilon a_k + \varepsilon' a_k$, i.e. $\pm (a_k - a_{k'}) = 0$, de sorte que $a_k = a_{k'}$.

Ainsi, $y^4 = a \sum t_k^4 = a (z^2 \times z'^2)$; nous avons aussi (dans le complexe $K_h \times K'_h$)

$$\Delta y^4 = a (\Delta z^2 \times z'^2) + \varepsilon a (z^2 \times \Delta z'^2), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Calculons la valeur de cette chaîne sur un polyèdre orienté quelconque t^3 du complexe $\Lambda_h = (K_h \times \lambda'_h) \cup (K'_h \times \lambda_h)$. Supposons d'abord $t^3 | \in K_h \times \lambda'_h$, $|t^3| = T_{h,i}^2 \times T_{h,j}'^1$, $T_{h,i}^2 \in M_h^2$, $T_{h,j}'^1 \in \lambda'_h$. Alors

$$(\Delta y^4, t^3) = \pm a (z^2, t_{h,i}^2) (\Delta z'^2, t_{h,j}'^1).$$

Mais $(z^2, t_{h,i}^2) = 1$, tandis que $(\Delta z'^2, t_{h,j}'^1) = \pm m'$, donc $(\Delta y^4, t^3) = \pm am'$. Puisque y^4 est un cycle mod B_h (pour I_q) par hypothèse, on a pour tous les $|t^3| \in \Lambda_h$ la relation $(\Delta y^4, t^3) = 0$ mod q, donc

$$am' \equiv 0 \bmod q. \tag{15}$$

Supposons maintenant $|t^3| \in K'_h \times \lambda_h$, de sorte que

$$|t^3| = T_{h,i}'^2 \times T_{h,j}^1, \quad T_{h,i}'^2 \in M_h'^2, \quad T_h^1 \in \lambda_h.$$

Alors

$$(\Delta y^4, t^3) = \pm a (z'^2, t_{h,i}'^2) (\Delta z^2, t_h^1).$$

Mais

$$(z'^2, t_{h,i}'^2) = 1, \quad (\Delta z^2, t_h^1) = \pm m$$

et

$$(\Delta y^4, t^3) = \pm am$$

et ce nombre doit être égal à zéro mod q.

Ainsi nous avons en même temps

$$am' \equiv 0 \bmod q, \quad am \equiv 0 \bmod q.$$

Soit p un diviseur premier du nombre q. Il doit figurer aussi bien dans am que dans am'. S'il ne figurait pas dans a, il devrait figurer en même temps dans m et dans m', ce qui est impossible, car par hypothèse $(m, m') = 1$. Ainsi, p divise a et, ceci étant vrai pour tout diviseur premier du nombre q, on a $a \equiv 0$ mod q, i.e. $z^4 = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

On tire des faits démontrés que le complexe simplicial $C_h = (K_h \times K'_h)_1$ ne possède aucun cycle y_1^4 mod B_{h1} de dimension quatre non nul pour le groupe de coefficients I_q, puisque chaque cycle de dimension quatre y_1^4 dans C_h mod B_{h1} (étant un cycle de dimension maximale) sera une subdivision d'un certain cycle y^4 de $K_h \times K'_h$ mod B_h, et alors $y_1^4 \neq 0$ impliquerait $y^4 \neq 0$.

Maintenant on démontre immédiatement l'inégalité $\dim (\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}) \leqslant 3$ pour m et m' premiers entre eux: si l'on avait $\dim (\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}) = 4$, alors, comme nous le savons, il existe (pour h suffisamment grand) dans le complexe simplicial C_h un cycle relatif z^4 mod B_{h_1}, non homologue à zéro dans C_h mod B_{h_1} pour un certain groupe I_q, $q \geqslant 2$, ce qui est, comme nous venons de le démontrer, impossible.

Le problème posé dans ce paragraphe est donc complètement résolu.

Remarque 7. Le fait que le continuum $\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}$ est de dimension trois découle de l'inégalité démontrée $\dim (\Pi^{(m)} \times \times \Pi^{(m')}) \leqslant 3$ et du fait que la dimension de chaque compact de dimension finie augmente d'au moins un lorsqu'on le multiplie par un continuum quelconque.

Remarque 8. Si $(m, m') \neq 1$, alors $\dim (\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}) \leqslant \leqslant 4$, en particulier, $\dim (\Pi^{(m)} \times \Pi^{(m')}) = 4$. Ceci se démontre à l'aide du théorème suivant de L. Pontriaguine: pour $\mathfrak{A} = I_p$, où p est un nombre premier, et aussi pour $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ nous avons

$$d_{\mathfrak{A}} (X \times Y) = d_{\mathfrak{A}} X + d_{\mathfrak{A}} Y$$

quels que soient les compacts X et Y (de dimension finie dans le sens $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$). A l'aide de la même « méthode de collage » Boltianski a construit un continuum B pour lequel $\dim (B \times B) = 3$.

La démonstration de tous ces résultats est exposée dans l'article de Boltianski [1] déjà cité.

SUPPLÉMENT AU CHAPITRE QUATRE

THÉORÈMES DE SITNIKOV SUR LES CEINTURES HOMOLOGIQUES D'UN COMPACT DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

§ 1. Théorème des sacs

1. Rappelons les définitions principales. Nous entendons ici par *diamètre de dimension p* du compact Φ, situé dans l'espace euclidien R^n, la borne inférieure $\alpha^p\Phi$ de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels existe

un ε-déplacement continu du compact Φ dans un compact (et donc un polyèdre) de dimension p. On appelle *support* du cycle véritable $z = \{z_k\}$ du compact Φ tout compact $\Phi_1 \subseteq \Phi$ qui contient tous les sommets de tous les cycles z_k, à partir d'un certain k. Le cycle z du compact Φ est dit *essentiel* s'il n'est pas homologue à zéro sur un de ses supports, et *non essentiel* dans le cas contraire. La *mesure d'essentialité* μz d'un cycle non essentiel z est nulle par définition: $\mu z = 0$. La mesure d'essentialité μz d'un cycle essentiel z se définit comme borne supérieure de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels il existe un tel support $\Phi_1 \subseteq \Phi$ du cycle z que z n'est pas homologue à zéro dans un ε-voisinage $O(\Phi_1, \varepsilon)$ du compact Φ_1. Enfin, par *diamètre homologique* (*de dimension* p) $\alpha_\Gamma^p z$ du cycle z de l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ nous entendons la borne inférieure des diamètres de dimension p des supports de tous les cycles homologues dans Γ au cycle z.

Maintenant, la définition fondamentale. On appelle *sac autour du compact* $\Phi \subset R^n$ tout cycle de dimension $n-1$ de l'ensemble ouvert $\Gamma = R^n \setminus \Phi$, pour le groupe de coefficients I, si ce cycle est enlacé avec chaque point x du compact Φ.

Il s'avère que la notion de sac permet de déterminer d'une manière naturelle la dimension du compact Φ situé dans l'espace euclidien, en se servant des propriétés métriques de l'espace complémentaire. A savoir, nous allons démontrer le théorème suivant de Sitnikov:

Théorème des sacs. *Soit* $\Phi \subset R^n$ *un compact et* $\dim \Phi = r \leqslant n-1$. *Il existe alors un tel* $\alpha > 0$ *que chaque sac autour du compact* Φ *a un diamètre homologique de dimension* $r-1$ *supérieur à* α, *tandis que chaque diamètre homologique de dimension* r *de tout cycle situé dans* $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ *est nul. Il existe alors toujours des sacs autour de* Φ *avec une mesure d'essentialité aussi petite que l'on veut. Dans le cas* $\dim \Phi = n$, *il existe évidemment un tel* $\alpha > 0$ *que pour chaque sac* z^{n-1} *autour de* Φ *on a* $\mu z^{n-1} > \alpha$ *) (*alors* $\alpha_\Gamma^{n-2} z^{n-1} > 0$ *et trivialement* $\alpha_\Gamma^{n-1} z^{n-1} = 0$ *pour tous les sacs* z^{n-1}).

Commençons la démonstration du théorème par la remarque suivante. *Lorsque* $\dim \Phi = r$, *nous avons* $\alpha_\Gamma^r z = 0$ *pour tout cycle* z *de l'ensemble ouvert* Γ. Prenons en effet un tel voisinage polyédral U de l'ensemble Φ que le cycle z soit situé dans $R^n \setminus [U]$. Soit x une chaîne quelconque de R^n de frontière z et x' le morceau **) de la chaîne x situé dans $R^n \setminus [U]$. Alors $\Delta x = z - z'$, où z' est situé dans $[U]$; pour tout $\varepsilon > 0$ on peut prendre un voisinage U si petit qu'il peut être envoyé par un ε-déplacement dans un polyèdre de

---

*) On peut prendre pour α le rayon d'une boule de dimension n située dans Φ.

**) Voir la note au bas de la page 257.

dimension r (lemme 1 du chapitre 4, p. 227), d'où l'on déduit $\alpha_\Gamma^r z = 0$.

Passons à la démonstration de l'assertion principale du théorème: si $\dim \Phi = r \leqslant n - 1$, alors il existe un tel $\alpha > 0$ que pour chaque sac z^{n-1} autour de Φ on a $\alpha_\Gamma^{r-1} z^{n-1} > \alpha$, et l'on peut trouver un sac z^{n-1} à mesure d'essentialité aussi petite que l'on veut.

Lemme fondamental. *Soit $[U]$ un polyèdre de dimension n dans R^n qui est l'adhérence d'un ensemble ouvert U. Soit $p < n - 1$ et z^p un cycle véritable homologue à zéro dans U. Alors le diamètre de dimension p $\alpha^p B$ de la frontière $B = \mathrm{Fr}\, U$ de l'ensemble U est supérieur ou égal à la mesure d'essentialité du cycle z^p: $\alpha^p B \geqslant \mu z^p$.*

Démonstration du lemme.

1. Posons $\alpha^p B = \alpha$ et choisissons un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Il existe une application simpliciale φ: $K \to K'$ de la triangulation K du polyèdre B dans une certaine triangulation K' du polyèdre $\widetilde{K}'$ de dimension p obtenu par $(\alpha + \varepsilon)$-déplacement, où l'on peut supposer que le système de tous les sommets des triangulations K et K' est en position générale dans R^n. Plongeons l'espace R^n dans l'espace euclidien R^m de si grande dimension qu'il existe une application topologique simpliciale g: $\widetilde{K}' \to P$ du polyèdre $\widetilde{K}'$ sur un certain polyèdre P telle que l'application $g\varphi$ est toujours un $(\alpha + \varepsilon)$-déplacement et le prisme Π, basé sur la triangulation donnée K et sur $g\varphi K$, est lui-même réalisé dans R^m sous forme de triangulation. Il existe alors une $(\varepsilon + \alpha)$-déformation du prisme Π dans sa base inférieure P.

L'application g^{-1} de la base inférieure P du prisme Π et l'application identique de sa base supérieure B définissent un ε-déplacement simplicial f d'une certaine subdivision L du prisme Π dans une certaine subdivision simpliciale W de l'espace R^n; on peut toujours admettre que $[U]$ est l'ensemble sous-jacent d'une certaine triangulation X, qui est un sous-complexe du complexe W.

D'après les hypothèses de la position générale des sommets de K et K' que nous avons faites, aucun des simplexes du complexe L n'est dégénéré par l'application f. En ayant orienté d'une façon bien déterminée l'espace R^n, et donc X et K (qui deviennent ainsi des chaînes x^n et Δx^n), nous obtiendrons une orientation bien déterminée de tous les simplexes de dimension n du complexe L, de sorte que notre prisme Π se transformera dans une chaîne π^n de dimension n. Puisque $\dim \widetilde{K}' = p < n - 1$ et donc $\Delta\pi^n = \Delta x^n$, on a $\Delta f\pi^n = f\Delta\pi^n = f\Delta x^n = \Delta x^n$. Mais $f\pi^n$ est une chaîne du complexe W, tandis que dans W le cycle Δx^n est la frontière uniquement de la chaîne x^n, donc $f\pi^n = x^n$.

2. Pour la démonstration de la deuxième partie du théorème, nous devons effectuer les constructions auxiliaires suivantes.

Le couple $\theta = (t, f)$ consistant d'un polyèdre convexe orienté t et de la bijection affine t définie sur i s'appelle *cellule singulière*. Par la suite le polyèdre t sera toujours situé dans les simplexes d'une triangulation K donnée une fois pour toutes, et l'application f sera toujours une même application continue du polyèdre $\widetilde{K}$ dans un espace euclidien R^n, étant affine et non dégénérée sur chaque simplexe de K. Dans ces conditions on peut définir les *chaînes singulières* (de l'espace R^n pour le complexe K et l'application f) comme étant des formes linéaires $\xi = \sum c_i (t_i, f)$ relativement aux cellules singulières $\theta_i = (t_i, f)$; lorsque $x^r = \sum c_i t_i^r$, nous écrirons $\xi^r = \sum c_i (t_i^r, f) = (x^r, f)$. Pour chaque chaîne singulière $\xi = (x, f)$ posons

$$f_0\xi = x, \quad f_1\xi = fx. \tag{1}$$

Définissons ensuite la *frontière d'une chaîne singulière* :

$$\Delta (x, f) = (\Delta x, f). \tag{2}$$

On vérifie facilement les relations

$$\Delta f_i\xi = f_i \Delta\xi ; \quad i = 0, 1. \tag{3}$$

On appelle *) *intersection* de la cellule singulière $\theta (t, f)$ et du polyèdre u, situé dans R^n en position générale avec ft, la cellule singulière

$$(\theta \times u) = (f^{-1}ft \times u, f),$$

où l'application f est restreinte à $[t]$, de sorte que l'image inverse f^{-1} est prise dans $[t]$.

Ensuite, l'intersection d'une chaîne singulière $\xi^r = \sum c_i\theta_i$ et d'une chaîne quelconque $w = \sum d_k u_k$ de l'espace R^n (en position générale relativement au polyèdre $\widetilde{fK}$) se définit par la formule

$$(\xi \times w) = \sum_{i, k} c_i d_k (\theta_i \times u_k).$$

On vérifie facilement les formules

$$\Delta (\xi \times w) = \pm (\Delta\xi \times w) + (\xi \times \Delta w), \tag{4}$$

$$f_1 (\xi \times w) = (f_1\xi \times w). \tag{5}$$

---

*) Les renseignements nécessaires concernant la théorie des intersections peuvent être trouvés dans Lefschetz [1], [2] et aussi (en surabondance) dans l'article de Glezerman et de Pontriaguine [1] ; pour comprendre ce qui va suivre il suffit néanmoins d'avoir l'intuition ensembliste de l'intersection si l'on admet sans démonstration la formule fondamentale de la théorie des intersections :

$$\Delta (x \times y) = \pm (\Delta x \times y) + (x, \Delta y)$$

liée à la notion relativement complexe d'intersection orientée de deux polyèdres (en particulier, de deux simplexes) orientés.

Il suffit de vérifier la formule (4) pour $\xi = \theta$, $w = u$, ce qui se fait automatiquement en suivant les définitions données et la formule correspondante de la théorie classique des intersections.

3. Revenons à la démonstration du lemme fondamental. Supposons que le cycle véritable donné dans U est $z^p = \{z_k^p\}$, $z_k^p = \Delta x_k^{p+1}$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que tous les x_k^{p+1} sont situés dans U en position générale avec W. Prenons les intersections $\xi_k^{p+1} = ((\pi^n, f) \times x_k^{p+1})$ et $\zeta_k^p = ((\pi^n, f) \times z_k^p)$. Alors, d'après la formule (4),

$$(6) \qquad \Delta((\pi^n, f) \times x_k^{p+1}) = \pm(\Delta(\pi^n, f) \times x_k^{p+1}) + ((\pi^n, f) \times \Delta x_k^{p+1}).$$

Mais en vertu de la formule (2), $\Delta(\pi^n, f) = (\Delta\pi^n, f) = (\Delta x^n, f)$, et puisque f est l'identité sur B et x_k^{p+1} est situé dans $U = [U] \setminus B$, le premier terme du second membre de la formule (6) est nul, donc

$$(7) \qquad \Delta\xi_k^{p+1} = \zeta_k^p.$$

D'après la définition même de l'intersection les chaînes singulières ξ_k^{p+1} et ζ_k^p sont de la forme $\xi_k^{p+1} = (y_k^{p+1}, f)$ et $\zeta_k^p = (y_k^p, f)$, où y_k^p et y_k^{p+1} sont des chaînes situées dans Π. D'après nos définitions, $y_k^{p+1} = f_0\xi_k^{p+1}$ et $y_k^p = f_0\zeta_k^p$, de sorte que (3) et (7) impliquent

$$(8) \qquad \Delta y_k^{p+1} = y_k^p,$$

tandis que la formule (5) nous donne

$$f_1\zeta_k^p = f_1((\pi^n, f) \times z_k^p) = (f_1(\pi^n, f) \times z_k^p) = (f\pi^n \times z_k^p) = (x^n \times z_k^p) = z_k^p,$$

la dernière égalité étant vérifiée à une subdivision du cycle z_k^p près. Puisque, d'autre part,

$$f_1\zeta_k^p = f_1(y_k^p, f) = fy_k^p,$$

on a $fy_k^p = z_k^p$, i.e. le cycle véritable $y^p = \{y_k^p\}$ du polyèdre Π est appliqué par le ε-déplacement f dans le cycle z^p. Comme par construction des cycles y_k^p chacun des cycles y^p et z^p est situé dans le ε-voisinage de l'autre, il vient du résultat que nous venons d'obtenir l'inégalité $\mu y^p \geqslant \mu z^p - \varepsilon$. Mais un $(\alpha + \varepsilon)$-déplacement applique Π dans un polyèdre P de dimension p, et donc y^p, étant en vertu de (8) un cycle homologue à zéro dans Π, est appliqué par ce même déplacement dans un cycle non essentiel, de sorte que $\alpha + \varepsilon \geqslant \mu y^p \geqslant \mu z^p - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $\alpha \geqslant \mu z^p$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Passons à la démonstration du théorème. Le théorème étant trivialement vérifié pour $\dim \Phi = 0$, posons $\dim \Phi = r$, $0 < r \leqslant n - 1$. Choisissons dans Φ un cycle essentiel z^{r-1} de dimension $r - 1$ qui soit une frontière dans Φ. Choisissons un $\varepsilon > 0$ arbitrai-

rement petit. Puisque $\dim \Phi = r$, le diamètre de dimension r du compact $[O(\Phi, \delta)]$, pour un $\delta > 0$ suffisamment petit, est $\leqslant \varepsilon$. Choisissons maintenant un voisinage polyédral fermé $[H]$ du compact Φ situé dans $O(\Phi, \delta)$. En choisissant une orientation bien déterminée de la frontière $\mathrm{Fr}\, H$, transformons-la en cycle z_0^{n-1}. La mesure d'essentialité de ce cycle est $\leqslant \varepsilon$, puisque le diamètre de dimension r de l'ensemble tout entier H n'est pas supérieur au diamètre de dimension r de $O(\Phi, \delta)$ qui est à son tour $< \varepsilon$, car $r \leqslant n - 1$. Le cycle z_0^{n-1} est le sac cherché autour de Φ.

Il reste à démontrer qu'on a $\alpha^{r-1}\Phi_0 \geqslant \alpha$ pour chaque support Φ_0 de chaque sac z^{n-1} autour de Φ. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que z^{n-1} est un cycle d'une subdivision simpliciale W de l'espace R^n. Soit x^n une chaîne du complexe W dont la frontière est le cycle z^{n-1}. Désignons par $[Q]$ le polyèdre qui supporte la chaîne x^n. Sa frontière $\mathrm{Fr}\,[Q]$ est le plus petit support du cycle z^{n-1}. Il suffit donc de démontrer que $\alpha^{r-1}\,\mathrm{Fr}\,[Q] \geqslant \alpha$. Mais $\Phi \subseteq [Q] \setminus \mathrm{Fr}\,[Q] = Q$, puisque z^{n-1} est un sac. Maintenant l'assertion $\alpha^{r-1}\mathrm{Fr}\,[Q] \geqslant \alpha$ coïncide avec celle du lemme fondamental si l'on y pose $p = r - 1$.

Enfin, pour $\dim \Phi = n$, le compact Φ contient une boule fermée de dimension n et de rayon $\alpha > 0$. Par conséquent, nous avons $\mu z^{n-1} > \alpha$ pour chaque sac z^{n-1} autour de Φ et donc $\alpha_\Gamma^{n-2} z^{n-1} > \alpha$.

Le théorème est démontré.

§ 2. Théorème général des ceintures

1. Notions préliminaires et énoncé du théorème. Nous désignerons toujours par Φ un compact situé dans un espace euclidien R^n.

Soit x une chaîne dans R^n. Désignons par $\alpha^p x$, $p \geqslant 0$, la borne inférieure de tous les $\varepsilon > 0$ pour lesquels il existe un ε-déplacement des sommets de la chaîne x qui fait dégénérer la chaîne x en une chaîne de dimension p, i.e. qui applique tous ses simplexes dans des simplexes de dimension $\leqslant p$. Désignons par τx la borne inférieure de tous les ε pour lesquels il existe un ε-déplacement des sommets de x qui applique x dans une chaîne nulle. Il a été démontré au § 1 qu'il existe pour $\dim \Phi = r$ un tel $\gamma > 0$ que chaque sac v autour de Φ (i.e. chaque cycle de dimension $n - 1$ de $R^n \setminus \Phi$ enlacé avec tous les points de Φ) satisfait à la condition $\alpha^{r-1} v > \gamma$. Puisqu'un cycle homologue dans $R^n \setminus \Phi$ à un sac autour de Φ est lui-même un sac, le théorème des sacs est un cas particulier (pour $k = 1$) de la proposition suivante.

Théorème général des ceintures. *Soit $\Phi \subset R^n$ un compact de dimension r. Il existe un $\gamma > 0$ tel que pour chaque $k = 1, 2, \ldots, r + 1$ et chaque $\varepsilon > 0$ on trouve dans $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ un cycle v de dimension*

$n - k$ (la ceinture de dimension $n - k$ autour de Φ) qui est une frontière dans Γ si $k > 1$, pour lequel *): a) $\alpha^{r-k+1}v < \varepsilon$; b) $\tau v < \varepsilon$ *et qui possède les deux propriétés suivantes:*

1) *pour chaque cycle w homologue à v dans un γ-voisinage de ce dernier relativement à Γ on a $\alpha^{r-k}w > \gamma$;*

2) *pour chaque chaîne x qui a v pour frontière dans Γ, on a l'inégalité $\alpha^{r-k+1}x > \gamma$.*

D'autre part, si $s > r$ et $k = 1, 2, \ldots, s + 1$, alors pour tout $\gamma > 0$ chaque cycle z de dimension $n - k$ dans Γ pour lequel $\tau z < \gamma$ est homologue dans son γ-voisinage (relativement à Γ) à un certain cycle z' pour lequel $\alpha^{s-k}z'$ est arbitrairement petit. Ensuite, lorsque $s > r$ et $k = 2, 3, \ldots, s + 1$, on a pour un $\gamma > 0$ arbitraire: chaque cycle z de dimension $n - k$, qui est une frontière dans Γ et satisfait aux inégalités $\alpha^{s-k+1}z < \gamma$ (et $\tau z < \gamma$ pour $s = n - 1$) est dans Γ la frontière d'une chaîne x pour laquelle $\alpha^{s-k+1}x < \gamma$.

Remarque. La conséquence majeure du théorème général sur les ceintures est la caractérisation complète de la dimension $r = \dim \Phi$ du compact $\Phi \subset R^n$ pour chaque $k = 1, 2, \ldots, r + 1$, et non seulement pour $k = r + 1$, $k = 1$, en termes des propriétés métriques des cycles $z^{n-k} \sim 0$ situés dans $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ et des chaînes x^{n-k+1} dont ces cycles sont des frontières dans Γ.

2. Donnons une esquisse de la démonstration du théorème des ceintures.

a) *Disposition d'un compact de dimension r auprès d'une boule de dimension r.* Soit f une application essentielle d'un compact $\Phi \subset R^n$ de dimension r sur une boule T de dimension r et à frontière S. Soit $Q = Q^n$ un cube de dimension n et de frontière Q', situé à l'intérieur de Φ. Plongeons R^n dans R^{2n+1} et soit $T \subset R^{2n+1} \setminus R^n$. Prolongeons f sur tout le cube Q^n de sorte que l'application prolongée f soit identique sur Q' et que $f(Q \setminus \Phi) \subseteq R^{2n+1} \setminus T$. Approchons l'application prolongée f par une application simpliciale topologique h du cube Q dans R^{2n+1}, de sorte que l'application h soit identique sur Q. Posons $hQ = U$. Alors f se représente sous la forme $f = f_1 h$, où f_1 est un petit déplacement du polyèdre U.

Mais $f_1^{-1}S \subseteq h\Phi$ contient un cycle $z^{r-1} = \{z_i^{r-1}\}$ qui est dans $h\Phi$ la frontière d'une chaîne véritable $x^r = \{x_i^r\}$, de sorte qu'en désignant par s (respectivement par u) l'orientation de S (respectivement de U), nous avons $\Delta x_i^r = z_i^{r-1}$, $f_1 z_i^{r-1} = c_i s$, $c_i \neq 0$. Désignons par Π le prisme qu'a engendré le compact $h\Phi$ par le déplacement f_1; Π contient le prisme $\pi^r = \{\pi_i^r\}$ engendré par le même déplacement du cycle z^{r-1}.

Prenons l'intersection de la boule T par un plan R^{2n} de l'espace R^{2n+1} qui passe par le centre de la boule T perpendiculairement à un

*) On voit facilement que le théorème des obstructions est un cas particulier de ce théorème pour $k = r + 1$.

de ses rayons, et choisissons dans ce plan un sac autour de $\Pi \cap R^{2n}$, ce sac étant la frontière dans R^{2n} de la chaîne x^{2n} qui détermine l'orientation de l'espace R^{2n}. En prenant les intersections dans R^{2n+1} posons $z_i^{r-2} = x^{2n} \times z_i^{r-1}$. En posant $S' = S \cap R^{2n}$ nous trouvons facilement que $z_i^{r-2} \sim c_i s'$ dans un petit voisinage de S' et donc $z^{r-2} = \{z_i^{r-2}\}$ est un cycle essentiel. En outre, en posant $x^{n-1} = x^{2n} \times u^n$, nous obtenons $z_i^{r-2} = \Delta\,(x^{n-1} \times x_i^r)$; remarquons aussi que le cycle $z^{n-2} = \Delta x^{n-1}$ est situé en dehors de $h\Phi$.

b) *Construction* *) *de la ceinture v*. Revenons par l'homéomorphisme inverse h^{-1} dans R^n. La chaîne $h^{-1}x^{n-1}$ sera à nouveau désignée par x^{n-1} et sa frontière, par z^{n-2}; elle se trouve en dehors de Φ. L'intersection $x^{n-1} \times z^{r-1} = z^{r-2}$, envisagée maintenant dans R^n, est un cycle essentiel.

Lemme 1. *Pour chaque $\sigma > 0$ la chaîne x^{n-1} peut être remplacée par une chaîne véritable $y^{n-1} = \{y_i^{n-1}\}$, $\Delta y_i^{n-1} = \Delta x^{n-1} = z^{n-2}$ dont le support $\widetilde{y}^{n-1}$ est un compact qui coupe Φ suivant un ensemble Φ_0 de dimension $\leqslant r - 1$. Et alors y^{n-1} peut être appliqué dans x^{n-1} par un σ-déplacement.*

En effet, soit g_1 un σ-déplacement de Φ sur un polyèdre P de dimension r tel que $P \cap \widetilde{x}^{n-1}$ est un polyèdre P' de dimension $r - 1$. Il existe une rétraction sur P' d'un certain voisinage OP' suffisamment petit. Prolongeons g_1 sur tout l'espace R^n de manière à obtenir une application identique sur $\widetilde{z}^{n-2}$ et approchons l'application prolongée g_1 par une application simpliciale g qui ne fait dégénérer aucun simplexe de la triangulation et telle que $g\Phi \cap \widetilde{x}^{n-1} \subset OP'$. On peut alors imaginer l'image inverse $g^{-1}x^{n-1}$ comme une chaîne simpliciale y' pour laquelle $g\,(\Phi \cap \widetilde{y}') \subset OP'$, de sorte que (voir § 1) nous avons $\alpha^{r-1}\,(\widetilde{y}' \cap \Phi) < \sigma$.

En utilisant une seconde fois ce résultat, nous obtiendrons la démonstration du lemme. Nous supposerons σ si petit **) que pour un i suffisamment grand la mesure d'essentialité de tous les cycles véritables $z_i' = y_i^{n-1} \times z^{r-1}$ (voir § 1), relativement aux supports qui contiennent $\widetilde{y}^{n-1} \cap \widetilde{z}^{r-1}$, soit supérieure à un certain $\mu > 0$.

Choisissons $\beta > 0$, de sorte que pour chaque compact $X \subset O\,(\Phi_0, 2\beta)$, on ait $X \cap \widetilde{z}^{r-1} \subset O\left(\widetilde{y}^{n-1} \cap \widetilde{z}^{n-1}, \frac{1}{2}\mu\right)$ et choisissons

---

*) Nous allons l'effectuer pour $k = 2$; cette restriction est sans importance. Dans le cas général il faut prendre R^{2n-k+2} à la place de R^{2n}. La construction est basée sur le cycle z^{r-1}; en compliquant à peine les raisonnements, on peut prendre à sa place un cycle relatif x^r; c'est ce qu'il faut faire pour que nos raisonnements comprennent le cas $k = r + 1$ (i.e. le théorème des obstructions).

**) Nous nous réservons le droit d'exiger d'autres conditions de petitesse du nombre σ, ainsi que des nombres γ, β que nous allons introduire.

γ, $0 < \gamma < \frac{1}{2}\mu$, de manière à avoir $\alpha^{r-1}O(\Phi_0, 3\gamma) < \beta$; d'où l'on tire en particulier que $3\gamma < \beta$.

Supposons que $\varepsilon < \gamma$ sont arbitraires, en dehors des conditions imposées. Choisissons un ε-voisinage polyédral G de l'ensemble Φ_0 si petit que $\alpha^{r-1}G < \varepsilon$ et un i si grand que $\widetilde{y}_i^{n-1} \cap \Phi \subset G$. Le morceau de la chaîne y_i^{n-1} découpé par G sera désigné par u_i^{n-1}. Le cycle $v = \Delta u_i^{n-1}$ sera la ceinture cherchée.

c) *Première propriété fondamentale d'une ceinture: pour chaque* $w \sim v$ *dans* $H = O(\widetilde{v}, \gamma) \cap \Gamma$, *on a* $\alpha^{r-2}w > \gamma$.

Démonstration (par l'absurde). Supposons que le cycle w est dégénéré jusqu'à la dimension $r-2$ par le γ-déplacement ψ; on suppose, en outre, qu'aucun simplexe du prisme π^{n-1} de ce déplacement n'est dégénéré. La chaîne qui a $w - v$ pour support dans H sera désignée par ξ. Le cycle $q = u_i^{n-1} + \xi - \pi^{n-1}$ est situé dans $O(\Phi_0, 3\gamma)$ et peut être dégénéré jusqu'à la dimension $r-1$ par un β-déplacement. Désignons le prisme de ce β-déplacement par π^n; il est situé dans $O(\Phi_0, 2\beta)$. En posant $\pi^{n-1} \times z^{r-1} = \zeta^{r-2}$, nous aurons $q \times z^{r-1} = (u_i^{n-1} \times z^{r-1}) - \zeta^{r-2}$. Puisque π^n est situé dans $O(\Phi_0, 2\beta)$, on a d'après le choix de β que la chaîne véritable $\pi^n \times \times z^{r-1}$ est contenue dans $O\left(\widetilde{y}^{n-1} \cap \widetilde{z}^{r-1}, \frac{1}{2}\mu\right)$ et $\zeta^{r-2} \sim (u_i^{n-1} \times z^{r-1})$ dans $O\left(\widetilde{y}^{n-1} \cap \widetilde{z}^{r-1}, \frac{1}{2}\mu\right)$, d'où l'on tire $\mu\zeta^{r-2} > \gamma$. Effectuons maintenant un δ-déplacement topologique simplicial (pour δ suffisamment petit) du prisme π^{n-1} dans R^{2n+1}, de manière à l'appliquer sur un prisme π_0 situé sans singularités dans R^{2n+1}. Désignons le déplacement inverse par g. Il détermine une chaîne singulière (π_0, g) dont l'intersection avec z^{r-1} est un « cycle véritable singulier » (ζ_0^{r-2}, g). Mais la formule (5) du § 1 nous donne $g\zeta_0^{r-2} = \zeta^{r-2}$ et $\zeta_0^{r-2} \sim 0$ dans $\widetilde{\pi}_0$. Puisque ζ_0^{r-2} est appliqué par le δ-déplacement g dans ζ^{r-2}, nous aurons $\mu\zeta_0^{r-2} > \gamma$ pour un δ suffisamment petit, ce qui est impossible, puisque $\zeta_0^{r-2} \sim 0$ dans $\widetilde{\pi}_0$, tandis que $\widetilde{\pi}_0$ est envoyé par un γ-déplacement dans sa base de dimension $r-2$.

d) *Deuxième propriété fondamentale d'une ceinture.* Pour chaque chaîne x de frontière v dans Γ on a $\alpha^{r-1}x > \gamma'$, où γ' se définit de la manière suivante: le cycle véritable $x^{r-1} = x^{n-1} \times x$ est tel que chaque chaîne u^{r-1} de frontière $z^{r-2} = \Delta x^{r-1} = x^{n-1} \times z^{r-1}$ dans $f^{-1}S$ forme avec x^{r-1} un cycle véritable $x^{r-1} - u^{r-1}$ de mesure d'essentialité supérieure à un certain $\lambda > 0$. En choisissant σ et β suffisamment petits et tels qu'en tout cas $\sigma + 2\beta < \lambda/2$, désignons par γ' le plus petit des nombres γ et $\lambda/2$.

La deuxième propriété de la ceinture se démontre également par l'absurde. Soit ψ un γ'-déplacement de la chaîne x dans un polyèdre de dimension $r-1$. Nous avons pour le prisme π^n de ce déplacement

la relation $\Delta \pi^n = x - \pi^{n-1}$, où π^{n-1} est le prisme sur v. On démontre sans difficulté que le cycle $\zeta^{r-1} = \Delta(\pi^n \times x^r)$ est homologue à un cycle de la forme $x^{r-1} - u^{r-1}$ dans un $\lambda/2$-voisinage de ce dernier ; il a donc une mesure d'essentialité $> \lambda/2$.

Prenant tout ceci en considération, appliquons par un petit déplacement topologique le prisme π^n dans un prisme π_0^n sans singularités ; le déplacement inverse g nous donne

$$(\pi^n, g) \times x^r = (x_0^r, g) ; \quad \Delta(x_0^r, g) = (z_0^{r-1}, g) ; \quad g z_0^{r-1} = \zeta^{r-1},$$

d'où $\mu z_0^{r-1} > \lambda/2$ et, puisque $\Delta x_0^r = z_0^{r-1}$, on a $\gamma' > \lambda/2$, contrairement à l'hypothèse.

e) *Les deux dernières assertions du théorème.* Servons-nous des notations du début du paragraphe. En vertu du lemme, nous avons une chaîne u, $\Delta u = z$, située dans un γ-voisinage du cycle z et vérifiant la condition $\alpha^{s-k}(\tilde{u} \cap \Phi) < \varepsilon$, où ε est arbitraire. Le cycle cherché z' se définit comme $\Delta u'$, où u' est le morceau de u découpé par un voisinage $O(\tilde{u} \cap \Phi)$ si petit que $\alpha^{s-k} u' < \varepsilon$.

Il reste la dernière assertion. Selon ces hypothèses, il existe dans R^n une chaîne u_1, $\Delta u_1 = z$, envoyée par un γ'-déplacement, $\gamma' < \gamma$, dans un polyèdre de dimension $s - k + 1$.

Prenons un $(\gamma - \gamma')$-déplacement f de l'espace R^n en lui-même qui laisse z sur place et applique Φ dans un certain polyèdre P de dimension r, en dehors duquel z est toujours la frontière d'une certaine chaîne u_2. Choisissons une chaîne u de dimension $n - k + 2$ qui a pour frontière le cycle $u_2 - u_1$ et mettons-la en position générale avec P par un petit déplacement topologique qui est identique sur z, de sorte qu'un γ'-déplacement f_1 envoie de nouveau u dans un polyèdre de dimension $s - k + 1$. Le polyèdre $\tilde{u} \cap P$ est alors de dimension $\leqslant s - k + 1$ et possède un si petit voisinage H_1 que $\tilde{u}_2$ est en dehors de H_1, tandis que $\tilde{u}$ (envisagé comme le support d'une chaîne singulière) peut être appliqué en lui-même par un γ-déplacement f_2 qui envoie $\tilde{u}_1$ sur lui-même et $H_1 \cap \tilde{u}$, dans $P \cap \tilde{u}$, le déplacement $f_1 f_2$ sur $\tilde{u}_1$ étant toujours un γ'-déplacement.

Prenons dans l'ensemble $u \cap P$ un voisinage polyédral H_2, dont l'adhérence est contenue dans H_1, et formons la chaîne x' en soustrayant u_2 du morceau de la chaîne u situé en dehors de H_2 et de la chaîne u_2. Construisons un γ-déplacement φ de la chaîne x' dans un polyèdre de dimension $s - k + 1$ en posant $\varphi = f_2$ sur le morceau de x' situé sur la frontière de H_2, et $\varphi = f_1 f_2$ en dehors de H_1. Sur le morceau de x' situé dans $H_1 \setminus [H_2]$, construisons un déplacement intermédiaire entre f_2 et $f_1 f_2$, qui a pour image le prisme sur $f_2(\tilde{u}_1 \cap P)$ de dimension $\leqslant s - k + 1$ engendré par l'application f_1. Comme dans la démonstration du lemme, approchons le déplacement f par un déplacement simplicial f_0 ; la chaîne cherchée est $x = f_0^{-1} x'$. Le théorème est démontré.

CHAPITRE CINQ

GROUPES ET HOMOMORPHISMES DE SITUATION D'UN COMPLEXE DANS UN AUTRE. SUITES EXACTES ET LEURS HOMOMORPHISMES

§ 1. La figure K, A, G, ses groupes et ses homomorphismes ; suites exactes $\Delta(K, A, G)$ et $\nabla(K, A, G)$

1. La figure K, A, G. Soit A un sous-complexe fermé du complexe K (au § 1 de ce chapitre, K sera un complexe cellulaire quelconque). Le sous-complexe ouvert $K \setminus A$ sera désigné par G. Ces notations resteront en vigueur pendant tout ce chapitre et nous permettrons de parler de la « figure K, A, G », dont les propriétés seront étudiées dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants. Il s'agit du fait que les différentes parties de cette figure sont liées par certaines relations, à savoir les homomorphismes d'inclusion *)

$$E_K^A : L^r A \to L^r K \text{ et } E_K^G : L^r G \to L^r K,$$

qui commutent respectivement avec les opérateurs

$$\Delta \text{ et } \nabla$$

et les homomorphismes d'intersection

$$J_A^K : L^r K \to L^r A \text{ et } J_G^K : L^r K \to L^r G,$$

qui commutent respectivement avec les opérateurs

$$\nabla \text{ et } \Delta.$$

Ainsi, on définit les homomorphismes d'inclusion

$$E_K^A : \Delta^r A \to \Delta^r K \quad \text{et} \quad E_K^G : \nabla^r G \to \nabla^r K$$

et d'intersection

$$J_A^K : \nabla^r K \to \nabla^r A \quad \text{et} \quad J_G^K : \Delta^r K \to \Delta^r G$$

qui opèrent déjà dans les groupes d'homologie et de cohomologie respectifs et engendrent de nouveaux groupes — les images et les noyaux, liés à la figure K, A, G.

*) Partout dans ce chapitre, le groupe de coefficients est arbitraire, mais fixe.

Les homomorphismes d'inclusion et d'intersection sont les « homomorphismes de situation » principaux ou « homomorphismes de la figure K. A, G ». En les combinant avec les homomorphismes Δ et ∇, nous obtenons de nouveaux homomorphismes

$$J_A^K \Delta E_K^G\colon L^r G \to L^{r-1} A \quad \text{et} \quad J_G^K \nabla E_K^A\colon L^{r-1} A \to L^r G,$$

qui seront brièvement désignés par $\partial = J_A^K \Delta E_K^G$ et $\delta = J_G^K \nabla E_K^A$ et seront également rapportés aux homomorphismes de la figure K, A, G.

Démontrons avant tout que les opérateurs ∂ et δ induisent également des homomorphismes des groupes d'homologie et de cohomologie correspondants, à savoir les homomorphismes

$$\partial\colon \Delta^r G \to \Delta^{r-1} A \quad \text{et} \quad \delta\colon \nabla^{r-1} A \to \nabla^r G.$$

Il suffit de démontrer pour cela que les opérateurs ∂ et δ commutent (au signe près) avec les opérateurs Δ et ∇. Autrement dit, il suffit de démontrer les relations

$$(1_\Delta) \qquad \Delta_A (J_A^K \Delta E_K^G) x_G = -(J_A^K \Delta E_K^G) \Delta_G x_G$$

pour chaque chaîne x_G du complexe G et

$$(1_\nabla) \qquad \nabla_G (J_G^K \nabla E_K^A) x_A = -(J_G^K \nabla E_K^A) \nabla_A x_A$$

pour chaque chaîne x_A du complexe A.

Il suffit de démontrer une de ces deux relations. L'autre se démontre d'une manière tout à fait analogue. Ainsi, démontrons la formule (1_Δ). Il est clair que $\Delta E_K^G x_G = E_K^G \Delta_G x_G + y_A$, où la chaîne y_A est située sur A. En substituant cette expression dans l'identité évidente $0 = J_A^K \Delta\Delta E_K^G x_G$, nous obtenons $0 = J_A^K \Delta E_K^G \Delta_G x_G + J_A^K \Delta y_A$. La chaîne y_A est située sur A et donc, en vertu de la remarque 1 du chapitre 1, p. 32, on a

$$J_A^K \Delta y_A = \Delta_A J_A^K y_A \quad \text{et} \quad 0 = J_A^K \Delta E_K^G \Delta_G x_G + \Delta_A J_A^K y_A.$$

Mais $J_A^K y_A = J_A^K (\Delta E_K^G x_G - E_K^G \Delta_G x_G)$ et $J_A^K E_K^G \Delta_G x_G = 0$, de sorte que $J_A^K y_A = J_A^K \Delta E_K^G x_G$, d'où $0 = J_A^K \Delta E_K^G \Delta_G x_G + \Delta_A J_A^K \Delta E_K^G x_G$, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, les groupes d'homologie et de cohomologie des complexes K, A, G sont liés non seulement par les homomorphismes d'inclusion et d'intersection, mais aussi par les homomorphismes

$$\partial \equiv J_A^K \Delta E_K^G\colon \Delta^r G \to \Delta^{r-1} A \quad \text{et} \quad \delta \equiv J_G^K \nabla E_K^A\colon \nabla^{r-1} A \to \nabla^r G.$$

Par conséquent, nous avons les deux (Δ- et ∇-) suites de groupes et d'homomorphismes de la figure K, A, G:

$$\Delta(K, A, G)\colon \ldots \to \Delta^{r+1} G \xrightarrow{\partial} \Delta^r A \xrightarrow{E_K^A} \Delta^r K \xrightarrow{J_G^K} \Delta^r G \xrightarrow{\partial} \xrightarrow{\partial} \Delta^{r-1} A \to \ldots \Delta^0 G$$

et

$$\nabla(K, A, G): \ldots \leftarrow \nabla^{r+1}G \xleftarrow{\delta} \nabla^r A \xleftarrow{J_A^K} \nabla^r K \xleftarrow{E_K^G}$$

$$\xleftarrow{E_K^G} \nabla^r G \xleftarrow{\delta} \nabla^{r-1}A \leftarrow \ldots \nabla^0 G.$$

Un fait important de la théorie homologique des complexes est le

Théorème fondamental 1. *Chacune des suites* $\Delta(K, A, G)$ *et* $\nabla(K, A, G)$ *est* ***exacte***, *i.e. dans chacune de ces suites l'image de l'homomorphisme précédent coïncide avec le noyau du suivant* *):

$$\operatorname{Im}\partial = \operatorname{Ker} E_K^A, \quad \operatorname{Im} E_K^A = \operatorname{Ker} J_G^K, \quad \operatorname{Im} J_G^K = \operatorname{Ker}\partial$$

et

$$\operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Im} J_A^K, \quad \operatorname{Ker} J_A^K = \operatorname{Im} E_K^G, \quad \operatorname{Ker} E_K^G = \operatorname{Im}\delta.$$

Commençons la démonstration par les égalités **)

$$\operatorname{Ker} J_A^K = \operatorname{Im} E_K^G \text{ et } \operatorname{Ker} J_G^K = \operatorname{Im} E_K^A. \tag{2}$$

Il suffit de démontrer la première égalité, la deuxième étant analogue.

a) Soit $\zeta \in \operatorname{Im} E_K^G \subseteq \nabla^r K$. Démontrons que $\zeta \in \operatorname{Ker} J_A^K$, i.e. $J_A^K\zeta = 0_A$ (où par 0_A nous désignons l'élément neutre du groupe $\nabla^r A$).

Puisque $\zeta \in \operatorname{Im} E_K^G$, la classe ζ contient le cocycle z_G^r (du complexe K) situé sur G. Mais alors $J_A^K z_G^r = 0$, i.e. $J_A^K\zeta = 0$; l'inclusion $\operatorname{Im} E_K^G \subseteq \operatorname{Ker} J_A^K$ est démontrée.

b) Soit $\zeta \in \operatorname{Ker} J_A^K \subseteq \nabla^r K$; démontrons qu'alors $\zeta \in \operatorname{Im} E_K^G$. Choisissons à nouveau un cocycle quelconque $z \in \zeta$. Il faut démontrer que $z = z_G + h$, où $h \in H_\nabla^r K$ et $J_A^K z_G = 0$ (i.e. que le cocycle z_G est situé sur G).

---

*) Jusqu'ici nous n'avons pas eu l'occasion, dans notre livre, de nous servir des notations, devenues usuelles, $\operatorname{Im} f = fX$, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}0$ pour tout homomorphisme f du groupe X dans un groupe quelconque.

**) Comme nous l'avons déjà mentionné, les homomorphismes d'inclusion et d'intersection ont été tout d'abord introduits par P. Alexandrov dans la *Théorie générale de l'homologie* (Notes scientifiques de l'Université de Moscou, 45 (1940), pp. 3-60, traduction anglaise dans Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), 41-105). Les homomorphismes ∂ et δ y sont également introduits et appliqués à la démonstration du théorème de dualité d'Alexander-Kolmogorov pour la figure K, A, G. Le développement ultérieur de la théorie, qui contient (à quelques changements de notation près) en particulier tous les résultats exposés aux deux premiers paragraphes de ce chapitre, est contenu dans le chapitre 1 de l'article de P. Alexandrov, *Sur les propriétés homologiques de situation des complexes et des ensembles fermés* (Izvestia Acad. Scien., U.R.S.S., série math. 6 (1942), pp. 227-281, traduction anglaise *Homological Situation Properties of Complexes and Closed Sets* dans Trans. Amer. Math. Soc. 54, n°2 (1943), p. 286-339).

Evidemment

$$z = E_K^A J_A^K z + E_K^G J_G^K z.$$

Par hypothèse, $J_A^K \zeta = 0$, i.e. $J_A^K z \in H_\nabla^r A$ et donc $J_A^K z = \nabla y_A$, où $y_A \in L^{r-1} A$.

Considérons le cocycle $z_G = z - \nabla E_K^A y_A$; on a pour z_G

$$J_A^K z_G = J_A^K (z - \nabla E_K^A y_A) = J_A^K z - (J_A^K \nabla) E_K^A y_A = J_A^K z - (\nabla J_A^K) E_K^A y_A = \\ = J_A^K z - \nabla y_A = 0.$$

Ainsi $J_A^K z_G = 0$. En posant $h = \nabla E_K^A y_A \in H_\nabla^r K$, nous obtiendrons la première des identités (2). Les formules (2) sont démontrées.

Démontrons maintenant les égalités

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} E_K^A \text{ et } \operatorname{Im} J_A^K = \operatorname{Ker} \delta,$$

en nous limitant à nouveau à la première.

a) Soit $\zeta_A \in \operatorname{Im} \partial \subseteq \Delta^r A$. Cela signifie que la classe ζ_A contient un cycle $z_A \in Z^r A$ tel que $z_A = J_A^K \Delta E_K^G y_G$ pour un certain cycle $y_G \in Z^{r+1} G$.

Puisque y_G est un cycle de G, la chaîne $\Delta E_K^G y_G$ est située sur A et donc

$$E_K^A z_A = E_K^A (J_A^K \Delta E_K^G y_G) = \Delta E_K^G y_G \in H^r K,$$

i.e. $E_K^A \zeta_A = 0$. Ainsi $\zeta_A \in \operatorname{Ker} E_K^A$ et l'inclusion $\operatorname{Im} \partial \subseteq \operatorname{Ker} E_K^A$ est démontrée.

b) Soit $\zeta_A \in \operatorname{Ker} E_K^A$. Cela signifie que la classe ζ_A contient un cycle z_A tel que $E_K^A z_A \in H^r K$, i.e. $E_K^A z_A = \Delta y$ pour une certaine chaîne $y \in L^{r+1} K$. La chaîne $\Delta y = E_K^A z_A$ est située sur A, donc $\Delta J_G^K y = J_G^K \Delta y = 0$, i.e. la chaîne $J_G^K y$ est un cycle de G et

$$J_A^K E_K^A z_A = z_A = J_A^K \Delta y = J_A^K \Delta (E_K^G J_G^K y) + J_A^K \Delta (E_K^A J_A^K y).$$

En vertu de la remarque 1 (chap. 1, p. 32) mentionnée plus haut, on a

$$J_A^K \Delta (E_K^A J_A^K y) = \Delta_A J_A^K (E_K^A J_A^K y) = \Delta J_A^K y,$$

de sorte que $z_A = J_A^K \Delta E_K^G (J_G^K y) + \Delta J_A^K y = \partial (J_G^K y) + \Delta J_A^K y$. Par conséquent, $\xi_A = \partial (\xi)$, où $\xi \ni J_G^K y$. Ainsi, $\operatorname{Im} \partial \supseteq \operatorname{Ker} E_K^A$. La deuxième égalité se démontre d'une manière analogue. Les égalités (3) sont démontrées.

Démontrons enfin

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{Im} J_G^K = \operatorname{Ker} \partial \text{ et } \operatorname{Im} \delta = \operatorname{Ker} E_K^G.$$

Comme précédemment, démontrons seulement la première égalité.

a) Soit $\xi_G \in \operatorname{Im} J_G^K \subseteq \Delta^r G$. Cela signifie que la classe ξ_G contient le cycle $z_G = J_G^K y$ pour un certain cycle y du complexe K. Alors

$$\partial \xi_G \ni J_A^K \Delta E_K^G z_G = J_A^K \Delta E_K^G J_G^K y.$$

En ajoutant et en soustrayant $J_A^K \Delta E_K^A J_A^K y$, transformons le deuxième membre en

$$J_A^K \Delta (E_K^G J_G^K y + E_K^A J_A^K y) - J_A^K \Delta E_K^A J_A^K y =$$
$$= J_A^K \Delta y - J_A^K (E_K^A \Delta_A J_A^K y) = -\Delta_A J_A^K y.$$

Donc, $\partial \xi_G \ni -\Delta_A J_A^K y$, i.e. $\partial \xi_G = 0$, $\xi_G \in \operatorname{Ker} \partial$ et nous avons démontré que $\operatorname{Im} J_A^K \subseteq \operatorname{Ker} \partial$.

b) Supposons maintenant que $\xi_G \in \operatorname{Ker} \partial \subseteq \Delta^r G$. Cela signifie que la classe ξ_G contient un cycle z_G (du complexe G) tel que $J_A^K \Delta E_K^G z_G = \Delta_A y_A$ pour une certaine chaîne y_A du complexe A.

Il faut démontrer que $\xi_G \in \operatorname{Im} J_G^K$; pour cela, il suffit d'établir que pour un certain cycle x du complexe K on a $z_G = J_G^K x$.

Posons

$$x = E_K^G z_G - E_K^A y_A.$$

Puisque $E_K^A y_A$ est situé sur A, on a $J_G^K x = z_G$ et il reste donc à démontrer que la chaîne x est un cycle (du complexe K).

Calculons

$$\Delta x = \Delta E_K^G z_G - \Delta E_K^A y_A = \Delta E_K^G z_G - E_K^A \Delta_A y_A.$$

Mais

$$\Delta_A y_A = J_A^K \Delta E_K^G z_G.$$

Donc

$$\Delta x + \Delta E_K^G z_G = E_K^A J_A^K \Delta E_K^G z_G.$$

Puisque z_G est un cycle du complexe G, $\Delta E_K^G z_G$ est situé sur A (voir la remarque 5 du chapitre 1, p. 33) et donc

$$E_K^A J_A^K \Delta E_K^G z_G = \Delta E_K^G z_G,$$

de sorte que

$$\Delta x = \Delta E_K^G z_G - \Delta E_K^G z_G = 0,$$

et tout est démontré.

2. Première formulation des résultats obtenus; relations de dualité. Introduisons maitenant les notations suivantes:

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta^r(A:K) = \operatorname{Ker} E_K^A \subseteq \Delta^r A, \\ \Delta^r KA = \operatorname{Im} E_K^A \subseteq \Delta^r K, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^r(G:K) = \operatorname{Ker} E_K^G \subseteq \nabla^r G, \\ \nabla^r KG = \operatorname{Im} E_K^G \subseteq \nabla^r K, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^r AK = \operatorname{Im} J_A^K \subseteq \nabla^r A, \\ \Delta^r GK = \operatorname{Im} J_G^K \subseteq \Delta^r G \end{cases}$$

et enfin

$$(5')\qquad \begin{cases} \nabla^r A - \nabla^r AK = \nabla^r(A:K), \\ \Delta^r G - \Delta^r GK = \Delta^r(G:K). \end{cases}$$

(Evidemment, $\nabla^r(A:K) = \operatorname{Im}\delta$, $\Delta^r(G:K) = \operatorname{Im}\partial$.)

R e m a r q u e 1. Pour $\Delta^r K = 0$ (respectivement pour $\nabla^r K = 0$), nous avons $\Delta^r(A:K) = \Delta^r A$ (respectivement $\nabla^r(G:K) = \nabla^r G$).

Les groupes (5) et (5′) s'appellent « *groupes de la figure* K, A, G ».

En nous servant des notations introduites, nous pouvons envisager le diagramme suivant:

$$(6)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \Delta^r A \supseteq \Delta^r(A:K) \arrow[d, "E_K^A"'] \arrow[r] & \nabla^r AK \subseteq \nabla^r A \\ \Delta^r K \supseteq \Delta^r KA \arrow[d, "J_G^K"'] \arrow[r] & \nabla^r KG \subseteq \nabla^r K \arrow[u, "J_A^K"'] \\ \Delta^r G \supseteq \Delta^r GK \arrow[d, "\partial"'] \arrow[r] & \nabla^r(G:K) \subseteq \nabla^r G \arrow[u, "E_K^G"'] \\ \Delta^{r-1} A \supseteq \Delta^{r-1}(A:K) & \nabla^{r-1} AK \subseteq \nabla^{r-1} A \arrow[u, "\delta"'] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Commençons son étude plus détaillée en considérant les groupes $\Delta^r(A:K)$ et $\nabla^r(G:K)$. Identifiant les cycles $z_A^r \in Z_\Delta^r A$ avec les cycles $E_K^A z_A^r \in Z_\Delta^r K$, on peut considérer le groupe $Z_\Delta^r A$ comme un sous-groupe du groupe $Z_\Delta^r K$. De même, en identifiant les cocycles $z_G^r \in Z_\Delta^r G$ avec les cocycles $E_K^G z_G^r$, on peut identifier le groupe $Z_\nabla^r G$ avec un sous-groupe du groupe $Z_\nabla^r K$. Le groupe $Z_\Delta^r A$ contient le sous-groupe $Z_\Delta^r A \cap H_\Delta^r K$ consistant des cycles du complexe A homologues à zéro dans K avec évidemment

$$H_\Delta^r A \subseteq Z_\Delta^r A \cap H_\Delta^r K.$$

Le groupe quotient $(Z_\Delta^r A \cap H_\Delta^r K) - H_\Delta^r A$ est le groupe $\Delta^r(A:K)$.

Exactement de même, le groupe $\nabla^r(G:K)$ peut être défini comme groupe quotient du groupe $Z^r_\nabla G \cap H^r_\nabla K$ par le sous-groupe $H^r_\nabla G$.

Passons aux groupes $\nabla^r AK$ et $\Delta^r GK$. Appelons le cocycle z^r_A du complexe A (respectivement le cycle z^r_G du complexe G) *prolongeable* s'il existe un cocycle z^r (respectivement un cycle z^r) du complexe K tel que $z^r_A = J^K_A z^r$ (respectivement $z^r_G = J^K_G z^r$). Les cocycles z^r_A (respectivement les cycles z^r_G) prolongeables forment un sous-groupe $C^r_\nabla AK \subseteq Z^r_\nabla A$ (respectivement $C^r_\Delta GK \subseteq Z^r_\Delta G$). On a alors $H^r_\nabla A \subseteq C^r_\nabla AK$, $H^r_\Delta G \subseteq C^r_\Delta GK$.

En effet, soit $h^r_A \in H^r_\nabla A$. Alors

$$h^r_A = \nabla_A x^{r-1}_A, \quad x^{r-1}_A \in L^{r-1}A.$$

Posons

$$x^{r-1} = E^A_K x^{r-1}_A.$$

Alors

$$J^K_A \nabla x^{r-1} = \nabla_A J^K_A x^{r-1} = \nabla_A x^{r-1}_A = h^r_A,$$

i.e. h^r_A est un cocycle prolongeable,

$$h^r_A \in C^r_\nabla AK \quad \text{et} \quad H^r_\nabla A \subseteq C^r_\nabla AK.$$

On démontre de même l'inclusion $H^r_\Delta G \subseteq C^r_\Delta GK$.

On établit facilement les isomorphismes

$$\nabla^r AK = C^r_\nabla AK - H^r_\nabla A,$$

$$\Delta^r GK = C^r_\Delta GK - H^r_\Delta G.$$

Enfin, les groupes $\nabla^r(A:K)$ et $\Delta^r(G:K)$ peuvent être définis par les isomorphismes

$$\nabla^r(A:K) = Z^r_\nabla A - C^r_\nabla AK,$$

$$\Delta^r(G:K) = Z_\Delta G - C^r_\Delta GK.$$

La démonstration peut être laissée au lecteur.

Le fait élémentaire fondamental concernant la notion d'homomorphisme f d'un groupe X dans un groupe Y est l'existence de l'isomorphisme naturel (tout d'abord énoncé par Emmi Nœther en 1926 *))

$$X - \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.$$

En l'appliquant aux homomorphismes $\delta: \nabla^{r-1}A \to \nabla^r G$ et $\partial: \Delta^{r+1}G \to \Delta^r A$ et en se rappelant que

$$\operatorname{Ker} \delta = \operatorname{Im} J^K_A = \nabla^{r-1}AK, \ \operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} J^K_G = \Delta^r GK,$$

*) Aujourd'hui cet isomorphisme semble évident; il y a un demi-siècle, ce résultat était une vraie découverte qui réforma les démonstrations usuelles de nombreux théorèmes d'algèbre.

nous obtenons

$$\nabla^{r-1}A - \nabla^{r-1}AK = \operatorname{Im}\delta = \operatorname{Ker} E_K^G = \nabla^r(G:K),$$

i.e.

$$(7_\nabla) \qquad \nabla^{r-1}(A:K) = \nabla^r(G:K)$$

et d'une manière analogue

$$(7_\Delta) \qquad \Delta^r(G:K) = \Delta^{r-1}(A:K).$$

Si le complexe K est *acyclique en dimension* r, i.e. $\Delta^r K = 0$ et donc $\nabla^r K = 0$, comme nous avons vu, nous aurons

$$\Delta^r(A:K) = \Delta^r A, \quad \nabla^r(G:K) = \nabla^r G.$$

Par conséquent, si le complexe K est acyclique en dimensions r et $r-1$, les isomorphismes (7_Δ), (7_∇) se transforment dans les isomorphismes d'Alexander-Kolmogorov, à savoir

$$\Delta^{r-1}A = \Delta^r G, \quad \nabla^{r-1}A = \nabla^r G.$$

Remarque 2. Initialement Alexander considérait le cas où K est une variété acyclique en dimensions r et $r-1$, en particulier la sphère S^n (dans ce cas il faut prendre les groupes $\Delta^{00}K$, $\Delta^{00}G$ à la place de $\Delta^0 K$, $\Delta^0 G$). Alors, d'après la dualité de Poincaré $\Delta^r G = \Delta^{n-r}G$, et nous obtenons la dualité classique d'Alexander: $\Delta^{r-1}A = \Delta^{n-r}G$.

Supposons maintenant que les ∇- et Δ-groupes ont pour coefficients deux groupes duaux $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$. Puisque les opérateurs E_K^A et J_A^K ainsi que E_K^G et J_G^K sont duaux, on peut appliquer le lemme fondamental des homomorphismes duaux (voir le Supplément au chapitre 1 et compléter le diagramme (6) de manière à obtenir

$$(6_0) \qquad \begin{tikzcd}
\Delta^r A \supseteq \Delta^r(A:K) \arrow[d, "E_K^A"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \nabla^r AK \subseteq \nabla^r A \arrow[d, dash] \\
\Delta^r K \supseteq \Delta^r KA \arrow[d, "J_G^K"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \nabla^r KG \subseteq \nabla^r K \arrow[d, dash] \\
\Delta^r G \supseteq \Delta^r GK \arrow[d, "\partial"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \nabla^r(G:K) \subseteq \nabla^r G \arrow[d, dash] \\
\Delta^{r-1}A \supseteq \Delta^{r-1}(A:K) \arrow[r, phantom, "\perp"] & \nabla^{r-1}AK \subseteq \nabla^{r-1}A
\end{tikzcd}$$

où, comme toujours, le trait incliné désigne la dualité, tandis que $\perp$ est le symbole d'annulation. En outre, nous avons les dualités

$$\Delta^r(A:K) \mid (\nabla^r A - \nabla^r AK),$$
$$\nabla^r(G:K) \mid (\Delta^r G - \Delta^r GK),$$

i.e.

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta^r(A:K) \mid \nabla^r(A:K), \\ \Delta^r(G:K) \mid \nabla^r(G:K). \end{cases}$$

En plus de la dualité (8), le diagramme (6_0) contient aussi les dualités

$$\Delta^r KA \mid \nabla^r AK;\ \Delta^r GK \mid \nabla^r KG.$$

Remarque 3. Nous définirons au chapitre 6 les groupes $\Delta^r X$ et $\nabla^r X$ pour tout bicompact X, respectivement pour un groupe de coefficients $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ bicompact et discret; au même chapitre nous définirons pour chaque ensemble fermé $A \subseteq X$ les homomorphismes d'inclusion

$$E_X^A : \Delta^r A \to \Delta^r X$$

et d'intersection

$$J_A^X : \nabla^r X \to \nabla^r A.$$

Les groupes $\Delta^r X$ et $\nabla^r X$ peuvent être définis également pour des X localement bicompacts, i.e. pour les ensembles ouverts $G = X \setminus A$ des bicompacts X. Il s'avère alors possible de définir les homomorphismes

$$E_K^G :\ \nabla^r G \to \nabla^r X,$$

$$J_G^K :\ \Delta^r X \to \Delta^r G.$$

Alors tous les groupes de la figure X, A, G se déterminent par les formules (5) et (5′) et toutes les relations du diagramme (6_0) restent en vigueur si l'on y remplace respectivement K, A, G par X, A, G.

§ 2. Homomorphismes des suites exactes induits par les applications simpliciales des complexes

1. Homomorphismes f_G et $\bar{f}_G$ induits par l'application simpliciale f. Dans ce numéro nous allons considérer une application simpliciale f du complexe K dans le complexe K' telle qu'on ait, pour les sous-complexes ouverts $G \subseteq K$ et $G' \subseteq K'$, la relation suivante

$$(1)\qquad G'' = f^{-1}G' \subseteq G.$$

Lorsque $A = K \setminus G$ et $A' = K' \setminus G'$, la relation (1) équivaut à la relation

$$(2)\qquad fA \subseteq A'.$$

Définition. Posons

$$(3)\qquad f_G \equiv J_{G'}^{K'} f E_K^G :\ L^r G \to L^r G'.$$

Lemme 1. *On a la relation*

$$f_G\Delta_G = \Delta_{G'}f_G. \tag{4}$$

Commençons par la

Remarque 1. Si la chaîne $x \in L^rK$ est située sur $K \setminus f^{-1}G' = A''$ (i.e. sur $f^{-1}A'$), il est évident que fx est située sur A' (i.e. $J^{K'}_{G'}fx = 0$).

Démonstration du lemme 1. Considérons une chaîne quelconque $x \in L^rG$. Pour elle

$$\Delta_{G'}f_{G'}x = \Delta_{G'}J^{K'}_{G'}fE^G_Kx = J^{K'}_{G'}\Delta fE^G_Kx\,^{*)} = J^{K'}_{G'}f\Delta E^G_Kx =$$
$$= J^{K'}_{G'}f\,(E^{G''}_K J^K_{G''}\Delta E^G_Kx + E^{A''}_K J^K_{A''}\Delta E^G_Kx).$$

D'après la remarque 1, $J^{K'}_{G'}fE^{A''}_K J^K_{A''}\Delta E^G_Kx = 0$, de sorte que

$$\Delta_{G'}f_Gx = J^{K'}_{G'}fE^{G''}_K J^K_{G''}\Delta E^G_Kx = J^{K'}_{G'}fE^G_KE^{G''}_G J^K_{G''}\Delta E^G_Kx =$$
$$= f_GE^{G''}_G J^K_{G''}\Delta E^G_Kx = f_GE^{G''}_G\Delta_{G''}J^K_{G''}E^G_Kx = f_GE^{G''}_G\Delta_{G''}J^G_{G''}x =$$
$$= f_GE^{G''}_G J^G_{G''}\Delta_Gx\,^{**)} = J^{K'}_{G'}fE^G_KE^{G''}_G J^G_{G''}\Delta_Gx = J^{K'}_{G'}fE^{G''}_K J^G_{G''}\Delta_Gx.$$

En vertu de la remarque 1, nous avons $J^{K'}_{G'}fE^{A''}_K J^K_{A''}E^G_K\Delta_Gx = 0$, de sorte que

$$\Delta_{G'}f_Gx = J^{K'}_{G'}fE^{G''}_K J^G_{G''}\Delta_Gx + J^{K'}_{G'}fE^{A''}_K J^K_{A''}E^G_K\Delta_Gx =$$
$$= J^{K'}_{G'}f\,(E^{G''}_K J^K_{G''}E^G_K\Delta_Gx + E^{A''}_K J^K_{A''}E^G_K\Delta_Gx) = J^{K'}_{G'}fE^G_K\Delta_Gx = f_G\Delta_Gx.$$

Le lemme 1 est démontré.

On en tire que les homomorphismes $f_G\colon L^rG \to L^rG'$ engendrent des homomorphismes des groupes Δ^rG dans les groupes Δ^rG', $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$; ils seront appelés *homomorphismes induits par l'application simpliciale f et désignés* par f_G (ou par fG).

Définissons maintenant les homomorphismes $\overline{f}_G\colon L^rG' \to L^rG$ duaux aux homomorphismes f_G.

Posons pour chaque chaîne $y \in L^rG'$ et chaque simplexe $t \in G$ de dimension r:

$$(\overline{f}_Gy,\ t) = (y,\ f_Gt). \tag{5}$$

Lemme 2. *Nous avons*

$$\nabla_G\overline{f}_G = \overline{f}_G\nabla_{G'}:\quad L^rG' \to L^rG. \tag{6}$$

Démonstration. Il est clair de la définition de l'homomorphisme $\overline{f}_G$ que l'on a $(\overline{f}_Gy,\ x) = (y,\ f_Gx)$ pour chaque chaîne

*) Voir théorème 5, § 3, chap. 1.
**) Voir théorème 5, § 3, chap. 1.

$y \in L^rG'$ et chaque chaîne $x \in L^rG$. En prenant en considération la formule (7) (chapitre 1, p. 28), nous pouvons écrire

$$(\nabla_G \overline{f}_G y,\ t^{r+1}) = (\overline{f}_G y,\ \Delta_G t^{r+1}) = (y,\ f_G \Delta_G t^{r+1}) = (y,\ \Delta_{G'} f_G t^{r+1}) =$$
$$= (\nabla_{G'} y,\ f_G t^{r+1}) = (\overline{f}_{G'} \nabla_{G'} y,\ t^{r+1})$$

pour tout simplexe $t^{r+1} \in G$ de dimension $r+1$. Le lemme 2 est démontré.

Il en découle que les homomorphismes

$$\overline{f}_G\colon L^rG' \to L^rG,\ r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

engendrent des homomorphismes des groupes ∇^rG' dans les groupes ∇^rG, $r = 0, 1, 2, \ldots$, qui seront appelés *homomorphismes duaux aux homomorphismes* f_G et désignés par $\overline{f}_G$ (ou par $\overline{fG}$).

Remarque 2. Supposons que dans les complexes K, K' et K'' on se donne des sous-complexes ouverts G, G' et G'' respectivement et les applications simpliciales

$$f\colon K \to K' \text{ et } g\colon K' \to K''$$

qui vérifient les conditions

$$g^{-1}G'' \subseteq G' \quad \text{et} \quad f^{-1}G' \subseteq G;$$

alors pour l'application $h = gf\colon K \to K''$ on a les relations

$$h_G = g_{G'} f_G\colon L^rG \to L^rG'' \text{ et } \overline{h}_G = \overline{f}_G \overline{g}_{G'}\colon L^rG'' \to L^rG.$$

Démonstration. On a

$$h_G = J^{K''}_{G''} h E^G_K = J^{K''}_{G''} g f E^G_K = J^{K''}_{G''} g E^{G'}_{K'} J^{K'}_{G'} f E^G_K + J^{K''}_{G''} g E^{A'}_{K'} J^{K'}_{A'} f E^G_K\ ^{*)} =$$
$$= g_{G'} f_G + 0\ ^{**)} = g_{G'} f_G,$$

d'où l'on déduit immédiatement, en se servant de la définition des homomorphismes $\overline{h}_G$, $\overline{f}_G$ et $\overline{g}_{G'}$, la relation $\overline{h}_G = \overline{f}_G \overline{g}_{G'}$.

Lemme 3. *Supposons que les applications simpliciales* $f_0\colon K \to K'$ *et* $f_1\colon K \to K'$ *sont combinatoirement proches et, comme précédemment,* $f_0^{-1}G' \subseteq G$, $f_1^{-1}G' \subseteq G$. *Supposons, en outre, que les applications* $f_{0A} = f_0\colon A \to A'$, $f_{1A} = f_1\colon A \to A'$, *où* $A = K \setminus G$, $A' = K' \setminus G'$ *sont également combinatoirement proches. Alors les homomorphismes* $f_{0G}\colon \Delta^rG \to \Delta^rG'$ *et* $f_{1G}\colon \Delta^rG \to \Delta^rG'$, *respectivement* $\overline{f}_{0G}\colon \nabla^rG' \to \nabla^rG$ *et* $\overline{f}_{1G}\colon \nabla^rG' \to \nabla^rG$ *coïncident deux à deux.*

---

*) Ici $A' = K' \setminus G'$.

**) Voir remarque 1; 0 désigne, bien entendu, l'application nulle.

D é m o n s t r a t i o n. Prenons deux copies K_0 et K_1 du complexe K avec les copies respectives G_0 et G_1 du sous-complexe G et choisissons sur celles-ci deux copies z_0 et z_1 du cycle $z \in Z^r_\Delta G$. Appliquons les complexes K_0 et K_1 dans K' respectivement par f_0 et f_1. Choisissons une numération quelconque des sommets du complexe K, et donc des complexes K_0 et K_1, et envisageons le prisme Π de bases K_0 et K_1. Il découle du fait que les applications f_0 et f_1, f_{0A} et f_{1A} sont combinatoirement proches que l'on peut prolonger ces applications à une application simpliciale $f\colon \Pi \to K'$ telle que $f(\Pi_A) \subseteq A'$, où Π_A est le prisme sur A naturellement situé dans Π. Ainsi,

$$r^{-1}G' \subseteq \Pi_G,$$

où Π_G désigne le prisme sur G situé dans Π (voir § 4 du chapitre 2). Puisque la frontière $\Delta E^G_K z$ est située sur A, alors $\Pi\Delta E^{G_0}_{K_0} z_0$ est situé sur Π_A, et donc (voir remarque 1) $J^{K'}_{G'} f \Pi \Delta E^{G_0}_{K_0} z_0 = 0$. On en déduit (voir p. 111, formule (1)) que

$$\Delta_{G'} J^{K'}_{G'} f \Pi E^{G_0}_{K_0} z_0 = J^{K'}_{G'} f \Delta \Pi E^{G_0}_{K_0} z_0 = J^{K'}_{G'} f(-\Pi\Delta E^{G_0}_{K_0} z_0 + E^{G_0}_{K_0} z_0 - E^{G_1}_{K_1} z_1) =$$
$$= J^{K'}_{G'} f E^{G_0}_{K_0} z_0 - J^{K'}_{G'} f E^{G_1}_{K_1} z_1 = J^{K'}_{G'} f_0 E^G_K z - J^{K'}_{G'} f_1 E^G_K z = f_{0G} z - f_{1G} z.$$

L'homologie entre les cycles $f_{0G}z$ et $f_{1G}z$ est démontrée et donc aussi le fait que les homomorphismes f_{0G} et f_{1G} coïncident.

Démontrons que les homomorphismes $\bar{f}_{0G}$ et $\bar{f}_{1G}$ coïncident.

Choisissons un cocycle $z^r \in Z^r_\nabla G'$. Comme nous l'avons déjà remarqué, $f^{-1}G' \subseteq \Pi_G$. Par conséquent, on a l'homomorphisme $\bar{f}_G\colon \nabla^r G' \to \nabla^r \Pi_G$. La chaîne x^{r-1} du sous-complexe G pour laquelle $\nabla_G x^{r-1} = \bar{f}_{0G} z^r - \bar{f}_{1G} z^r$ se construit de même que dans le théorème 5_∇ du chapitre 2, p. 112 : pour chaque simplexe orienté t^{r-1} de G nous posons

$$(x^{r-1}, t^{r-1}) = (\bar{f}_G z^r, \Pi t^{r-1}).$$

Le fait que $\nabla_G x^{r-1} = \bar{f}_{0G} z^r - \bar{f}_{1G} z^r$ se démontre de la même manière que dans le théorème cité 5_∇. Fixons un simplexe t^r de G. Nous aurons pour lui

$$\text{(a)}\quad (\nabla_G x^{r-1}, t^r) = (x^{r-1}, \Delta_G t^r)\ ^{*)} = \sum_{\substack{t^{r-1} < t^r \\ t^{r-1} \in G}} (t^r : t^{r-1})(x^{r-1}, t^{r-1}) =$$
$$= \sum_{\substack{t^{r-1} < t^r \\ t^{r-1} \in G}} (t^r : t^{r-1})(\bar{f}_G z^r, \Pi t^{r-1});$$

*) Voir chapitre 1, p. 28, formule (7).

$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\quad & ((\bar{f}_{0G}z^r - \bar{f}_{1G}z^r),\ t^r) = (z^r,\ (f_{0G}t^r - f_{1G}t^r)) = \\
& = (z^r,\ (J^{K'}_{G'} f_0 E^G_K t^r - J^{K'}_{G'} f_1 E^G_K t^r)) = (z^r,\ J^{K'}_{G'}\,(f_0 E^{G_0}_{K_0} t^r_0 - f_1 E^{G_1}_{K_1} t^r_1))\ ^{*)} = \\
& = (z^r,\ J^{K'}_{G'} f E^{\Pi_G}_{\Pi}\,(t^r_0 - t^r_1))\ ^{**)} = (z^r,\ f_G\,(t^r_0 - t^r_1)) = \\
& = (\bar{f}_G z^r,\ (t^r_0 - t^r_1)) = (\bar{f}_G z^r,\ (\Delta_{\Pi_G}\Pi t^r + \Pi\Delta_G t^r))\ ^{***)} = \\
& (\bar{f}_G z^r,\ \Delta_{\Pi_G}\Pi t^r) + (\bar{f}_G z^r,\ \Pi\Delta_G t^r) = \\
& = (\nabla_{\Pi_G}\bar{f}_G z^r,\ \Pi t^r) + (\bar{f}_G z^r,\ \Pi \sum_{\substack{t^{r-1}<t^r \\ t^{r-1}\in G}} (t^r : t^{r-1})\, t^{r-1}) = \\
& = \sum_{\substack{t^{r-1}<t^r \\ t^{r-1}\in G}} (t^r : t^{r-1})\, (\bar{f}_G z^r,\ \Pi t^{r-1}).
\end{aligned}
$$

Le choix du simplexe t^r étant arbitraire, nous avons l'égalité $\nabla_G x^{r-1} = \bar{f}_{0G}z^r - \bar{f}_{1G}z^r$. Le lemme est démontré.

2. Théorème fondamental. Théorème 2.

1°. *Soit $f: K \to K'$ une telle application simpliciale du complexe K dans le complexe K' que l'image fA d'un sous-complexe fermé A du complexe K est contenue dans le sous-complexe A' du complexe K'. Soient $G = K \setminus A$ et $G' = K' \setminus A'$. Désignons par f_A la restriction de l'application f à l'ensemble A (i.e. $f_A = f\,|_A\colon A \to A'$), alors chacun des diagrammes*

$$
(7_\Delta)\qquad
\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \Delta^{r+1}G \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_G"] & \Delta^r A \arrow[r, "E^A_K"] \arrow[d, "f_A"] & \Delta^r K \arrow[r, "J^K_G"] \arrow[d, "f"] & \Delta^r G \arrow[r] \arrow[d, "f_G"] & \dots \arrow[r] & \Delta^0 G \arrow[d, "f_G"] \\
\dots \arrow[r] & \Delta^{r+1}G' \arrow[r, "\partial'"] & \Delta^r A' \arrow[r, "E^{A'}_{K'}"] & \Delta^r K' \arrow[r, "J^{K'}_{G'}"] & \Delta^r G' \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \Delta^0 G'
\end{tikzcd}
$$

et

$$
(7_\nabla)\qquad
\begin{tikzcd}
\dots & \nabla^{r+1}G \arrow[l, "\delta"'] & \nabla^r A \arrow[l] & \nabla^r K \arrow[l, "J^K_A"'] & \nabla^r G \arrow[l, "E^G_K"'] & \dots \arrow[l] & \nabla^0 G \arrow[l] \\
\dots & \nabla^{r+1}G' \arrow[l, "\delta'"'] \arrow[u, "\bar{f}_G"] & \nabla^r A' \arrow[l] \arrow[u, "\bar{f}_A"] & \nabla^r K \arrow[l, "J^{K'}_{A'}"'] \arrow[u, "\bar{f}"] & \nabla^r G' \arrow[l, "E^{G'}_{K'}"'] \arrow[u, "\bar{f}_G"] & \dots \arrow[l] & \nabla^0 G' \arrow[l] \arrow[u, "\bar{f}_G"]
\end{tikzcd}
$$

---

*) Ici G_i et t^r_i désignent respectivement les copies des ensembles G et t^r situées dans K_i, $i = 0, 1$.

**) Si l'on identifie les simplexes $t^r_i \in G_i$ avec les simplexes correspondants des bases du prisme Π, on a évidemment

$$f E^{\Pi_G}_{\Pi} t^r_i = f_i E^{G_i}_{K_i} t^r_i, \qquad i = 0, 1.$$

***) Voir chapitre 2, p. 111, formule (1).

est commutatif. La commutativité des diagrammes signifie que

$$f_A\partial = \partial' f_G,\ fE_K^A = E_{K'}^{A'} f_A,\ f_G J_G^K = J_{G'}^{K'} f$$

et

$$\bar{f}_G\delta' = \delta\bar{f}_A,\ J_A^K\bar{f} = \bar{f}_A J_{A'}^{K'},\ E_K^G\bar{f}_G = \bar{f}E_{K'}^{G'}$$

quel que soit $r = 0, 1, 2, \ldots$

2°. *Soient* $f\colon K \to K'$ *et* $g\colon K \to K'$ *des applications simpliciales combinatoirement proches pour lesquelles* $fA \subseteq A'$, $gA \subseteq A'$ *et supposons que les restrictions de ces applications* $f_A\colon A \to A'$ *et* $g_A\colon A \to A'$ *sont aussi combinatoirement proches; alors les homomorphismes suivants coïncident*

a) $f\colon \Delta^r K \to \Delta^r K'$ *et* $g\colon \Delta^r K \to \Delta^r K'$,

$\bar{f}\colon \nabla^r K' \to \nabla^r K$ *et* $\bar{g}\colon \nabla^r K' \to \nabla^r K$,

b) $f_G\colon \Delta^r G \to \Delta^r G'$ *et* $g_G\colon \Delta^r G \to \Delta^r G'$,

$\bar{f}_G\colon \nabla^r G' \to \nabla^r G$ *et* $\bar{g}_G\colon \nabla^r G' \to \nabla^r G$,

c) $f_A\colon \Delta^r A \to \Delta^r A'$ *et* $g_A\colon \Delta^r A \to \Delta^r A'$,

$\bar{f}_A\colon \nabla^r A' \to \nabla^r A$ *et* $\bar{g}_A\colon \nabla^r A' \to \nabla^r A$, $r = 0, 1, 2, \ldots$

Démontrons 1°. Posons, comme précédemment, $G'' = f^{-1}(G')$. Démontrons la relation

$$f_G J_G^K = J_{G'}^{K'} f. \tag{8}$$

Prenons un cycle quelconque $z \in \xi \in \Delta^r K$. On a $f_G J_G^K z = J_{G'}^{K'} f E_K^G J_G^K z$. La remarque 1 implique

$$J_{G'}^{K'} f E_K^A J_A^K z = 0,$$

de sorte que

$$f_G J_G^K z = J_{G'}^{K'} f\,(E_K^G J_G^K z + E_K^A J_A^K z) = J_{G'}^{K'} f z.$$

La relation (8) est démontrée.

Démontrons la relation

$$fE_K^A = E_{K'}^{A'} f_A. \tag{9}$$

Prenons la chaîne $x^r = x^r(t^r) \in L^r A$, égale à 1 sur un simplexe orienté fixé t^r; -1 sur $-t^r$; 0 sur les autres simplexes de dimension r du complexe A. Alors la chaîne $E_K^A x^r$ est égale à : 1 sur t^r, -1 sur $-t^r$ et 0 sur les autres simplexes de dimension r du complexe K. Puisque $f_A = f\colon A \to A'$, on a $f_A t^r = f t^r$. Considérons le cas où le simplexe $f \mid t^r \mid$ est non dégénéré. Il découle de la définition des homomorphismes f et f_A que (a) la chaîne $f_A x^r$ prend la valeur : 1 sur $f_A t^r$, -1 sur $f_A(-t^r)$ et 0 sur les autres simplexes de dimension r

du complexe A' ; (b) la chaîne $fE_K^A x^r$ prend la valeur : 1 sur $ft^r = f_A t^r$, -1 sur $f(-t^r) = f_A(-t^r)$ et 0 sur les autres simplexes de dimension r du complexe K'. Par conséquent, $E_{K'}^{A'} f_A x^r = fE_K^A x^r$. Si le simplexe $f \mid t^r \mid$ est dégénéré, il est clair que $E_{K'}^{A'} f_A x^r \equiv 0 \equiv fE_K^A x^r$. Puisque chaque chaîne de $L^r A$ est une combinaison linéaire de chaînes de la forme $x^r(t^r)$, la formule (9) est vérifiée pour des chaînes quelconques de $L^r A$.

Puisque les homomorphismes f, E_K^A, f_A et $E_{K'}^{A'}$ commutent avec l'opérateur Δ, la formule (9) est satisfaite par chaque élément du groupe $\Delta^r A$.

Avant d'aller plus loin, appliquons la formule (9) établie à la démonstration de la formule suivante, vérifiée pour toute chaîne x du complexe K située sur A :

$$(10_0) \qquad J_{A'}^{K'} fx = f_A J_A^K x.$$

En effet,

$$J_{A'}^{K'} fx = J_{A'}^{K'} fE_K^A J_A^K x = J_{A'}^{K'} E_{K'}^{A'} f_A J_A^K x = f_A J_A^K x.$$

Passons maintenant à la démonstration de la formule

$$(10) \qquad f_A \partial = \partial' f_G.$$

Considérons un cycle arbitraire $z \in \eta \in \Delta^{r+1} G$. Posons $x = E_G^{G''} J_{G''}^G z$ et $y = z - x$.

a) Déterminons $\partial' f_G z$. Puisque la chaîne $E_K^G y$ est située sur un sous-complexe $K \setminus G''$, on a, en vertu de la remarque 1, $f_G y = 0$. Donc

$$\partial' f_G z = \partial' f_G (x + y) = \partial' f_G x = (J_{A'}^{K'} \Delta E_{K'}^{G'})(J_{G'}^{K'} fE_K^G)\, x.$$

Puisque la chaîne $fE_K^G x$ est située sur G', on a

$$\partial' f_G z = J_{A'}^{K'} \Delta fE_K^G x = J_{A'}^{K'} f \Delta E_K^G x.$$

Ainsi,

$$(10_a) \qquad \partial' f_G z = J_{A'}^{K'} f \Delta E_K^G x.$$

b) Déterminons $f_A\, \partial z$. Puisque $f_A\, \partial z = f_A (J_A^K \Delta E_K^G)\, z$ et puisque le cycle $\Delta E_K^G z$ est situé sur A (voir remarque 5, p. 33, chapitre 1) et $f(A) \subseteq A'$, en substituant dans la formule (10_0) l'expression

$$x = \Delta E_K^G z,$$

on trouvera

$$(10_b) \qquad f_A \partial z = J_{A'}^{K'} f \Delta E_K^G z.$$

c) Il reste à démontrer que la différence

$$f_A\partial z - \partial' f_G z = J_{A'}^{K'} f\Delta E_K^G z - J_{A'}^{K'} f\Delta E_K^G x = J_{A'}^{K'} f\Delta E_K^G y$$

est homologue à zéro dans A'. Mais

$$J_{A'}^{K'} f\Delta E_K^G y = J_{A'}^{K'}\Delta f E_K^G y.$$

Par sa définition même, la chaîne $E_K^G y$ est située sur $K\setminus G'' = f^{-1}A^r$ et donc, en vertu de la remarque 1 du chapitre 1, p. 32, nous avons

$$J_{A'}^{K'}\Delta f E_K^G y = \Delta_{A'} J_{A'}^{K'} f E_K^G y,$$

i.e. finalement

$$f_A\partial z - \partial' f_G z = \Delta_{A'} J_{A'}^{K'} f E_K^G y,$$

ce qui démontre la formule (10).

Démontrons la commutativité du deuxième diagramme.

Rappelons avant tout la dualité des opérateurs E_K^C et J_C^K (chapitre 1, p. 31, formule (*)), i.e. la formule

$$(*) \qquad (E_K^C x,\ y) = (x,\ J_C^K y),$$

qui a lieu pour tout sous-complexe $C \subseteq K$ et des chaînes

$$x \in L^r C,\ y \in L^r K$$

quelconques, pour les groupes de coefficients appropriés.

On a aussi la dualité des opérateurs ∂ et δ, i.e. la formule

$$(**) \qquad (\delta x_A,\ y_G) = (x_A,\ \partial y_G) \text{ pour } x_A \in L^r A,\ y_G \in L^{r+1} G.$$

En effet,

$$(\delta x_A,\ y_G) = (J_G^K \nabla E_K^A x_A,\ y_G) = (x_A,\ J_A^K \Delta E_K^G y_G) = (x_A,\ \partial y_G),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour la démonstration de la relation

$$(\bar{8}) \qquad \bar{f} E_{K'}^{G'} = E_K^G \bar{f}_G,$$

prenons un cocycle arbitraire $z \in \xi \in \nabla^r G'$ et un simplexe quelconque $t^r \in K$. Alors, en vertu de la formule (8)

$$(\bar{f} E_{K'}^{G'} z,\ t^r) = (E_{K'}^{G'} z,\ f t^r) = (z,\ J_{G'}^{K'} f t^r) = (z,\ f_G J_G^K t^r) = (E_K^G \bar{f}_G z,\ t^r),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de la relation

$$(\bar{9}) \qquad J_A^K \bar{f} = \bar{f}_A J_{A'}^{K'}.$$

Pour un cocycle arbitraire $z \in \eta \in \nabla^r K'$ et un simplexe quelconque $t^r \in A$, nous avons (en vertu de la formule (9)),

$$(J_A^K \bar{f} z,\ t^r) = (z,\ f E_K^A t^r) = (z,\ E_{K'}^{A'} f_A t^r) = (\bar{f}_A J_{A'}^{K'} z,\ t^r),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de la relation

$$(\overline{10}) \qquad \delta \bar{f}_A = \bar{f}_G \delta'.$$

Prenons à nouveau un cocycle arbitraire $z \in \xi \in \nabla^r A$ et un simplexe $t^{r+1} \in G$. On a

$$(\delta \bar{f}_A z,\ t^{r+1}) = (z,\ f_A\, \partial t^{r+1}) = (z,\ \partial' f_G t^{r+1}) = (\bar{f}_G \delta' z,\ t^{r+1}),$$

d'où l'on tire la relation cherchée. Nous avons démontré 1°. Passons à 2°. Les homomorphismes mentionnés dans les assertions a) et c) coïncident; d'après les théorèmes 5_Δ, 5_∇ du chapitre 2. La coïncidence des homomorphismes de b) se déduit du lemme 3 de ce paragraphe. Le théorème est démontré.

3. **Remarque.** Pour tous les raisonnements effectués ci-dessus, on a besoin de la formule

$$(\bar{f}x,\ y) = (x,\ fy).$$

Ceci impose sur les groupes de coefficients envisagés pour les suites $\Delta\ (K, A, G)$ et $\nabla\ (K, A, G)$ les restrictions usuelles (voir remarque 3 à la page 27) : ou bien tous les groupes de deux suites ont pour groupes de coefficients un même groupe (discret), qui a une structure d'anneau, ou bien les groupes de suites $\Delta\ (K, A, G)$ et $\nabla\ (K, A, G)$ ont pour coefficients les groupes duaux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, dont un est bicompact (et alors l'autre est discret).

Pour le cas des groupes de coefficients bicompacts — qui était important pour l'étude du diagramme (6_0) — nous considérons les groupes de chaînes, de cycles, de cycles homologues à zéro et d'homologies, munis de leur topologie (voir chapitre 1, p. 29). Dans ce cas il nous est nécessaire de vérifier également la continuité des homomorphismes qui figurent dans l'énoncé du théorème 2. Mais cette vérification est automatique (puisqu'elle a déjà été effectuée pour les opérateurs Δ et ∇ et l'homomorphisme f, tandis que la continuité des homomorphismes J et E, plus exactement, la continuité des homomorphismes induits des groupes de chaînes est évidente ; leurs compositions f_G et $\bar{f}_G$ sont également continues, etc.) ; la vérification peut être laissée au lecteur.

CHAPITRE SIX

GROUPES D'HOMOLOGIE ET DE COHOMOLOGIE DES BICOMPACTS ET HOMOMORPHISMES INDUITS PAR LEURS APPLICATIONS CONTINUES ; SUITES EXACTES ET ISOMORPHISME DE DUALITÉ DANS LA FIGURE X, Φ, Γ

Nous donnons au § 1 la définition des groupes d'homologie et de cohomologie $\Delta^r X$ et $\nabla^r X$ d'un bicompact X à l'aide du spectre de tous les recouvrements ouverts finis du bicompact donné et du spectre inverse (respectivement direct) des groupes d'homologie (respectivement de cohomologie) des nerfs des recouvrements.

Au § 2 nous considérons les homomorphismes $f\colon \Delta^r X \to \Delta^r Y$, induits par l'application continue f du bicompact X dans le bicompact Y. En guise de cas particulier, nous considérons l'homomorphisme d'inclusion $E_Y^X\colon \Delta^r X \to \Delta^r Y$ induit par l'application identique du bicompact X dans Y lorsque $X \subseteq Y$.

Au § 3 nous étudions l'homomorphisme $\overline{f}\colon \nabla^r Y \to \nabla^r X$ dual à l'homomorphisme $f\colon \Delta^r X \to \Delta^r Y$; lorsque $X \subseteq Y$, nous étudions pour l'application identique $f\colon X \to Y$ l'homomorphisme d'intersection $J_X^Y\colon \nabla^r Y \to \nabla^r X$, dual à l'homomorphisme d'inclusion $E_Y^X\colon \Delta^r X \to \Delta^r Y$. Comme un cas très particulier mais important, nous étudions le degré d'une application $f\colon X \to Y$, lorsque Y est une pseudo-variété fermée orientée.

Enfin, le § 4 est consacré au cas de deux applications homotopes $f\colon X \to Y$ et $g\colon X \to Y$.

Au § 5 nous démontrons que, pour un compact X, les groupes $\Delta^r X$ sont isomorphes aux groupes $\Delta_c^r X$ de Brouwer-Vietoris, définis au chapitre 2. Chemin faisant, nous donnons une deuxième démonstration du théorème d'invariance des groupes de Betti des polyèdres (chapitre 2).

Au § 6, les notions introduites au § 1 sont généralisées, ce qui nous amène à une définition des groupes d'homologie et de cohomologie des espaces localement bicompacts.

Au § 7 nous envisageons les homomorphismes liés à la « figure X, Φ, Γ » (analogue à la figure K, A, G étudiée au chapitre 5).

Au § 8 nous étudions la suite exacte engendrée par les groupes et les homomorphismes étudiés au § 7.

Au § 9 nous démontrons la dualité générale d'Alexander-Pontriaguine-Kolmogorov et, en guise de généralisation, nous construisons l'isomorphisme de dualité pour la figure X, Φ, Γ.

Au § 10 les homomorphismes des suites exactes, dont le cas combinatoire avait été envisagé au chapitre 5, sont généralisés au cas général de la figure X, Φ, Γ.

Tout le contenu de ce chapitre se base sur la théorie des spectres, exposée dans le livre [AP], supplément au chapitre 1. Pour faciliter la lecture, nous répétons les définitions principales et les propositions nécessaires dans un Supplément à ce chapitre.

Enfin, notons encore une fois que partout dans ce chapitre nous entendons par *recouvrement* un *recouvrement ouvert* fini, sauf mention du contraire.

§ 1. Définition des Δ- et ∇-groupes d'un bicompact

Considérons l'ensemble dirigé Ω de tous les recouvrements*) du bicompact donné X. En faisant correspondre à chaque élément du recouvrement $\beta \geqslant \alpha$ un élément quelconque (du recouvrement α) qui le contient, nous obtiendrons une application simpliciale ϖ_α^β du nerf $|\beta|$ dans le nerf $|\alpha|$, que l'on appelle projection. Puisque l'élément du recouvrement β peut être contenu dans plusieurs éléments du recouvrement α, il peut exister plusieurs projections du recouvrement β dans le recouvrement α. Mais deux projections quelconques du nerf $|\beta|$ dans le nerf $|\alpha|$ sont des applications combinatoirement proches. Elles définissent donc un même homomorphisme ϖ_α^β du groupe $\Delta^r|\beta|$ dans $\Delta^r|\alpha|$ et un même homomorphisme π_β^α du groupe $\nabla^r|\alpha|$ dans le groupe $\nabla^r|\beta|$ **). Nous avons un spectre direct de groupes discrets

$$(1) \qquad \{\nabla^r|\alpha|,\ \pi_\beta^\alpha\}$$

---

*) Il est parfois commode (par exemple, au § 4) de considérer un recouvrement comme étant un ensemble « désigné » (voir le livre [AP], chap. 1, p. 68), i.e. l'ensemble $\omega = \{H_1, H_2, \ldots, H_s\}$ dont les éléments H_i et H_j sont supposés distincts s'ils possèdent des indices différents $i \neq j$. Puisque dans l'ensemble dirigé $\Omega_{\text{dés}}$ de tous les recouvrements désignés les recouvrements « stricts » forment une partie confinale Ω, on peut choisir n'importe lequel des deux ensembles, Ω ou $\Omega_{\text{dés}}$, dans les raisonnements qui vont suivre. Les nerfs des recouvrements seront désignés par $|\alpha|$, $|\beta|$, etc.

**) Les groupes $\Delta^r|\alpha|$, $\alpha \in \Omega$, ont pour coefficients un groupe bicompact quelconque bien déterminé $\mathfrak{A}$. Les groupes $\nabla^r|\alpha|$, $\alpha \in \Omega$, ont pour coefficients le groupe dual $\mathfrak{B}$ (discret) au groupe $\mathfrak{A}$. Les groupes $\Delta^r|\alpha|$ sont donc bicompacts (dans la topologie indiquée à la p. 29), tandis que les groupes $\nabla^r|\alpha|$ sont discrets.

et un spectre inverse de groupes bicompacts:

$$\{\Delta^r \mid \alpha \mid, \mathfrak{w}_\alpha^\beta\}. \tag{2}$$

Le groupe limite du spectre inverse (2) est désigné par $\Delta^r X$ et s'appelle *Δ-groupe de dimension r* ou *groupe d'homologie du bicompact X*.

Remarque 1. Par la suite nous écrirons simplement $\Delta^r\alpha$ et $\nabla^r\alpha$ à la place de $\Delta^r \mid \alpha \mid$ et $\nabla^r \mid \alpha \mid$.

Remarque 2. On peut donner la définition du groupe $\Delta^r X$ pour un bicompact quelconque X sous une autre forme, équivalente à celle envisagée ci-dessus.

Appelons *cycle projectif* la famille de cycles

$$z^r = \{z_\alpha^r\}$$

constituée d'un cycle z_α^r pour chaque nerf $\mid \alpha \mid$, si elle satisfait à la condition: $\beta \geqslant \alpha$ implique $\mathfrak{w}_\alpha^\beta z_\beta^r \sim z_\alpha^r$ dans $|\alpha|$.

Les cycles projectifs s'ajoutent terme à terme: si

$$z^r = \{z_\alpha^r\}, \quad z'^r = \{z_\alpha'^r\},$$

alors

$$z^r + z'^r = \{z_\alpha^r + z_\alpha'^r\};$$

et forment un groupe pour cette opération.

Un cycle projectif $z^r = \{z_\alpha^r\}$ s'appelle *frontière*, ou cycle *homologue à zéro* dans X, si $z_\alpha^r \sim 0$ dans $\mid \alpha \mid$ quel que soit α.

Le groupe quotient $Z^r X - H^r X$ du groupe de tous les cycles projectifs de dimension r du bicompact X par le sous-groupe de tous les cycles frontières est en bijection (isomorphisme) naturelle avec le groupe $\Delta^r X$ et peut être identifié avec ce dernier *).

On peut également donner une autre forme, plus simple, à la définition du groupe $\nabla^r X$. Appelons *∇-cycle de dimension r*, ou *cocycle*, du bicompact X chaque ∇-cycle z_α^r du nerf d'un recouvrement quelconque α du compact X. Deux ∇-cycles z_α^r et z_β^r du compact X sont dits *cohomologues* entre eux dans X s'il existe un recouvrement γ de ce bicompact, inscrit tout aussi bien dans α que dans β, tel que l'on a $\pi_\gamma^\alpha z_\alpha^r \sim \pi_\gamma^\beta z_\beta^r$ dans $\mid \gamma \mid$. Cette définition de la cohomologie nous donne une partition de l'ensemble de tous les cycles de dimension r du bicompact X en classes de cocycles cohomologues. Ces classes, appelées ∇-classes, ou *faisceaux*, sont justement les éléments du groupe $\nabla^r X$. Si l'on se donne deux ∇-classes ξ'^r et ξ''^r, on peut toujours trouver un tel recouvrement α, que α contient un certain ∇-cycle $z_\alpha'^r \in \xi'^r$ et un certain ∇-cycle $z_\alpha''^r \in \xi''^r$. Alors $\xi^r = \xi'^r + \xi''^r$

*) Voir théorème 5, § 3, chapitre 1.

se définit comme la ∇-classe contenant le cycle $z'^r_\alpha + z''^r_\alpha$. Cette définition de l'addition des ∇-classes (qui ne dépend pas, comme on voit facilement, de l'arbitraire qu'elle comporte) termine la définition du groupe $\nabla^r X$ (d'un bicompact quelconque X).

§ 2. Définition de l'homomorphisme $f\colon \Delta^r X \to \Delta^r Y$ induit par une application continue $f\colon X \to Y$ du bicompact X dans le bicompact Y

L'application simpliciale f d'un complexe fini quelconque K_α dans un complexe K_β induit, comme nous le savons (chapitre 1, § 8), des homomorphismes duaux $f\colon \Delta^r K_\alpha \to \Delta^r K_\beta$ et $\bar{f}\colon \nabla^r K_\beta \to \nabla^r K_\alpha$. Les définitions que nous venons de donner au § 1 des groupes d'homologie et de cohomologie des bicompacts, comme groupes limites des spectres correspondants, nous amènent naturellement à la définition d'homomorphismes analogues pour l'application continue f d'un bicompact X dans un bicompact Y.

1. Quelques notations et remarques. L'application $f\colon X \to Y$ sera toujours supposée continue. Soit β un recouvrement du bicompact Y ; désignons par $f^{-1}\beta$ ou plus brièvement par β^{-1} le recouvrement de l'espace X qui est l'image inverse du recouvrement β par l'application f. A chaque sommet du nerf $|\beta^{-1}|$ correspond un sommet du nerf $|\beta|$ (mais la réciproque n'est généralement pas vraie *)), de sorte que nous avons une bijection naturelle $f^{\beta^{-1}}_\beta$ de l'ensemble de tous les sommets du nerf $|\beta^{-1}|$ sur un certain sous-ensemble de l'ensemble de tous les sommets du nerf $|\beta|$. Cette application engendre une bijection simpliciale (un isomorphisme), que nous désignerons toujours par $f^{\beta^{-1}}_\beta$, du nerf du recouvrement $f^{-1}\beta$ dans le nerf $|\beta|$. En identifiant l'élément t du complexe $|\beta^{-1}|$ avec son image $f^{\beta^{-1}}_\beta t \in |\beta|$, nous pouvons envisager le complexe $|\beta^{-1}|$ comme un sous-complexe du complexe $|\beta|$.

Généralisant cette remarque, disons que l'application simpliciale

$$(1^\alpha_\beta) \qquad f^\alpha_\beta\colon |\alpha| \to |\beta|$$

du nerf d'un recouvrement quelconque $\alpha = \{U_i\}$ de l'espace X dans le nerf d'un recouvrement $\beta = \{O_j\}$ de l'espace Y *est induite par*

*) Puisque l'application $f\colon X \to Y$ n'est pas nécessairement surjective, l'image inverse $f^{-1}O_j$ d'un certain élément $O_j \in \beta$ peut être vide, et les images inverses de deux éléments distincts $O_j \in \beta$ et $O_k \in \beta$ peuvent être un même ensemble de X, ce qui ne peut nous empêcher de les considérer comme étant des éléments distincts du recouvrement $f^{-1}\beta$ (voir la note au bas de la page 306).

l'application continue f: $X \to Y$, si $f^{\alpha}_{\beta} e_{\alpha i} = e_{\beta j}$ implique toujours $U_i \subseteq f^{-1} O_j$ (et alors $fU_i \subseteq O_j$).

Il découle de cette définition:

Si l'application simpliciale (1^{α}_{β}) est induite par l'application f: $X \to Y$, alors

$$\alpha \geqslant \beta^{-1}.$$

On voit facilement que pour deux recouvrements quelconques α et α', $\alpha' \geqslant \alpha$, une projection arbitraire $\varpi^{\alpha'}_{\alpha}$ est engendrée par une application identique de l'espace X. Désignant, comme précédemment, par $f^{\beta^{-1}}_{\beta}$ l'inclusion naturelle du nerf $|\beta^{-1}|$ dans le nerf $|\beta|$, nous voyons que pour tout recouvrement $\alpha \geqslant \beta^{-1}$ et pour toute projection $\varpi^{\alpha}_{\beta^{-1}}$ l'application simpliciale

$$f^{\alpha}_{\beta} = f^{\beta^{-1}}_{\beta} \varpi^{\alpha}_{\beta^{-1}} : |\alpha| \to |\beta|$$

est induite par l'application f.

En général, on voit facilement que pour des applications simpliciales f^{α}_{β} : $|\alpha| \to |\beta|$ et f^{β}_{γ}: $|\beta| \to |\gamma|$ induites respectivement par les applications f: $X \to Y$ et g: $Y \to Z$, l'application $f^{\beta}_{\gamma} f^{\alpha}_{\beta}$ est induite par l'application gf.

Par la suite, le fait suivant sera important: deux applications simpliciales quelconques $f^{\alpha}_{1\beta}$: $|\alpha| \to |\beta|$ et $f^{\alpha}_{2\beta}$: $|\alpha| \to |\beta|$ induites par une même application f sont combinatoirement proches (voir chapitre 2, § 4).

Considérons maintenant l'ensemble fermé A de X et un ensemble fermé B et Y tel que $fA \subseteq B$. Posons

$$f_A = f|_A : A \to B; \quad A\alpha = \{A \cap U_i : A \cap U_i \neq \Lambda\}, \quad i = 1, \ldots, s$$

et

$$B\beta = \{B \cap O_j : B \cap O_j \neq \Lambda\}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Les nerfs du recouvrement $A\alpha$ et $B\beta$ peuvent être considérés naturellement comme des sous-complexes fermés des complexes $|\alpha|$ et $|\beta|$ respectivement. Montrons que pour chaque application simpliciale f^{α}_{β}: $|\alpha| \to |\beta|$ induite par l'application f on a la relation $f^{\alpha}_{\beta} |A\alpha| \subseteq$ $\subseteq |B\beta|$.

En effet, si $\bigcap_{k=1}^{p} (U_{i_k} \cap A) \neq \Lambda$ et $f^{\alpha}_{\beta} e_{i_k} = e_{j_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ (i.e. $fU_{i_k} \subseteq O_{j_k}$) on a $f \bigcap_{k=1}^{p} (U_{i_k} \cap A) \subseteq \bigcap_{k=1}^{p} f(U_{i_k} \cap A) \subseteq \bigcap_{k=1}^{p} (O_{j_k} \cap B)$, et donc $\bigcap_{k=1}^{p} (O_{j_k} \cap B) \neq \Lambda$, d'où l'on déduit la relation $f^{\alpha}_{\beta} |A\alpha| \subseteq$

$\subseteq |B\beta|$. En particulier, nous avons démontré que la relation $e_i \in |A\alpha|$, $f^{\alpha}_{\beta} e_i = e_j$ implique $f(U_i \cap A) \subseteq O_j \cap B$, i.e. l'application $= f^{A\alpha}_{B\beta} = f^{\alpha}_{\beta}|_{|A\alpha|}: |A\alpha| \to |B\beta|$ est induite par l'application $f_A = f|_A: A \to B$ *). Ainsi, si les applications simpliciales $f^{\alpha}_{1\beta}$ et $f^{\alpha}_{2\beta}$ sont induites par l'application f, alors les applications $f^{A\alpha}_{1B\beta} = f^{\alpha}_{1\beta}|_{|A\alpha|}$ et $f^{A\alpha}_{2B\beta} = f^{\alpha}_{2\beta}|_{|A\alpha|}$ sont combinatoirement proches.

Remarque 1. Si, dans les conditions énoncées ci-dessus, nous avons $\alpha \geqslant \beta^{-1}$, $\alpha' \geqslant \alpha$, $\beta' \geqslant \beta$, $\alpha' \geqslant (\beta')^{-1}$, alors, pour des projections quelconques $\varpi^{\alpha'}_{\alpha}$ et $\varpi^{\beta'}_{\beta}$, les applications simpliciales $f^{\alpha}_{\beta}\varpi^{\alpha'}_{\alpha}$ et $\varpi^{\beta'}_{\beta} f^{\alpha'}_{\beta'}$ sont induites par l'application f et sont donc combinatoirement proches; pour la même raison les applications suivantes

$$f^{\alpha}_{\beta}\varpi^{\alpha'}_{\alpha}|_{|A\alpha'|} = f^{A\alpha}_{B\beta}\varpi^{A\alpha'}_{A\alpha}: |A\alpha'| \to |B\beta|$$

et

$$\varpi^{\beta'}_{\beta} f^{\alpha'}_{\beta'}|_{|A\alpha'|} = \varpi^{B\beta'}_{B\beta} f^{A\alpha'}_{B\beta'}: |A\alpha'| \to |B\beta|$$

où

$$f^{A\alpha}_{B\beta} = f^{\alpha}_{\beta}|_{|A\alpha|} \text{ et } f^{A\alpha'}_{B\beta'} = f^{\alpha'}_{\beta'}|_{|A\alpha'|}$$

sont aussi combinatoirement proches.

2. **L'homomorphisme f: $\Delta^r X \to \Delta^r Y$ induit par l'application continue f du bicompact X dans le bicompact Y.** Soient A l'ensemble de tous les recouvrements α du bicompact X et B l'ensemble de tous les recouvrements β du bicompact Y. Pour un recouvrement fixe $\alpha \in$ A, soit $\varphi\alpha$ l'ensemble de tous les recouvrements $\beta \in$ B pour lesquels α est inscrit dans $\beta^{-1} = f^{-1}\beta$. L'application multivalente φ: A $\to$ B satisfait à la condition 1) du lemme 2° du Supplément à ce chapitre (que nous appellerons par la suite tout simplement Supplément).

En effet, supposons que les recouvrements α et α' sont inscrits respectivement dans les recouvrements β^{-1} et $(\beta')^{-1}$. Alors pour β'' on peut prendre un recouvrement quelconque inscrit dans β ainsi que dans β', et pour α'', le produit **) $\alpha \wedge \alpha' \wedge (\beta'')^{-1}$ des recouvrements α, α', β''.

Considérons les spectres des groupes bicompacts $\Sigma^r_X = \{\Delta^r\alpha, \varpi^{\alpha'}_{\alpha}\}$, $\alpha \in$ A, et $\Sigma^r_Y = \{\Delta^r\beta, \varpi^{\beta'}_{\beta}\}$, $\beta \in$ B, ayant pour limites $\Delta^r X$ et $\Delta^r Y$ respectivement. Montrons que, pour les homomorphismes $f^{\alpha}_{\beta}: \Delta^r\alpha \to$

*) Si $X = Y$ et que l'application f soit l'identité sur X, et $B = A$, il découle du précédent que pour $\alpha' > \alpha$ chaque application $\varpi^{\alpha'}_{\alpha}|_{|A\alpha'|}: |A\alpha'| \to |A\alpha|$ coïncide avec une des projections $\varpi^{A\alpha'}_{A\alpha}$ et nous écrirons donc $\varpi^{A\alpha'}_{A\alpha}$ à la place de $\varpi^{\alpha'}_{\alpha}|_{|A\alpha'|}$.

**) Par produit $\alpha \wedge \beta$ de deux recouvrements on entend, comme d'habitude, le recouvrement $\{U_\alpha \cap U_\beta: U_\alpha \cap U_p \neq \Lambda, U_\alpha \in \alpha, U_\beta \in \beta\}$.

$\to \Delta^r\beta$, $\beta \in \varphi\alpha$, induits par les applications simpliciales f^α_β, qui sont induites à leur tour par l'application f, on a la condition 2) du lemme 2° du Supplément. Avant tout, en vertu du fait que les différentes applications $f^\alpha_\beta : |\alpha| \to |\beta|$ sont combinatoirement proches, on voit que l'homomorphisme f^α_β est bien défini. Ensuite, les relations

$$f^\alpha_\beta \varpi^{\alpha'}_\alpha = \varpi^{\beta'}_\beta f^{\alpha'}_{\beta'} = f^{\alpha'}_\beta$$

pour $\beta \in \varphi\alpha$, $\beta' \in \varphi\alpha'$ et $\beta' \geqslant \beta$, $\alpha' \geqslant \alpha$ découlent de la remarque 1 du n° 1 du Supplément. En vertu des lemmes 1° et 2° du Supplément, on peut définir l'homomorphisme $f: \Delta^r X \to \Delta^r Y$ comme la limite des homomorphismes f^α_β, $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$; $\beta \in B$. Et alors l'image du fil $\xi_X = \{\xi_\alpha\} \in \Delta^r X$ par l'homomorphisme f sera le fil $\xi_Y = \{f^{\beta^{-1}}_\beta \xi_{\beta^{-1}}, \beta \in B\}$.

Remarque 2. Pour les homomorphismes induits par les applications $g: X \to Y$, $h: Y \to Z$ et $f = hg: X \to Z$, nous avons la relation

$$f = hg.$$

Démonstration. Lorsque A, B et Γ désignent respectivement les ensembles de tous les recouvrements α, β et γ des bicompacts X, Y et Z, et

$$\Sigma_X = \{\Delta^r\alpha, \varpi^{\alpha'}_\alpha\}, \ \alpha \in A,$$
$$\Sigma_Y = \{\Delta^r\beta, \varpi^{\beta'}_\beta\}, \ \beta \in B,$$
$$\Sigma_Z = \{\Delta^r\gamma, \varpi^{\gamma'}_\gamma\}, \ \gamma \in \Gamma,$$

on a pour le fil $\xi_X = \{\xi_\alpha\} \in \Delta^r X$:

$$\zeta_Z = f\zeta_X = \{f^{f^{-1}\gamma}_\gamma \zeta_{f^{-1}\gamma}, \ \gamma \in \Gamma\},$$
$$\zeta_Y = g\zeta_X = \{\zeta_\beta = g^{g^{-1}\beta}_\beta \zeta_{g^{-1}\beta}, \ \beta \in B\}$$

et

$$h\zeta_Y = hg\zeta_X = \{h^{h^{-1}\gamma}_\gamma \zeta_{h^{-1}\gamma}, \ \gamma \in \Gamma\} = \{h^{h^{-1}\gamma}_\gamma g^{g^{-1}h^{-1}\gamma}_{h^{-1}\gamma} \zeta_{g^{-1}h^{-1}\gamma}, \ \gamma \in \Gamma\} =$$
$$= \{h^{h^{-1}\gamma}_\gamma g^{f^{-1}\gamma}_{h^{-1}\gamma} \zeta_{f^{-1}\gamma}, \ \gamma \in \Gamma\}.$$

Il découle de la remarque du § 8, chap. 1, que

$$f^{f^{-1}\gamma}_\gamma = h^{h^{-1}\gamma}_\gamma g^{f^{-1}\gamma}_{h^{-1}\gamma}.$$

Donc

$$\zeta_Z = f\zeta_X = h\zeta_Y = hg\zeta_X,$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. L'homomorphisme d'inclusion E_Y^X: $\Delta^r X \to \Delta^r Y$. Supposons que le bicompact X est un sous-espace du bicompact Y, tandis que $f \equiv E_Y^X : X \to Y$ est l'application (identique) d'inclusion. L'homomorphisme qu'elle induit $E_Y^X : \Delta^r X \to \Delta^r Y$ s'appelle *homomorphisme d'inclusion.*

L'image inverse du recouvrement β de l'espace Y relativement à l'inclusion $f \equiv E_Y^X$ est le recouvrement $X\beta$ du sous-espace $X \subseteq Y$ que ce sous-espace découpe dans le recouvrement β; i.e. $X\beta$ consiste des intersections non vides des éléments du recouvrement β avec X. En désignant par $E_\beta^{X\beta}$ l'application identique (l'inclusion naturelle) du nerf $|X\beta|$ dans le nerf $|\beta|$, ainsi que l'homomorphisme d'inclusion $E_\beta^{X\beta} : \Delta^r |X\beta| \to \Delta^r |\beta|$ qu'elle induit, nous voyons que l'homomorphisme E_Y^X applique le fil $\zeta_X = \{\zeta_\alpha, \alpha \in A\} \in \Delta^r X$ sur le fil $\zeta_Y = \{E_\beta^{X\beta}\zeta_{X\beta}, \beta \in B\} \in \Delta^r Y$.

Remarque 3. Il est évident que le noyau $\Delta^r(X:Y)$ de l'homomorphisme $E_Y^X : \Delta^r X \to \Delta^r Y$ est le sous-groupe du groupe $\Delta^r X$ dont les éléments sont des classes de cycles projectifs $z^r = \{z_\alpha^r, \alpha \in A\}$ de l'ensemble X, dont les prolongements $E_Y^X z^r = \{E_\beta^{X\beta} z_\beta^r, \beta \in B\}$ sur Y sont homologues à zéro dans Y. (Pour simplifier, nous dirons que le cycle projectif $z^r \in Z^r X$ est homologue à zéro dans Y si $E_Y^X z^r \sim 0$ dans Y.)

Par la suite, nous nous servirons de la

Remarque 4. L'annulation du groupe $\Delta^r(X:Y)$ signifie que chaque cycle projectif de dimension r de l'ensemble X, homologue à zéro dans Y, est nécessairement homologue à zéro dans X.

Ensuite:

Remarque 5. L'image du groupe $\Delta^r X$ par l'homomorphisme E_Y^X est un sous-groupe du groupe $\Delta^r Y$ qui sera désigné par $\Delta^r(YX)$. Ce sous-groupe consiste de tous les éléments du groupe $\Delta^r Y$ qui sont des classes d'homologie contenant les « prolongements » des cycles projectifs de l'ensemble X (« *le sous-groupe* $\Delta^r(YX) \subseteq \Delta^r Y$ *consiste des éléments du groupe* $\Delta^r Y$ *situés sur* X »).

§ 3. L'homomorphisme $\bar{f}$: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$ induit par l'application continue f du bicompact X dans le bicompact Y; dualité des homomorphismes f et $\bar{f}$. Homomorphisme d'intersection J_X^Y: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$

1. L'homomorphisme $\bar{f}$: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$. Supposons que l'application $\varphi : A \to B$ est définie de même qu'au numéro 2 du paragraphe précédent, et satisfait donc à la condition 1) du lemme $\overline{2}$ du Supplé-

ment à ce chapitre (rappelons que les conditions 1) des lemmes 2 et $\bar{2}$ sont identiques).

Considérons les spectres $\bar{S} = \{\nabla^r\alpha, \pi^{\alpha}_{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, et $\bar{\Sigma} = \{\nabla^r\beta, \pi^{\beta}_{\beta'}\}$, $\beta \in B$, qui ont pour limites respectivement les groupes $\nabla^r X$ et $\nabla^r Y$. Montrons que pour les homomorphismes $\bar{f}^{\beta}_{\alpha}: \nabla^r\beta \to \nabla^r\alpha$ induits par les applications simpliciales f^{α}_{β} (voir n° 1) nous avons la condition 2) du lemme $\bar{2}$ du Supplément.

De même que l'homomorphisme f^{α}_{β} (voir § 2, n° 2), les homomorphismes $\bar{f}^{\beta}_{\alpha}$ sont bien déterminés. La validité des relations

$$\bar{f}^{\beta'}_{\alpha'}\pi^{\beta}_{\beta'} = \pi^{\alpha}_{\alpha'}\bar{f}^{\beta}_{\alpha} = \bar{f}^{\beta}_{\alpha'},$$

pour $\beta \in \varphi\alpha$, $\beta' \in \varphi\alpha'$ et $\beta' \geqslant \beta$, $\alpha' \geqslant \alpha$ découle de la remarque 1, § 2, et de la remarque au § 8, chapitre 1.

Ainsi, les deux conditions du lemme $\bar{2}$ du Supplément sont remplies et, par conséquent, on a l'homomorphisme $\bar{f}: \nabla^r Y \to \nabla^r X$, qui est la limite des homomorphismes $\bar{f}^{\beta}_{\alpha}$, $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$, $\beta \in B$. Et alors l'image $\bar{f}\zeta_Y$ de la ∇-classe $\zeta_Y \in \nabla^r Y$ est bien déterminée par l'élément $\bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}\, y_\beta$ pour tout élément y_β de la ∇-classe ζ_Y.

A son tour, on déduit de la définition de l'homomorphisme (voir chapitre 1, § 8) que l'élément $\bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}\, y_\beta$ de la ∇-classe $\bar{f}\zeta_Y$ est bien défini par l'image $\bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}\, z_\beta$ d'un cocycle quelconque $z_\beta \in y_\beta$.

Ainsi, pour trouver l'image $\bar{f}\zeta_Y \in \nabla^r X$ de l'élément donné ζ_Y du groupe $\nabla^r Y$, il faut choisir dans un $\beta \in B$ quelconque un certain cocycle $z_\beta \in y_\beta \in \nabla^r\beta$, $y_\beta \in \zeta_Y$; alors le cocycle $\bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}\, z_\beta$ détermine l'élément $\bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}\, y_\beta$ du groupe $\nabla^r\beta^{-1}$; la ∇-classe qui le contient est l'élément cherché $\bar{f}\zeta_Y \in \nabla^r X$.

R e m a r q u e 1. Soient g et h des applications respectivement du bicompact X dans le bicompact Y et du bicompact Y dans le bicompact Z, et $f = hg$; alors, pour les homomorphismes induits, on a la relation

$$\bar{f} = \overline{gh}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Si A, B et Γ désignent respectivement les ensembles de tous les recouvrements α, β et γ des bicompacts X, Y et Z, et $\bar{\Sigma}_X = \{\nabla^r\alpha, \pi^{\alpha}_{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, $\bar{\Sigma}_Y = \{\nabla^r\beta, \pi^{\beta}_{\beta'}\}$, $\beta \in B$, $\bar{\Sigma}_Z = \{\nabla^r\gamma, \pi^{\gamma}_{\gamma'}\}$, $\gamma \in \Gamma$, alors la ∇-classe $\bar{f}\zeta_Z$, $\zeta_Z \in \nabla^r Z$, se définit par l'élément $\bar{f}^{\gamma}_{f^{-1}\gamma}\zeta_\gamma$, $\zeta_\gamma \in \zeta_Z$, la ∇-classe $\zeta_Y = \bar{h}\zeta_Z$ se définit par l'élément $\bar{h}^{\gamma}_{h^{-1}\gamma}\zeta_\gamma$ et la ∇-classe $\bar{g}\zeta_Y = \bar{g}\,\bar{h}\zeta_Z$, par l'élément $\bar{g}^{h^{-1}\gamma}_{g^{-1}h^{-1}\gamma}(\bar{h}^{\gamma}_{h^{-1}\gamma}\zeta_\gamma)$.

Puisque $f = hg$, on a $g^{-1}h^{-1}\gamma = f^{-1}\gamma$. En outre, l'assertion de notre remarque dans le cas où X, Y et Z sont des complexes et où f,

g et h sont des applications simpliciales a déjà été établie au § 8 du chapitre 1 et donc

$$\bar{g}^{h^{-1}\gamma}_{g^{-1}h^{-1}\gamma}(\bar{h}^{\gamma}_{h^{-1}\gamma}\zeta_{\gamma}) = \bar{f}^{\gamma}_{g^{-1}h^{-1}\gamma}\zeta_{\gamma} = \bar{f}^{\gamma}_{f^{-1}\gamma}\zeta_{\gamma},$$

d'où l'on tire $\bar{f}\zeta_Z = \bar{g}\,\bar{h}\zeta_Z$.

2. Dualité des homomorphismes f: $\Delta^r X \to \Delta^r Y$ et $\bar{f}$: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$.

Théorème 1. *Les homomorphismes $f: \Delta^r X \to \Delta^r Y$ et $\bar{f}$: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$ sont duaux (sous l'hypothèse naturelle, que nous faisons toujours, selon laquelle les groupes $\Delta^r X$ et $\Delta^r Y$ d'une part, et les groupes $\nabla^r X$ et $\nabla^r Y$ de l'autre, ont pour coefficients des groupes duaux, bicompact pour Δ et discret pour ∇).*

Démonstration. Ainsi, il faut démontrer que pour tous les $\zeta_X \in \Delta^r X$, $\bar{\zeta}_Y \in \nabla^r Y$, on a

$$(f\zeta_X, \bar{\zeta}_Y) = (\zeta_X, \bar{f}\bar{\zeta}_Y). \tag{1}$$

Pour cela prenons arbitrairement $\bar{\zeta}_\beta \in \bar{\zeta}_Y$ et remarquons (voir n° 5 du Supplément au chapitre 6 et n° 4 du Supplément au chapitre 1) que

$$\begin{cases} (f\zeta_X, \bar{\zeta}_Y) = (f^{\beta^{-1}}_{\beta}\zeta_{\beta^{-1}}, \bar{\zeta}_\beta), \\ (\zeta_X, f\zeta_Y) = (\zeta_{\beta^{-1}}, \bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}\bar{\zeta}_\beta). \end{cases} \tag{2}$$

Puisque les homomorphismes $f^{\beta^{-1}}_{\beta}$: $\Delta^r\beta^{-1} \to \Delta^r\beta$ et $\bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}$: $\nabla^r\beta \to \nabla^r\beta^{-1}$ sont duaux (voir chapitre 1, p. 79), les deuxièmes membres des égalités (2) sont égaux, et donc les premiers membres de ces égalités le sont aussi, i.e. on a l'égalité (1).

3. L'homomorphisme d'intersection J^Y_X: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$. Supposons que le bicompact X est un sous-espace du bicompact Y et $f \equiv E^X_Y: X \to Y$ est l'application identique. Alors l'homomorphisme $\bar{f}$: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$ qu'elle induit sera désigné par J^Y_X: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$ et appelé *homomorphisme d'intersection.*

L'homomorphisme J^Y_X fait correspondre à la ∇-classe $\zeta_Y \in \nabla^r Y$ la ∇-classe $\zeta_X \in \nabla^r X$ qui contient pour chaque $y_\beta \in \zeta_Y$ l'élément $J^\beta_{X_\beta} y_\beta$ *).

---

*) Le recouvrement $X\beta$ a été défini au n° 3; on a alors $|X\beta| \subseteq |\beta|$ et $J^\beta_{X_\beta}$ est l'homomorphisme d'intersection (la définition est donnée au chapitre 1, § 3).

Conformément au n° 1 de ce paragraphe, l'image $J_X^Y \zeta_Y$ de la ∇-classe ζ_Y est la ∇-classe $\zeta_X \in \nabla^r X$ contenant le cocycle $J_{X\beta}^{\beta} z_\beta$ pour un choix arbitraire du cocycle z_β de la ∇-classe ζ_Y.

On en déduit la

Remarque 2. Si pour un certain recouvrement β du bicompact Y (et le recouvrement correspondant $X\beta$ du bicompact $X \subseteq Y$), et pour les cocycles z_β^r sur $|\beta|$ et $z_{X\beta}^r$ sur $|X\beta| \subseteq |\beta|$ on a

$$z_{X\beta}^r = J_{X\beta}^{\beta} z_\beta^r,$$

alors, pour les classes $\zeta_Y^r \in \nabla^r Y$, respectivement $\zeta_X^r \in \nabla^r X$, de ces cocycles ($z_\beta^r \in \zeta_Y^r$, $z_{X\beta}^r \in \zeta_X^r$) nous avons

$$\zeta_X^r = J_X^Y \zeta_Y^r.$$

Si l'élément $\zeta_X^r \in \nabla^r X$ est l'image d'un certain élément $\zeta_Y^r \in \nabla^r Y$ par l'application J_X^Y, alors ζ_X^r sera l'élément *prolongeable* (à Y) du groupe $\nabla^r X$, tandis que chaque élément ζ_Y^r qui satisfait à l'égalité

$$\zeta_X^r = J_X^Y \zeta_Y^r$$

s'appelle *prolongement* de l'élément $\zeta_X^r \in \nabla^r X$ sur l'espace Y tout entier. Ainsi, le groupe $\nabla^r X$ contient le sous-groupe $J_X^Y \nabla^r Y$ des éléments prolongeables. Ce groupe est parfois désigné simplement par $\nabla^r (XY)$:

$$\nabla^r (XY) = J_X^Y \nabla^r Y.$$

Le groupe quotient du groupe $\nabla^r X$ par le sous-groupe $\nabla^r (XY)$ est désigné par $\nabla^r (X : Y)$.

Remarque 3. Le noyau de l'homomorphisme J_X^Y: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$ est parfois désigné par $\nabla^r (Y, Y \setminus X)$. Cette notation est justifiée par le fait que les classes de cohomologie qui constituent ce noyau contiennent des cocycles qui sont dans un certain sens « situés sur $Y \setminus X$ ».

4. Autres cas particuliers de l'homomorphisme $\bar{f}$: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$; degré d'une application; homomorphisme de l'application canonique. Le cas particulier d'une application continue le plus important pour nous sera l'application du bicompact X dans la pseudo-variété $Y = \widetilde{M}^n$ de dimension n. Dans ce cas, nous pouvons parler du degré d'une application *).

Supposons que la pseudo-variété Y est donnée avec sa triangulation M^n (par la suite $\widetilde{M}^n$ sera toujours une sphère de dimension n). Alors le groupe $\nabla^n Y \equiv \nabla^n (Y, I)$ est le groupe cyclique infini dont

*) On suppose généralement dim X = dim $Y = n$. Par la suite nous envisagerons seulement le cas où $Y = \widetilde{M}^n$ est une sphère de dimension n.

l'élément générateur ζ^n est la ∇-classe d'un certain cocycle z_0^n de la triangulation M^n (envisagée comme le nerf du recouvrement

$$\beta = \{Oe_1, \ldots, Oe_s\}$$

du bicompact Y consistant des étoiles ouvertes de la triangulation M^n). En qualité de cocycle z_0^n, nous prendrons toujours un simplexe orienté quelconque t_0^n de la triangulation M^n (par conséquent, $z_0^n = t_0^n$ sera appelé *cocycle fondamental* ou cocycle déterminant l'orientation de la pseudo-variété $\widetilde{M}^n$).

Puisque le groupe $\nabla^n Y = \nabla^n M^n$ est un groupe cyclique, l'homomorphisme

$$\bar{f}\colon \nabla^n Y \to \nabla^n X$$

est complètement déterminé par l'élément

$$\gamma^n \equiv \gamma^n f = \bar{f}\zeta^n \in \nabla^n X$$

du groupe $\nabla^n X$ que l'on appelle *degré de l'application*

$$f\colon X \to \widetilde{M}^n = Y.$$

Il est évident que le degré de l'application $\bar{f}$, étant défini par l'homomorphisme $\bar{f}\colon \nabla^r Y \to \nabla^r X$ et donc par l'application $f\colon X \to Y$, ne dépend pas du choix de la triangulation M^n de la pseudo-variété $Y \equiv \widetilde{M}^n$. En même temps, pour définir le degré γ^n de l'application $f\colon X \to \widetilde{M}^n$, il suffit de connaître le cocycle z^n dans lequel l'application $\bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}}\colon \nabla^n M^n \to \nabla^n \beta^{-1}$ envoie le cocycle t_0^n d'une triangulation (arbitraire) $|\beta| = M^n$; ici, comme toujours $|\beta^{-1}|$ est le nerf du recouvrement

$$\beta^{-1} = \{f^{-1}Oe_1, \ldots, f^{-1}Oe_s\},$$

tandis que $f_\beta^{\beta^{-1}}\colon |\beta^{-1}| \to |\beta| = M^n$ est l'application simpliciale induite (voir § 2, n° 1) par l'application $f\colon X \to \widetilde{M}^n$.

En envisageant le nerf $|\beta^{-1}|$ comme un sous-complexe du complexe $|\beta| = M^n$ et en désignant par $t^n = (e_{i_0}, \ldots, e_{i_n})$ un simplexe orienté quelconque du nerf $|\beta^{-1}|$, nous avons pour la définition du cocycle $z^n = \bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}} t_0^n$ l'égalité

$$(z^n, t^n) = (t_0^n, f_\beta^{\beta^{-1}} t^n),$$

où le deuxième membre est évidemment égal à 1, —1 ou 0 suivant que le simplexe t^n est appliqué par $f_\beta^{\beta^{-1}}$ sur t_0^n, ou sur $-t_0^n$, ou encore sur un simplexe (peut-être dégénéré) du complexe $M^n = |\beta|$, différent de $\pm t_0^n$. Le cocycle $z^n = \bar{f}^{\beta}_{\beta^{-1}} t_0^n$ est complètement défini si l'on se donne une triangulation M^n de la pseudo-variété $Y = \widetilde{M}^n$ et un simplexe orienté t_0^n de dimension n de cette triangulation;

on appelle parfois le cocycle z^n « degré combinatoire » de l'application f du bicompact X dans la pseudo-variété $Y = \widetilde{M}^n$ (triangulée et puis orientée par le choix d'un simplexe orienté t_0^n de la triangulation M^n).

Nous avons défini au § 9 du chapitre 1 le degré d'une application simpliciale f d'un complexe quelconque K dans une pseudo-variété M^n de dimension n (orientée par le choix d'un simplexe orienté t_0^n de dimension n du complexe M^n), comme étant la classe $\zeta_0^n \in \nabla^n K$ du cocycle z^n de dimension n défini sur un simplexe t^n (orienté quelconque de dimension n) du complexe K par l'égalité

$$(z^n, t^n) = (t_0^n, ft^n).$$

Nous pouvons dire maintenant: soit $f: X \to Y = \widetilde{M}^n$ une application continue du bicompact X dans une pseudo-variété $Y = \widetilde{M}^n$ de dimension n, orientée par le choix d'un simplexe orienté de dimension n d'une triangulation quelconque M^n de Y. Soit β un recouvrement de la pseudo-variété $\widetilde{M}^n$ par les étoiles ouvertes du complexe M^n, et soit α l'image inverse du recouvrement β. Désignons par f_β^α, comme toujours, l'application simpliciale, engendrée par une application f, du nerf $|\alpha|$ du recouvrement α dans le nerf M^n du recouvrement β. Soit ζ_0^n le degré de l'application simpliciale $f_\beta^\alpha: |\alpha| \to M^n$. Alors le degré de l'application f est la ∇-classe $\zeta^n \in \nabla^n X$ qui contient la ∇-classe $\zeta_0^n \in \nabla^n |\alpha|$.

Considérons en conclusion l'homomorphisme $\bar{f}$: $\nabla^r Y \to \nabla^r X$, induit par l'application canonique f du bicompact X dans le polyèdre $Y = \widetilde{N}_\omega$ qui est l'ensemble sous-jacent à la réalisation géométrique du nerf du recouvrement ω du bicompact X. Nous supposons que le nerf du recouvrement ω est réalisé sous forme de la triangulation N_ω et que le recouvrement lui-même

$$\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$$

est correct. Alors, en désignant par Oe_i l'étoile de sommet e_i du nerf N_ω correspondant à l'élément O_i du recouvrement ω, nous avons

$$f^{-1}Oe_i = O_i.$$

Si l'on désigne par β le recouvrement

$$\beta = \{Oe_1, \ldots, Oe_s\}$$

du polyèdre $Y = \widetilde{N}_\omega$, on a

$$\alpha = f^{-1}\beta = \{O_1, \ldots, O_s\} = \omega$$

et les deux recouvrements β et $\alpha = f^{-1}\beta = \omega$ possèdent le même nerf N_ω. L'application simpliciale $f_\beta^\alpha: |\alpha| \to |\beta|$ devient dans

notre cas l'application identique du nerf N_ω sur lui-même, tandis que l'homomorphisme $\bar{f}^{\beta}_{\beta-1}$ se réduit à l'isomorphisme identique du groupe $\nabla^r \mid \alpha \mid = \nabla^r N_\omega$ sur le groupe $\nabla^r N_\omega$ qui engendre l'homomorphisme naturel de ce dernier groupe sur $\nabla^r X$.

Ainsi, dans le cas considéré, l'homomorphisme $\bar{f}\colon \nabla^r Y \to \nabla^r X$ est l'homomorphisme naturel

$$\bar{f}^{\omega}_{X}\colon \nabla^r N_\omega \to \nabla^r X,$$

qui fait correspondre à chaque ∇-classe ζ^r_ω du nerf N_ω la ∇-classe du bicompact X qui la contient.

§ 4. Cas de deux applications homotopes

Théorème 2. *Deux applications homotopes f_0 et f_1 du bicompact X dans le bicompact Y induisent (pour tout r) un même homomorphisme $\bar{f}_0 = \bar{f}_1$ du groupe $\nabla^r Y$ dans le groupe $\nabla^r X$ (et donc un même homomorphisme $f_0 = f_1$ du groupe $\Delta^r X$ dans le groupe $\Delta^r Y$).*

La démonstration se base sur quelques propositions auxiliaires.

Soit ω un recouvrement de l'espace Y, et soient f et g deux applications continues de l'espace X dans l'espace Y. Nous savons que ces applications sont *ω-proches* entre elles sur l'ensemble $X_0 \subseteq X$ s'il existe pour chaque point $x \in X_0$ un élément Γ du recouvrement ω qui contient les deux points fx et gx.

Remarque 1. Soit $\omega = \{O_1, \ldots, O_k\}$ et $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ deux applications ω-proches sur X. Posons $U_i = f^{-1}O_i$, $V_i = g^{-1}O_i$, $W_i = U_i \cap V_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Il découle du fait que f et g sont ω-proches que le système fini d'ensembles $\{W_i\}$ est un recouvrement de l'espace X. Nous supposerons que, dans nos notations, seuls les premiers s, $s \leqslant k$, ensembles ouverts W_i sont non vides. Alors $\delta = \{W_1, \ldots, W_s\}$, et à plus forte raison $\alpha = \{U_1, \ldots, U_s\}$, est un recouvrement de l'espace X.

Lemme 1. *Soient f_0 et f_1 deux applications homotopes du bicompact X dans le bicompact Y et soit $f_\theta\colon X \to Y$ la famille d'applications $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ qui réalise l'homotopie entre f_0 et f_1. Alors, pour chaque recouvrement ω de l'espace Y, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour $\mid \theta' - \theta'' \mid < \varepsilon$ les applications $f_{\theta'}$ et $f_{\theta''}$ sont ω-proches sur X.*

Démonstration. On se donne le recouvrement ω de l'espace X. Prenons un nombre bien déterminé θ_0, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 1$. Il découle de la définition de la famille d'applications $\{f_\theta\}$, que pour chaque point $x \in X$, il existe un tel $\varepsilon^{\theta_0}_x$ et un tel voisinage Ox, que les applications f_{θ_0} et f_θ sont ω-proches entre elles sur Ox pour tous les θ qui diffèrent de θ_0 d'un nombre inférieur à $\varepsilon^{\theta_0}_x$. Le bicom-

pact X est recouvert par un nombre fini de tels voisinages Ox; désignons-les

$$Ox_1, \ldots, Ox_s.$$

Désignons par ε^{θ_0} le minimum des nombres $\varepsilon_{x_1}^{\theta_0}, \ldots, \varepsilon_{x_s}^{\theta_0}$. Alors pour tous les θ qui diffèrent de θ_0 par moins que ε^{θ_0}, les applications f_{θ_0} et f_θ seront ω-proches sur X tout entier. Soit ω^* un recouvrement étoilé *) dans ω. En appliquant le raisonnement ci-dessus au recouvrement ω^*, nous trouverons pour chaque θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, un ε^θ tel que pour $|\theta' - \theta| < \varepsilon$ les applications f_θ et $f_{\theta'}$ sont ω^*-proches entre elles sur X. Par conséquent, et puisque ω^* est étoilé dans ω, les applications $f_{\theta'}$ et $f_{\theta''}$ sont ω-proches entre elles sur X tout entier, quels que soient les nombres θ' et θ'' de l'intervalle ouvert $U_\theta = (\theta - \varepsilon^\theta, \theta + \varepsilon^\theta)$. Le segment $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ est recouvert par les intervalles U_θ, il existe donc un ensemble fini d'intervalles U_θ qui forment un recouvrement

$$\gamma = \{U_{\theta_1}, \ldots, U_{\theta_\nu}\}$$

du segment $[0, 1]$. Soit ε le nombre de Lebesgue du recouvrement γ. Pour $|\theta' - \theta''| < \varepsilon$ les applications $f_{\theta'}$ et $f_{\theta''}$ sont ω-proches sur X. Le lemme 1 est démontré.

Lemme 2. *Supposons donnés les applications $f: X \to Y$ et $g: X \to Y$ et le recouvrement ω de l'espace Y. Supposons que l'élément $\zeta \in \nabla^r Y$ possède un représentant dans $\nabla^r \omega$ (i.e. il existe une classe de cohomologie $\zeta_\omega^r \in \nabla^r \omega$ qui est contenue dans ζ). Alors, si g et f sont des applications ω-proches, on a*

$$\bar{f}\zeta = \bar{g}\zeta.$$

Avant de démontrer le lemme 2, remarquons que les lemmes 1 et 2 impliquent déjà le théorème 2. En effet, il faut démontrer que, pour des applications $f_0: X \to Y$ et $f_1: X \to Y$, homotopes entre elles, on a pour chaque $\zeta \in \nabla^r Y$ l'égalité $\bar{f}_0\zeta = \bar{f}_1\zeta$. Choisissons une famille d'applications $\{f_\theta\}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, qui réalise l'homotopie entre f_0 et f_1. Définissons pour chaque $\zeta \in \nabla^r Y$ un recouvrement ω tel que ζ possède un représentant dans $\nabla^r \omega$. Déterminons ensuite ε pour ce recouvrement ω suivant le lemme 1. Décomposons le segment $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ en segments $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ de longueur $< \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots, s$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{s+1} = 1$. Alors, d'après le lemme 1, les applications f_{θ_i} et $f_{\theta_{i+1}}$ seront ω-proches entre elles pour chaque $i = 0, 1, \ldots, s$ et nous avons donc, suivant le lemme 2

$$\bar{f}_0\zeta = \bar{f}_{i_1}\zeta = \ldots = \bar{f}_{i_s}\zeta = \bar{f}_1\zeta, \quad \text{i.e.} \quad \bar{f}_0\zeta = \bar{f}_1\zeta,$$

et le théorème 2 est démontré.

*) Cela veut dire que pour chaque élément $O^* \in \omega^*$ il existe un élément $O \in \omega$ tel que $O_1^* \cap O^* \neq \Lambda$, $O_1^* \in \omega^*$, implique $O_1^* \subseteq O$.

Passons à la démonstration du lemme 2, en conservant les notations fixées dans son énoncé et dans la remarque 1.

Prenons un simplexe quelconque t_δ de dimension r du nerf du recouvrement $\delta = \{W_1, \ldots, W_s\}$, $W_i = f^{-1}O_i \cap g^{-1}O_i \neq \Lambda$. Alors il existe dans le nerf du recouvrement ω (de l'espace Y) ainsi que dans les nerfs des recouvrements $\alpha = f^{-1}\omega$, $\beta = g^{-1}\omega$ (de l'espace X) respectivement des simplexes t_ω, t_α, t_β pour lesquels on a les relations

$$t_\omega = f^\alpha_\omega t_\alpha = g^\beta_\omega t_\beta, \qquad t_\alpha = \varpi^\delta_\alpha t_\delta, \qquad t_\beta = \varpi^\delta_\beta t_\delta.$$

En prenant un cocycle $z_\omega \in \zeta^r_\omega$, calculons

$$(\pi^\alpha_\delta \bar{f}^\omega_\alpha z_\omega, t_\delta) = (\bar{f}^\omega_\alpha z_\omega, \varpi^\delta_\alpha t_\delta) = (\bar{f}^\omega_\alpha z_\omega, t_\alpha) = (z_\omega, f^\alpha_\omega t_\alpha) = (z_\omega, t_\omega),$$

$$(\pi^\beta_\delta \bar{g}^\omega_\beta z_\omega, t_\delta) = (\bar{g}^\omega_\beta z_\omega, \varpi^\delta_\beta t_\delta) = (\bar{g}^\omega_\beta z_\omega, t_\beta) = (z_\omega, g^\beta_\omega t_\beta) = (z_\omega, t_\omega),$$

i.e.

$$(\pi^\alpha_\delta \bar{f}^\omega_\alpha z_\omega, t_\delta) = (\pi^\beta_\delta \bar{g}^\omega_\beta z_\omega, t_\delta)$$

pour chaque simplexe t_δ de dimension r du nerf δ. Mais cela signifie justement que

$$\pi^\alpha_\beta \bar{f}^\omega_\alpha z_\omega = \pi^\beta_\delta \bar{g}^\omega_\beta z_\omega,$$

i.e. $\bar{f}\zeta = \bar{g}\zeta$. Le lemme 2 est démontré.

Puisque dans chaque triangulation α du polyèdre P un élément quelconque $\zeta \in \nabla^r P$ doit posséder un représentant dans $\Delta^r\alpha$, le lemme 2 implique immédiatement le

Corollaire. *Si deux applications f et g du bicompact X dans le polyèdre P sont α-proches, où α est le recouvrement consistant des étoiles principales d'une triangulation (quelconque) du polyèdre P, alors les homomorphismes $\bar{f}: \nabla^r P \to \nabla^r X$ et $\bar{g}: \nabla^r P \to \nabla^r X$ coïncident.*

§ 5. Cas des compacts

1. Remarque principale. Dans le cas où le bicompact considéré est métrisable, i.e. est un compact, la situation se simplifie considérablement, puisque dans l'ensemble dirigé de tous les recouvrements α du compact, on peut trouver une partie confinale dénombrable. Pour l'obtenir, il suffit de prendre une suite quelconque de recouvrements

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots,$$

dans laquelle chaque recouvrement successif α_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, est inscrit dans le recouvrement précédent, α_k étant un ε_k-recouvrement et $\varepsilon_k \to 0$ quand $k \to \infty$.

En effet, il découle du lemme de Lebesgue (pour les recouvrements ouverts) qu'il existe, pour tout recouvrement α d'un compact Φ, un recouvrement α_k de la suite (1), inscrit dans α : il suffit de prendre un k si grand que ε_k soit le nombre de Lebesgue du recouvrement α.

En conservant dans les spectres $\{\nabla^r\alpha, \pi^{\alpha}_{\alpha'}\}$ et $\{\Delta^r\alpha, \mathfrak{w}^{\alpha'}_{\alpha}\}$ seulement les α qui figurent dans la suite (1), nous obtenons dans chacun de ces spectres une partie confinale dénombrable

$$\{\nabla^r\alpha_k, {}^r\pi^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}\} \quad \text{et} \quad \{\Delta^r\alpha_k, \mathfrak{w}^{\alpha_{k+1}}_{\alpha_k}\}.$$

2. Nouvelle démonstration de l'invariance des groupes d'homologie des polyèdres. Considérons la suite

$$(1) \qquad \alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$$

des triangulations du polyèdre Φ, dans laquelle chaque triangulation est une subdivision barycentrique de la précédente *) et la triangulation initiale $\alpha = \alpha_0$ est arbitraire. Chacune de ces triangulations α_k est le nerf du recouvrement qui consiste des étoiles ouvertes principales de la triangulation α_k ; ce recouvrement sera désigné également par α_k **). Puisque le diamètre des éléments du recouvrement α_k tend vers zéro lorsque k augmente, la suite (1) des recouvrements forme une partie confinale de l'ensemble de tous les recouvrements du polyèdre Φ. Si le sommet e_{k+1} du complexe α_{k+1} possède pour support dans α_k le simplexe T_k, alors l'étoile Oe_{k+1} est contenue dans l'étoile de chaque sommet de T_k, de sorte que le déplacement canonique σ_k de la triangulation α_{k+1} dans α_k projette le nerf α_{k+1} dans le nerf α_k et comme il a été démontré au chapitre 2, § 3, ces projections sont des isomorphismes des groupes $\Delta^r\alpha_{k+1}$ sur $\Delta^r\alpha_k$. A la suite (1) correspond dans le spectre $\{\Delta^r\alpha, \mathfrak{w}^{\beta}_{\alpha}\}$ la partie confinale

$$(2) \qquad \{\Delta^r\alpha_k, \sigma_k\},$$

tandis que les projections déterminées par les déplacements canoniques sont des isomorphismes de tous les groupes du spectre (2) l'un sur l'autre. Par conséquent, le groupe limite du spectre (2), i.e. le groupe $\Delta^r\Phi$, est isomorphe à chacun des groupes $\Delta^r\alpha_k$ et, en

---

*) Nous supposons connu le fait de géométrie élémentaire suivant (il est démontré, par exemple, dans [TC]) : si le diamètre d'un simplexe T^n de dimension n est d, alors les diamètres des simplexes de la subdivision barycentrique de T^n sont $\leqslant \frac{n}{n+1}d$; les simplexes de α_k ont donc des diamètres arbitrairement petits quand $k \to \infty$.

**) Nous désignons ainsi par une même lettre le recouvrement et son nerf. Nous avons déjà fait un pas dans cette direction (au § 1, remarque 1) et nous la suivrons par la suite.

particulier, au groupe $\Delta^r\alpha$, où α est une triangulation quelconque du polyèdre Φ.

Nous avons démontré que les groupes d'homologie $\Delta^r\alpha$ d'une triangulation α du polyèdre Φ sont isomorphes aux groupes $\Delta^r\Phi$, donnant ainsi une deuxième démonstration du théorème d'invariance des groupes d'homologie d'un polyèdre.

Soient Φ un polyèdre, α sa triangulation et Ψ l'espace sous-jacent à un certain sous-complexe fermé α' de la triangulation α. Dans ce cas, le groupe $\Delta^r(\Phi, \bmod \Psi)$ *) est isomorphe au groupe $\Delta^r(\alpha, \bmod \alpha')$, ou au groupe $\Delta^r(\alpha \setminus \alpha')$ isomorphe à ce dernier. La démonstration est tout à fait analogue à celle de l'isomorphisme des groupes $\Delta^r\Phi$ et $\Delta^r\alpha$. Esquissons-la.

Ainsi, soit α une triangulation quelconque du polyèdre Φ et aussi le recouvrement constitué par les étoiles principales de cette triangulation. Ce recouvrement découpe dans le polyèdre $\Psi = \widetilde{\alpha'}$ un recouvrement α' constitué des étoiles principales de la triangulation α' du polyèdre Ψ. Choisissons un $\eta > 0$ si petit qu'il est le nombre de Lebesgue des recouvrements α et α', et considérons seulement les k si grands que les z_k^r sont des η-cycles (modulo Ψ), η-homologues entre eux (modulo Ψ). L'application canonique d'un η-complexe quelconque dans le nerf α fait correspondre aux sommets situés dans Ψ les sommets du nerf α'. Par conséquent, tous les z_k^r sont appliqués dans des cycles du nerf α (modulo α') homologues entre eux dans α (modulo α'). Ainsi, l'application canonique dans le nerf α définit un homomorphisme du groupe $\Delta^r(\Phi, \bmod \Psi)$ dans le groupe $\Delta^r(\alpha, \bmod \alpha')$. Comme précédemment, on vérifie que cet homomorphisme est un isomorphisme du groupe $\Delta^r(\Phi, \bmod \Psi)$ sur le groupe $\Delta^r(\alpha, \bmod \alpha')$; pour cela, il faut seulement démontrer le théorème 3, § 3, chapitre 2, pour les cycles et les homologies. Mais cette démonstration ne nécessite que des modifications automatiques de nos raisonnements précédents et peut être laissée au lecteur **).

Théorème 3. *Les groupes $\Delta_c^r\Phi$ sont algébriquement* ***) *isomorphes aux groupes $\Delta^r\Phi$.*

---

*) Nous aurions pu définir ce groupe à l'aide des recouvrements, comme groupe limite du spectre $\{\Delta^r(\alpha, \bmod \Psi_\alpha), \varpi_\alpha^\beta\}$, où Ψ_α est le sous-complexe, du nerf α, consistant de tous les simplexes dont chaque sommet correspond à un élément du recouvrement α qui coupe Ψ.

**) Puisque l'étude des cycles et des homologies de α modulo α' est équivalente à l'étude des cycles et des homologies dans le sous-complexe ouvert $\alpha \setminus \alpha'$, on peut tout simplement faire un renvoi à la note à la page 121.

***) Seulement algébriquement, puisque nous n'avons pas introduit de topologie dans le groupe $\Delta_c^r\Phi$. On peut, bien sûr, munir ce dernier d'une topologie (par exemple, à l'aide de ce même théorème !) et obtenir un isomorphisme topologique.

D é m o n s t r a t i o n. On trouve l'isomorphisme cherché à l'aide des applications canoniques définies au chapitre 2, § 3.

Soit $\alpha = \{O_1, \ldots, O_s\}$ un recouvrement du compact Φ et soit η_α le nombre de Lebesgue de ce recouvrement. Prenons $\eta < \frac{1}{2}\eta_\alpha$.

Au chapitre 2, § 3, pour chaque η-cycle z^r du compact Φ nous avons défini son image canonique $\sigma_\alpha z^r \in Z^r N_\alpha$, où N_α est le nerf du recouvrement α. Choisissons un cycle convergent quelconque

$$z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots). \tag{3}$$

Tous ses éléments z_k^r, à partir d'un certain k, sont des η-cycles, tous η-homologues entre eux; donc, pour une application canonique dans le nerf α, tous les z_k^r avec k suffisamment grand déterminent la même classe d'homologie — l'élément du groupe $\Delta^r\alpha$ qui sera également désigné par $\zeta_\alpha^r = \sigma_\alpha z^r$. Deux cycles convergents homologues entre eux définissent un même élément du groupe $\Delta^r\alpha$. Par conséquent, l'application canonique σ_α du cycle convergent z^r dans le nerf N_α détermine un homomorphisme $\sigma_\alpha : \Delta_c^r\Phi \to \Delta^r N_\alpha$.

Si le recouvrement β est inscrit dans le recouvrement α, et σ_β est l'application canonique dans N_β, alors, comme on vérifie aisément, $\mathfrak{w}_\alpha^\beta \sigma_\beta$ est une application canonique dans N_α. Il en découle que l'ensemble des applications canoniques des Δ_c-cycles z^r relativement à tous les recouvrements α du compact Φ fait correspondre à chaque cycle convergent z^r les classes d'homologie $\zeta_\alpha^r \in \Delta^r\alpha$ formant les fils du spectre $\{\Delta^r\alpha, \omega_\alpha^\beta\}$; les cycles convergents homologues entre eux correspondent alors à un même fil, i.e. à un même élément du groupe $\Delta^r\Phi$. Ainsi, nous avons un homomorphisme que l'on appelle *homomorphisme d'application canonique*, ou simplement *application canonique* du groupe $\Delta_c^r\Phi$ dans le groupe $\Delta^r\Phi$.

Démontrons que cet homomorphisme est un isomorphisme.

Avant la démonstration, faisons une remarque concernant la réalisation géométrique dans Φ du nerf d'un recouvrement donné $\alpha = \{O_1, \ldots, O_s\}$. Dans ce paragraphe, nous entendrons par cette réalisation le choix, en qualité de sommets e_i du nerf α, de points de ces mêmes ensembles O_i, éléments du recouvrement α, auxquels correspondent ces sommets. Si le recouvrement donné est un ε-recouvrement (pour un certain ε donné), alors son nerf réalisé dans Φ de la manière indiquée ci-dessus est un 2ε-complexe *) du compact Φ et l'application canonique d'un complexe suffisamment fin dans le nerf α est un ε-déplacement, i.e. pour ce déplacement chaque sommet du complexe est déplacé de moins que ε.

---

*) La réalisation du nerf sera parfois entendue dans un sens plus général, voir chapitre 4, p. 209.

Passons à la démonstration du fait que l'application canonique σ du groupe $\Delta_c^r\Phi$ dans $\Delta^r\Phi$ est un isomorphisme du premier groupe dans le second. Pour cela, prenons une suite de ε_k-recouvrements du compact Φ pour $\varepsilon_k \to 0$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \tag{4}$$

où α_{k+1} est inscrit dans α_k. Cette suite est une partie confinale de l'ensemble de tous les recouvrements du compact Φ, de sorte que nous pouvons conserver dans le spectre qui détermine le groupe $\Delta^r\Phi$ seulement les recouvrements de (4); leurs nerfs sont supposés réalisés dans Φ.

Montrons tout d'abord que l'homomorphisme σ est un monomorphisme, i.e. que seul l'élément nul du groupe $\Delta_c^r\Phi$ s'applique sur l'élément nul du groupe $\Delta^r\Phi$.

Supposons que l'image du cycle convergent $z^r = \{z_k^r\}$ est l'élément nul du groupe $\Delta^r\Phi$. Démontrons que $z^r \sim 0$ dans Φ. Il découle de nos hypothèses que pour les applications canoniques dans les nerfs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$, tous les z_k^r, chaque fois à partir d'un certain numéro, sont appliqués dans des cycles homologues à zéro dans les nerfs correspondants. Supposons donné un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Choisissons un si grand k' que $\alpha_{k'}$ soit un ε-recouvrement; choisissons ensuite un si grand k_0 que pour $k \geqslant k_0$ tous les z_k^r soient des $\eta_{k'}$-cycles, où $\eta_{k'}$ est le nombre de Lebesgue du recouvrement $\alpha_{k'}$ et donc a fortiori $\eta_{k'} < \varepsilon$. Les cycles z_k^r, $k \geqslant k_0$, sont appliqués par l'application canonique relativement à $\alpha_{k'}$, dans les cycles du nerf $\alpha_{k'}$, qui leur sont 3ε-homologues, et sont homologues à zéro dans ce nerf, et donc de toute façon 2ε-homologues à zéro dans Φ. Donc tous les z_k^r à partir d'un certain k sont 3ε-homologues à zéro dans Φ. Ce qui nous montre que l'homomorphisme σ est un monomorphisme dans le groupe $\Delta^r\Phi$.

Démontrons que c'est un isomorphisme sur le groupe $\Delta^r\Phi$ tout entier. Prenons un élément quelconque du groupe $\Delta^r\Phi$, i.e. un fil $\zeta = \{\zeta_k^r\}$, $\zeta_k^r \in \Delta^r\alpha_k$. Choisissons dans chaque ζ_k^r un cycle z_k^r, alors

$$\mathfrak{w}_k^{k+1} z_{k+1}^r \sim z_k^r \text{ dans } \alpha_k \tag{5}$$

(nous écrivons $\mathfrak{w}_k^{k+1}$ à la place de $\mathfrak{w}_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}$) et les nerfs α_k sont réalisés dans Φ. La projection $\mathfrak{w}_k^{k+1}$ est un ε_k-déplacement et l'homologie (5) une $3\varepsilon_k$-homologie; par conséquent, $z^r = \{z_k^r\}$ est un cycle convergent du compact Φ que l'application canonique envoie sur lui-même, d'où l'on déduit que σ est une surjection du groupe $\Delta_c^r\Phi$ sur $\Delta^r\Phi$.

L'isomorphisme des groupes $\Delta^r\Phi$ et $\Delta_c^r\Phi$ est établi.

§ 6. Définition des Δ- et ∇-groupes d'un espace localement bicompact

Soit Γ un espace de Hausdorff localement bicompact. Considérons l'ensemble B de tous ses recouvrements (ouverts finis). L'élément O_i du recouvrement β sera dit *intérieur*, si son adhérence est bicompacte, et appelons le sommet correspondant e_i du nerf $|\beta|$, *sommet intérieur*. La réunion des adhérences de tous les éléments intérieurs du recouvrement β sera désignée par F_β.

Introduisons un ordre dans l'ensemble B en supposant que $\beta' > \beta$ si le recouvrement β' est inscrit dans β et, en outre, $F_{\beta'} \supseteq F_\beta$. L'ensemble B muni de l'ordre indiqué est un ensemble dirigé, puisque pour deux recouvrements β et β', leur intersection $\beta \wedge \beta'$ est inscrite aussi bien dans β que dans β', et évidemment $F_{\beta\wedge\beta'} \supseteq F_\beta \cup F_{\beta'}$.

Pour un bicompact Γ l'ordre introduit dans l'ensemble B coïncide avec l'ordre usuel.

Désignons par βG le sous-complexe (ouvert) du nerf $|\beta|$ qui est la réunion des étoiles de tous les sommets intérieurs du nerf $|\beta|$. Le sous-complexe fermé $|\beta| \setminus \beta G$ sera désigné par βA.

Comme tout sous-complexe ouvert (chapitre 1, § 2), βG possède une structure naturelle de complexe cellulaire à opérateurs de frontière $\Delta_G = J^\beta_{\beta G}\, \Delta E^{\beta G}_\beta$ et $\nabla_G = J^\beta_{\beta G}\, \nabla E^{\beta G}_\beta$. Par conséquent, les groupes d'homologie $\Delta^r \beta G$ et de cohomologie $\nabla^r \beta G$ du complexe βG sont définis. Lorsque $\beta' > \beta$, les applications simpliciales naturelles (projections) $\varpi^{\beta'}_\beta : |\beta'| \to |\beta|$ sont également définies. Il y en a, en général, beaucoup, mais elles sont combinatoirement proches entre elles, puisqu'elles sont définies par un recouvrement β' inscrit dans β; en outre, $(\varpi^{\beta'}_\beta)^{-1}\, \beta G \subseteq \beta' G$ (puisque seuls les sommets intérieurs du nerf $|\beta'|$ peuvent être les images inverses, par la projection $\varpi^{\beta'}_\beta$, des sommets intérieurs du nerf $|\beta|$) et toutes les applications $\varpi^{\beta'}_\beta : \beta' A \to \beta A$ sont combinatoirement proches. Par conséquent, les projections $\varpi^{\beta'}_\beta : |\beta'| \to |\beta|$ induisent les homomorphismes (voir chapitre 5, § 2, n° 1)

$$\varpi G^{\beta'}_\beta : \Delta^r \beta' G \to \Delta^r \beta G \quad \text{et} \quad \pi G^\beta_{\beta'} : \nabla^r_\beta G \to \nabla^r \beta' G,$$

qui ne dépendent pas du choix de la projection $\varpi^{\beta'}_\beta : |\beta'| \to |\beta|$ (voir chapitre 5, § 2, lemme 3); puisque les groupes de coefficients des groupes $\Delta^r \beta G$ et $\nabla^r \beta G$ sont duaux, les homomorphismes $\varpi G^{\beta'}_\beta$ et $\pi G^\beta_{\beta'}$ le sont aussi (voir chapitre 5, § 2, définition de l'homomorphisme $\overline{f}_G$).

Ainsi, les spectres suivants sont définis:

$$\text{inverse } \Sigma = \{\Delta^r \beta G,\ \varpi G_\beta^{\beta''}\},\ \beta \in \mathrm{B},$$

$$\text{direct } \overline{\Sigma} = \{\nabla^r \beta G,\ \pi G_{\beta''}^{\beta}\},\ \beta \in \mathrm{B}.$$

Désignons leurs limites respectivement par $\Delta^r\Gamma$ et $\nabla^r\Gamma$ (plus correctement, $\Delta^r(\Gamma, \mathfrak{A})$ et $\nabla^r(\Gamma, \mathfrak{B})$, où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont les groupes de coefficients) et appelons-les respectivement *groupe d'homologie* (Δ-*groupe*) *de dimension r et groupe de cohomologie* (∇-*groupe*) *de dimension r de l'espace localement bicompact* Γ.

Si Γ est un bicompact, alors les groupes que nous venons de définir coïncident avec les Δ- et ∇-groupes du bicompact Γ introduits au § 1.

Tout ce qui a été dit au § 1, en particulier, la remarque 2, concernant la définition des groupes $\Delta^r X$ et $\nabla^r X$ du bicompact X, reste en vigueur (avec les modifications évidentes) pour un espace localement bicompact Γ.

R e m a r q u e. Si B_0 est l'ensemble de tous les recouvrements ouverts finis de l'espace Γ avec l'ordre usuel de cet ensemble, alors, pour les mêmes raisons que précédemment, les spectres suivants sont définis:

$$\text{inverse } \Sigma_0 = \{\Delta^r \beta G,\ \varpi G_\beta^{\beta'}\},\ \beta \in \mathrm{B}_0,$$

$$\text{direct } \overline{\Sigma}_0 = \{\nabla^r \beta G,\ \pi G_{\beta'}^{\beta}\},\ \beta \in \mathrm{B}_0.$$

Puisque l'ensemble dirigé B s'obtient de B_0 en prenant un ordre plus faible, on peut considérer les groupes $\Delta^r\Gamma$ et $\nabla^r\Gamma$ comme étant les limites des spectres Σ_0 et $\overline{\Sigma}_0$ respectivement (Supplément, § 1, propositions 2 et $\overline{2}$).

§ 7. Homomorphismes liés à la figure X, Φ, Γ

Supposons donnés un bicompact X et un bicompact Φ qu'il contient, et l'ensemble ouvert $\Gamma = X \setminus \Phi$. Notre but immédiat consiste à définir les homomorphismes

$$\text{d'intersection } J_\Gamma^X:\ \Delta^r X \to \Delta^r \Gamma,$$

$$\text{d'inclusion } E_X^\Gamma:\ \nabla^r \Gamma \to \nabla^r X,$$

ainsi que les homomorphismes de frontière

$$\partial:\ \Delta^r\Gamma \to \Delta^{r-1}\Phi,\ \delta:\ \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla^r\Gamma.$$

Mais avant il nous faudra faire quelques remarques et démontrer quelques assertions auxiliaires.

1. Lemmes. Les groupes Δ_Γ^r et ∇_Γ^r et leur isomorphie aux groupes $\Delta^r\Gamma$ et $\nabla^r\Gamma$. L'ensemble de tous les recouvrements α (ouverts

finis) du bicompact X avec l'ordre usuel sera désigné par A, et l'ensemble de tous les recouvrements λ du bicompact Φ avec l'ordre usuel sera désigné par Λ, et enfin, l'ensemble des recouvrements β de l'espace localement bicompact Γ avec l'ordre indiqué au paragraphe précédent sera désigné par B.

Notons Λ^* l'ensemble (ordonné par la relation d'inscription) de tous les recouvrements $\lambda \in \Lambda$ qui peuvent être prolongés à un recouvrement semblable *) ω_λ d'un certain voisinage $O_\lambda\Phi$ de l'ensemble Φ.

Lemme 1. *L'ensemble Λ^* forme une partie confinale de l'ensemble dirigé Λ; il est donc lui-même dirigé.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons un recouvrement quelconque $\lambda \in \Lambda$. Soit μ un recouvrement fermé du bicompact Φ combinatoirement proche de λ. « Agrandissons » le système μ à un système semblable $\omega_{\lambda'}$ d'ensembles ouverts dans X (voir [AP], p. 67). On peut évidemment supposer que le recouvrement λ' découpé par le système $\omega_{\lambda'}$ dans Φ est inscrit dans λ. Il est clair que $\lambda' \in \Lambda^*$. Le lemme est démontré.

Le lemme 1 permet de considérer les groupes $\Delta^r\Phi$ et $\nabla^r\Phi$ comme étant les limites des spectres $S_\Phi = \{\Delta^r\lambda, \varpi_\lambda^{\lambda'}\}$, $\lambda \in \Lambda^*$, et $\overline{S}_\Phi = \{\nabla^r\lambda, \pi_{\lambda'}^{\lambda}\}$, $\lambda \in \Lambda^*$ (voir Supplément, n°s 3, 4), ce que nous ferons par la suite.

Désignons par α le recouvrement dont les éléments sont les adhérences des éléments du recouvrement α. Désignons par F_α la réunion des éléments de $\overline{\alpha}$ situés dans Γ. Prenons un ordre plus faible dans A en supposant que $\alpha' \geqslant \alpha$ si le recouvrement α' est inscrit dans α et $F_{\alpha'} \supseteq F_\alpha$. L'ensemble A avec l'ordre indiqué sera désigné par A_Γ.

Lemme 2. *L'ensemble A_Γ est dirigé.*

D é m o n s t r a t i o n. Choisissons arbitrairement les recouvrements α et α'. Leur produit $\alpha \wedge \alpha'$ est inscrit dans chacun d'eux et $F_{\alpha\wedge\alpha'} \supseteq F_\alpha \cup F_{\alpha'}$. Le lemme est démontré.

Les propositions 2 et $\overline{2}$ du Supplément au présent chapitre permettent maintenant d'envisager les groupes $\Delta^r X$ et $\nabla^r X$ comme limites des spectres

$$\{\Delta^r\alpha, \varpi_\alpha^{\alpha'}\}, \quad \alpha \in A_\Gamma \quad \text{et} \quad \{\nabla^r\alpha, \pi_{\alpha'}^{\alpha}\}, \quad \alpha \in A_\Gamma.$$

En outre, si nous désignons, par analogie avec le paragraphe précédent, par αG le sous-complexe ouvert du complexe $|\alpha|$ constitué des étoiles de ceux des sommets de ce complexe qui correspondent aux éléments du recouvrement α contenus avec leurs adhérences dans Γ, alors pour $\alpha' \geqslant \alpha$ et pour toute proiection $\varpi_\alpha^{\alpha'}: |\alpha'| \to |\alpha|$

*) I. e. possédant le même erf.

nous avons l'inclusion $(\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'})^{-1}\,\alpha G \supseteq \alpha' G$. Désignons par

$$\mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha'} : \Delta^r\alpha' G \to \Delta^r\alpha G \quad \text{et} \quad \pi G_{\alpha'}^{\alpha} : \nabla^r\alpha G \to \nabla^r\alpha' G$$

les homomorphismes induits par les projections $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'} : |\alpha'| \to |\alpha|$ (voir chapitre 5, § 2, n° 1). D'après les mêmes considérations que dans le paragraphe précédent, nous obtenons les spectres:

$$\text{inverse } S_\Gamma = \{\Delta^r\alpha G,\ \mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha'}\}, \quad \alpha \in A_\Gamma,$$

$$\text{direct } \bar{S}_\Gamma = \{\nabla^r\alpha G,\ \pi G_{\alpha'}^{\alpha}\}, \quad \alpha \in A_\Gamma$$

dont les limites seront désignées respectivement par Δ_Γ^r et ∇_Γ^r, $r = 0, 1, 2, \ldots$

Pour le recouvrement $\alpha \in A_\Gamma$ nous désignerons par $\Phi\alpha$ et $\Gamma\alpha$ les recouvrements découpés respectivement dans Φ et dans Γ par le recouvrement α. Notons $\omega(\alpha)$ le système de tous les éléments du recouvrement α dont les intersections avec Φ sont non vides. Désignons par A^* l'ensemble de tous les recouvrements α pour lesquels le système $\omega(\alpha)$ est un prolongement semblable du recouvrement $\Phi\alpha$ (donc $\Phi\alpha \in \Lambda^*$). En effet, désignons par A'' l'ensemble des recouvrements $\alpha \in A^*$ pour lesquels

1) les éléments du recouvrement α contenus dans Γ forment un recouvrement $\beta = \beta(\alpha)$ de l'ensemble Γ;

2) les éléments du système $\omega(\alpha)$ n'intersectent pas l'ensemble F_α $(\equiv F_{\beta(\alpha)})$.

Lemme 3. *L'ensemble* A'' *est une partie confinale de l'ensemble* A_Γ.

D é m o n s t r a t i o n. Prenons un recouvrement quelconque $\alpha \in A_\Gamma$.

Inscrivons d'après le lemme 1 le recouvrement $\lambda \in \Lambda^*$ dans le recouvrement $\Phi\alpha$ et prolongeons λ semblablement (en conservant la propriété d'être inscrit dans le recouvrement α) dans un recouvrement ω_λ d'un certain voisinage $O_\lambda\Phi$ du bicompact Φ. On peut évidemment supposer que $O_\lambda\Phi \cap F_{\Gamma\alpha} = \Lambda$. Le recouvrement α'' constitué des éléments du recouvrement $\Gamma\alpha$ de l'ensemble Γ et des éléments du système ω_λ est inscrit dans le recouvrement α et $F_{\alpha''} \equiv \equiv F_{\Gamma\alpha} \supseteq F_\alpha$. Le lemme est démontré.

Désignons par A' l'ensemble des recouvrements $\alpha \in A^*$ pour lesquels:

1) les éléments du recouvrement α contenus dans Γ y sont contenus avec leurs adhérences,

2) l'intersection avec Γ de tout élément du système $\omega(\alpha)$ donne un élément non intérieur du recouvrement $\beta = \Gamma\alpha$.

Lemme 4. *L'ensemble* A' *est une partie confinale de l'ensemble* A_Γ.

D é m o n s t r a t i o n. Comme dans le lemme 3, inscrivons pour un $\alpha \in A_\Gamma$ quelconque le recouvrement $\Phi\alpha$ dans $\lambda \in \Lambda^*$ et

prolongeons λ semblablement (en conservant la propriété d'être inscrit dans α) dans un recouvrement ω_λ d'un certain voisinage $O_\lambda\Phi$ du bicompact Φ. On peut alors supposer que pour chaque élément V du système ω_λ l'ensemble $[V \cap \Gamma]$ n'est pas contenu dans Γ (autrement nous aurions remplacé V par $V \setminus [V \cap \Gamma]$. On peut évidemment supposer $O_\lambda\Phi \cap F_\alpha = \Lambda$. Prenons un voisinage U du bicompact Φ avec $[U] \subseteq O_\lambda\Phi$. Le recouvrement α', qui consiste des éléments du système ω_λ et des différences entre les éléments du recouvrement α et l'ensemble $[U]$, est inscrit dans α, et, puisque $O_\lambda\Phi \cap F_\alpha = \Lambda$ on a $F_{\alpha'} \supseteq F_\alpha$. Le lemme est démontré.

Le lemme 4 et les propositions 2 et $\overline{2}$ du Supplément permettent de considérer les groupes $\Delta^r X$ et $\nabla^r X$ comme étant les limites des spectres

$$S' = \{\Delta^r\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}\}, \quad \alpha \in A', \quad \text{et} \quad \overline{S}' = \{\nabla^r\alpha, \pi_{\alpha'}^{\alpha}\}, \quad \alpha \in A',$$

ce que nous ferons par la suite. En outre, les lemmes 3, 4 et les propositions 2 et $\overline{2}$ du Supplément permettent de considérer les groupes Δ_Γ^r et ∇_Γ^r comme étant les limites des spectres

$$S'_\Gamma = \{\Delta^r\alpha G, \mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha'}\}, \quad \alpha \in A', \quad \text{et} \quad \overline{S}'_\Gamma = \{\nabla^r\alpha G, \pi G_{\alpha'}^{\alpha}\}, \quad \alpha \in A',$$

et permettent d'affirmer que les limites des spectres S'_Γ et

$$S''_\Gamma = \{\Delta^r\alpha G, \mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha'}\}, \quad \alpha \in A'',$$

d'une part et des spectres $\overline{S}'_\Gamma$ et

$$\overline{S}''_\Gamma = \{\nabla^r\alpha G, \pi_{\alpha'}^{\alpha}\}, \quad \alpha \in A'',$$

d'autre part sont isomorphes. L'isomorphisme (déterminé dans la proposition 2 du Supplément) de la limite $\Delta_\Gamma^{r\prime}$ du spectre S''_Γ sur le groupe Δ_Γ^r (envisagé comme étant la limite du spectre S'_Γ) sera désigné par h; l'isomorphisme défini dans la proposition $\overline{2}$ du Supplément et appliquant le groupe ∇_Γ^r (envisagé comme la limite du spectre $\overline{S}'_\Gamma$) sur la limite $\nabla_\Gamma^{r\prime}$ du spectre $\overline{S}''_\Gamma$ sera désigné par $\overline{h}$. Décrivons ces isomorphismes.

Nous désignerons par $\alpha'' = \alpha''(\alpha)$, pour le recouvrement $\alpha \in A'$, le recouvrement obtenu de α de la manière suivante: les éléments de α'' seront les éléments du recouvrement $\Gamma\alpha$ de l'ensemble Γ et les différences non vides des éléments du recouvrement α et de l'ensemble F_α. Puisque $\alpha \in A'$, on a $F_\alpha = F_{\Gamma\alpha}$. Donc $\alpha''(\alpha) \in A''$.

Remarquons que pour $\alpha'' = \alpha''(\alpha)$ les projections

$$\mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha''} : \Delta^r\alpha''G \to \Delta^r\alpha G \quad \text{et} \quad \pi G_{\alpha''}^{\alpha} : \nabla^r\alpha G \to \nabla^r\alpha''G$$

sont isomorphes. En effet, fixons la projection $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha''} : |\alpha''| \to |\alpha|$ en la définissant aux sommets du complexe $|\alpha''|$ de la manière suivante: notons les éléments du recouvrement et les sommets

correspondants de son nerf par un même symbole et posons $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha''}(O \cap \Gamma) = O$ et $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha''}(O \setminus F_\alpha) = O$, $O \in \alpha$. On voit facilement que la projection $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha''}$ induit un isomorphisme du complexe $\alpha''G$ sur le complexe αG, et $(\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha''})^{-1}\alpha G = \alpha''G$. Dans ces conditions, les projections

$$\mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha''}: \Delta^r\alpha''G \to \Delta^r\alpha G \quad \text{et} \quad \pi G_{\alpha''}^{\alpha}: \nabla^r\alpha G \to \nabla^r\alpha''G$$

sont évidemment des isomorphismes.

Les isomorphismes h et $\bar{h}$ peuvent être décrits de la manière suivante. Pour un fil $\xi = \{\xi_\alpha'', \alpha \in A''\}$ du spectre S_Γ'', le fil $h\xi$ sera de la forme $\{\xi_\alpha', \alpha \in A': \xi_\alpha' = \mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha''}\xi_{\alpha''}'', \alpha'' = \alpha''(\alpha)\}$ et pour la ∇-classe ζ du spectre $\bar{S}_\Gamma'$ la ∇-classe $\bar{h}\zeta$ se définit par un élément quelconque de la forme $\pi G_{\alpha''}^{\alpha}\zeta_\alpha$, $\zeta_\alpha \in \zeta$, $\alpha \in A'$, $\alpha'' = \alpha''(\alpha)$.

Théorème 4. *Les groupes* Δ_Γ^r *et* $\Delta^r\Gamma$, ∇_Γ^r *et* $\nabla^r\Gamma$ *sont isomorphes.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit d'établir l'isomorphisme des limites des spectres S_Γ'' et Σ, respectivement $\bar{S}_\Gamma''$ et $\bar{\Sigma}$ (p. 326). Définissons l'application $\psi: A'' \to B$ en posant $\psi\alpha = \beta(\alpha)$ (voir n° 1, définition de l'ensemble A''). Cette application sera surjective.

En effet, un recouvrement quelconque β est $\beta(\alpha)$, par exemple, pour le recouvrement $\alpha \in A''$, qui consiste des éléments du recouvrement β et de l'ensemble $X \setminus F_\beta$.

Montrons maintenant que l'application ψ satisfait à la condition (1) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément.

Soient $\alpha \in \psi^{-1}\beta$, $\alpha' \in \psi^{-1}\beta'$. Posons $\beta'' = \beta \wedge \beta'$. Inscrivons dans le recouvrement $\Phi\alpha \wedge \Phi\alpha'$ le recouvrement $\lambda \in \Lambda^*$ et prolongeons ensuite λ semblablement (de sorte qu'il reste toujours inscrit dans $\alpha \wedge \alpha'$) dans un recouvrement ouvert ω_λ d'un tel voisinage $O_\lambda\Phi$ de l'ensemble Φ que $O_\lambda\Phi \cap F_{\beta''} = \Lambda$. Le recouvremen $\alpha'' = \omega_\lambda \cup \beta''$ sera inscrit dans α et α', $F_{\alpha''} \equiv F_{\beta''} \supseteq F_\beta \cup F_{\beta'} \equiv F_\alpha \cup F_{\alpha'}$, $\alpha'' \in A''$ et $\beta(\alpha'') = \beta''$, i.e. $\beta'' = \psi\alpha''$.

Ainsi la condition (1) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément est satisfaite.

Pour le recouvrement $\alpha \in A''$, le recouvrement $\beta = \beta(\alpha)$ de l'ensemble Γ est un sous-système du système α et on a donc une inclusion naturelle i_α^β du nerf $|\beta|$ dans le nerf $|\alpha|$. Cette inclusion est un isomorphisme de βG sur αG *et* $(i_\alpha^\beta)^{-1}\beta G = \alpha G$, l'inclusion i_α^β induit donc les isomorphismes $i_\beta^\alpha: \Delta^r\alpha G \to \Delta^r\beta G$ et $\bar{i}_\alpha^\beta: \nabla^r\beta G \to \nabla^r\alpha G$ *).

Si $\beta = \beta(\alpha)$, $\beta' = \beta(\alpha')$ et $\beta' > \beta$, $\alpha' > \alpha$, alors chaque projection $\mathfrak{w}_\beta^{\beta'}: |\beta'| \to |\beta|$ peut être prolongée dans une certaine projection

*) Plus exactement, les isomorphismes i_β^α et $\bar{i}_\alpha^\beta$ sont inverses des isomorphismes induits par l'inclusion i_α^β.

$\mathfrak{w}_{\alpha}^{\alpha'}: |\alpha'| \to |\alpha|$, en supposant $|\beta| \subseteq |\alpha|$, $|\beta'| \subseteq |\alpha'|$; il est évident que les homomorphismes $\mathfrak{w}G_{\alpha}^{\alpha'}$ et $\mathfrak{w}G_{\beta}^{\beta'}$, ainsi que $\pi G_{\alpha'}^{\alpha}$ et $\pi G_{\beta'}^{\beta}$ coïncident tout simplement, si l'on identifie les groupes $\Delta^r\alpha G$ et $\Delta^r\beta G$, $\Delta^r\alpha' G$ et $\Delta^r\beta' G$, $\nabla^r\beta G$ et $\nabla^r\alpha G$, $\nabla^r\beta' G$ et $\nabla^r\alpha' G$ respectivement à l'aide des isomorphismes i_{β}^{α}, $i_{\beta'}^{\alpha'}$, $\bar{i}_{\alpha}^{\beta}$, $\bar{i}_{\alpha'}^{\beta'}$.

Autrement dit, on a les relations

$$i_{\beta}^{\alpha}\mathfrak{w}G_{\alpha}^{\alpha'} = \mathfrak{w}G_{\beta}^{\beta'}i_{\beta'}^{\alpha'} \quad \text{et} \quad \pi G_{\alpha'}^{\alpha}\cdot\bar{i}_{\alpha}^{\beta} = \bar{i}_{\alpha'}^{\beta'}\pi G_{\beta'}^{\beta}$$

i.e. les conditions (2) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément sont également satisfaites. On tire de ces lemmes:

1) les homomorphismes continus $i_{\beta}: \Delta_{\Gamma}^{r} \to \Delta^r\beta$ et les homomorphismes $\bar{i}^{\beta}: \nabla^r\beta \to \nabla_{\Gamma}^{r}$ sont définis; ils vérifient respectivement les conditions

$$i_{\beta} = \mathfrak{w}G_{\beta}^{\beta'}i_{\beta'} \quad \text{et} \quad \bar{i}^{\beta} = \bar{i}^{\beta'}\pi G_{\beta'}^{\beta}$$

pour $\beta' > \beta$;

2) l'homomorphisme continu $i: \Delta_{\Gamma}^{r} \to \Delta^r\Gamma$ est défini et satisfait aux conditions

$$\mathfrak{w}G_{\beta}i = i_{\beta}, \qquad \beta \in B;$$

3) l'homomorphisme $\bar{i}: \nabla^r\Gamma \to \nabla_{\Gamma}^{r}$ est défini; il satisfait à

$$\bar{i}\pi G^{\beta} = \bar{i}^{\beta}, \qquad \beta \in B.$$

Les applications i_{β}^{α} et $\bar{i}_{\alpha}^{\beta}$ sont des isomorphismes et donc, en vertu des remarques 2 et $\bar{2}$ du Supplément, les homomorphismes i et $\bar{i}$ le sont aussi.

Enfin, les applications $j = hi^{-1}$ et $\bar{j} = \bar{i}^{-1}\bar{h}$ sont des isomorphismes du groupe $\Delta^r\Gamma$ sur Δ_{Γ}^{r} et, respectivement, du groupe ∇_{Γ}^{r} sur $\nabla^r\Gamma$. Le théorème est démontré.

Décrivons les isomorphismes j et $\bar{j}$ sans faire appel aux isomorphismes h, i et $\bar{h}$, $\bar{i}$.

Pour un recouvrement quelconque $\alpha \in A'$, définissons l'application simpliciale $j_{\alpha}^{\beta}: |\beta| \to |\alpha|$, $\beta = \Gamma\alpha$ en la définissant aux sommets du complexe β ainsi (les sommets du nerf du recouvrement sont désignés par les mêmes symboles que les éléments du recouvrement correspondants): $j_{\alpha}^{\beta}(O \cap \Gamma) = O$, $O \in \alpha$, $O \cap \Gamma \neq \Lambda$. On tire de la définition de l'ensemble A' que l'application j_{α}^{β} est une inclusion (i.e. un isomorphisme de $|\beta|$ dans $|\alpha|$ et $(j_{\alpha}^{\beta})^{-1}\ \alpha G = \beta G$. Par conséquent, l'application j_{α}^{β} induit les isomorphismes

$$j_{\alpha}^{\beta}: \Delta^r\beta G \to \Delta^r\alpha G \quad \text{et} \quad \bar{j}_{\beta}^{\alpha}: \nabla^r\alpha G \to \nabla^r\beta G.$$

On voit facilement que $\beta = \Gamma\alpha$ est $\beta(\alpha'')$ pour $\alpha'' = \alpha''(\alpha)$ et $j_\alpha^\beta = \mathfrak{G}G_\alpha^{\alpha''}(i_\beta^{\alpha''})^{-1}$, $\bar{j}_\beta^\alpha = (\bar{i}_{\alpha''}^\beta)^{-1}\pi G_{\alpha''}^\alpha$ *).

Ainsi, pour le fil $\xi_\Gamma = \{\xi_\beta, \beta \in B\}$ du spectre Σ, le fil $j\xi_\Gamma = hi^{-1}\xi$ du spectre S'_Γ est de la forme $\{\xi_\alpha, \alpha \in A' : \xi_\alpha = \mathfrak{G}G_\alpha^{\alpha''}(i_\beta^{\alpha''})^{-1}\xi_\beta = j_\alpha^\beta \xi_\beta, \alpha'' = \alpha''(\alpha), \beta = \beta(\alpha'') = \Gamma\alpha\}$ et pour la ∇-classe ζ du spectre $\bar{S}'_\Gamma$ la ∇-classe $\bar{j}\zeta = \bar{i}^{-1}\bar{h}\zeta$ se détermine par un élément quelconque de la forme

$$(\bar{i}_{\alpha''}^\beta)^{-1}\pi G_{\alpha''}^\alpha \zeta_\alpha = \bar{j}_\beta^\alpha \zeta_\alpha, \ \zeta_\alpha \in \zeta, \alpha'' = \alpha''(\alpha), \beta = \beta(\alpha'') = \Gamma\alpha$$

En même temps j est un isomorphisme, et donc pour le fil $\xi = \{\xi_\alpha, \alpha \in A'\}$ du spectre S'_Γ le fil $j^{-1}\xi = ih^{-1}\xi$ sera l'unique fil du spectre Σ qui contient tous les éléments de la forme

$$(j_\alpha^\beta)^{-1}\xi_\alpha = i_\beta^{\alpha''}(\mathfrak{G}G_\alpha^{\alpha''})^{-1}\xi_\alpha, \ \alpha \in A',$$

$$\alpha'' = \alpha''(\alpha), \ \beta = \Gamma\alpha = \beta(\alpha').$$

Pour la ∇-classe ζ_Γ du spectre $\bar{\Sigma}$ la ∇-classe $\bar{j}^{-1}\zeta_\Gamma$ se définit par un élément quelconque de la forme

$$(\bar{j}_\beta^\alpha)^{-1}\zeta_\beta = (\pi G_{\alpha''}^\alpha)^{-1}\bar{i}_{\alpha''}^\beta \zeta_\beta, \ \zeta_\beta \in \zeta_\Gamma, \ \beta = \Gamma\alpha = \beta(\alpha''), \ \alpha'' = \alpha''(\alpha).$$

2. Définition des homomorphismes $J_\Gamma^X : \Delta^r X \to \Delta^r \Gamma$ **et** $E_X^\Gamma : \nabla^r \Gamma \to \nabla^r X$. D'après les isomorphismes du théorème 4 démontré, on peut se servir des groupes Δ_Γ^r et ∇_Γ^r à la place des groupes $\Delta^r\Gamma$ et $\nabla^r\Gamma$, en les considérant comme les limites des spectres S'_Γ et $\bar{S}'_\Gamma$. Les groupes $\Delta^r X$ et $\nabla^r X$, $\Delta^r\Phi$ et $\nabla^r\Phi$ seront envisagés comme les limites des spectres S' et $\bar{S}'$, S_Φ et $\bar{S}_\Phi$ respectivement. Les recouvrements $\alpha \in A'$ présentent l'avantage suivant: pour l'inclusion naturelle de $|\Phi\alpha|$ dans $|\alpha|$ et l'inclusion $j_\alpha^{\Gamma\alpha} : |\Gamma\alpha| \to |\alpha|$ on obtient une identification des nerfs $|\lambda|$, $\lambda = \Phi\alpha$, et $|\beta|$, $\beta = \Gamma\alpha$, sans éléments superflus: $\beta G = \alpha G$ et $|\alpha| \setminus \alpha G = |\lambda|$. Cette remarque permet d'appliquer les homomorphismes d'inclusion et d'intersection considérés précédemment (voir chapitre 1, § 3, p. 30), ainsi que les homomorphismes de frontière des complexes; en outre, cette remarque permet de se servir par la suite du théorème 2 (§ 2, chapitre 5).

L'application identique de l'ensemble A' sur lui-même satisfait évidemment à la condition 1) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément, et en outre (voir chapitre 5, § 2, théorème fondamental 2),

$$\mathfrak{G}G_\alpha^{\alpha_1} J_{\alpha_1 G}^\alpha = J_{\alpha G}^\alpha \mathfrak{G}_\alpha^{\alpha_1} \text{ et } E_{\alpha_1}^{\alpha_1 G}\pi G_{\alpha_1}^\alpha = \pi_{\alpha_1}^\alpha E_\alpha^{\alpha G}$$

---

*) Voir la remarque à la page 79.

pour $\alpha_1 > \alpha$ (puisque $(\mathfrak{G}_\alpha^{\alpha_1})^{-1}\alpha G \subseteq \alpha_1 G$). Les lemmes 2 et $\overline{2}$ du Supplément permettent donc d'introduire :

1) les homomorphismes continus $J_{\alpha G}^X$: $\Delta^r X \to \Delta^r \alpha G$ et les homomorphismes $E_X^{\alpha G}$: $\nabla^r \alpha G \to \nabla^r X$, $\alpha \in A'$, qui vérifient

$$J_{\alpha G}^X = \mathfrak{G} G_\alpha^{\alpha_1} J_{\alpha_1 G}^X \text{ et } E_X^{\alpha G} = E_X^{\alpha_1 G} \pi G_{\alpha_1}^\alpha$$

pour $\alpha_1 > \alpha$;

2) les homomorphismes continus $J_\Gamma'^X$: $\Delta^r X \to \Delta_\Gamma^r$ et les homomorphismes $E_X'^\Gamma$: $\nabla_\Gamma^r \to \nabla^r X$ qui vérifient :

$$\mathfrak{G} G_\alpha J_\Gamma'^X = J_{\alpha G}^X \text{ et } E_X'^\Gamma \pi G^\alpha = E_X^{\alpha G}, \ \alpha \in A'.$$

Il est évident que l'homomorphisme $J_\Gamma'^X$ fait correspondre au fil $\xi = \{\xi_\alpha, \alpha \in A'\}$ du spectre S' le fil $\{\xi_{\alpha G}, \alpha \in A' : \xi_{\alpha G} = J_{\alpha G}^\alpha \xi_\alpha\}$ du spectre S_Γ', tandis que l'homomorphisme $E_X'^\Gamma$ fait correspondre à la ∇-classe ζ du spectre $\overline{S}_\Gamma'$ la ∇-classe du spectre $\overline{S}'$ déterminée par un élément quelconque de la forme $E_\alpha^{\alpha G}\zeta_\alpha$, $\alpha \in A'$, $\zeta_\alpha \in \zeta$.

Posons

$$J_\Gamma^X = j^{-1} J_\Gamma'^X \text{ et } E_X^\Gamma = E_X'^\Gamma \bar{j}^{-1}.$$

Il découle de la description des homomorphismes j^{-1}, $J_\Gamma'^X$, $E_X'^\Gamma$, $\bar{j}^{-1}$, que

1) l'homomorphisme J_Γ^X fait correspondre au fil $\xi = \{\xi_\alpha, \alpha \in A'\}$ du spectre S' l'unique fil du spectre Σ qui contient tous les éléments de la forme

$$(j_\alpha^\beta)^{-1} J_{\alpha G}^\alpha \xi_\alpha, \ \alpha \in A', \ \beta = \Gamma\alpha ;$$

2) l'homomorphisme E_X^Γ fait correspondre à la ∇-classe ζ du spectre $\overline{\Sigma}$ la ∇-classe du spectre $\overline{S}'$ définie par un élément quelconque de la forme $E_\alpha^{\alpha G} (\bar{j}_\beta^\alpha)^{-1} \zeta_\beta$, $\alpha \in A'$, $\beta = \Gamma\alpha$, $\zeta_\beta \in \zeta$.

3. Définition des homomorphismes $\partial : \Delta^r\Gamma \to \Delta^{r-1}\Phi$ et $\delta : \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla^r\Gamma$. Définissons d'abord les homomorphismes $\partial' : \Delta_\Gamma^r \to \Delta^{r-1}\Phi$ et $\delta' : \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla_\Gamma^r$.

Posons $\chi\alpha = \Phi\alpha$ pour $\alpha \in A'$. L'application χ: $A' \to \Lambda^*$ ainsi définie est surjective. En effet, un recouvrement arbitraire $\lambda \in \Lambda^*$ peut être prolongé combinatoirement en un recouvrement ω_λ d'un certain voisinage $O_\lambda\Phi$ de l'ensemble Φ. On peut encore supposer que l'intersection d'un élément quelconque du système ω_λ avec Γ n'est pas contenue dans Γ avec son adhérence. Le recouvrement α qui consiste des éléments du système ω_λ et du voisinage $V \subseteq [V] \subseteq \Gamma$ de l'ensemble $X \setminus O_\lambda\Phi$ appartient au système A' et $\Phi\alpha = \lambda$, i.e. $\lambda = \chi\alpha$.

L'application χ satisfait à la condition 1) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément. En effet, soient λ et $\lambda_1 \in \Lambda^*$, $\lambda = \Phi\alpha$ et $\lambda_1 = \Phi\alpha_1$. Choisissons un recouvrement $\lambda_2 > \lambda \wedge \lambda_1$, $\lambda_2 \in \Lambda^*$. On peut le prolonger combinatoirement en un recouvrement ω_{λ_2} d'un certain voisinage $O_{\lambda_2}\Phi$ de l'ensemble Φ tel que : le système ω_{λ_2} sera inscrit dans le recouvrement $\alpha \wedge \alpha_1$; pour chaque élément U du système ω_{λ_2} on a $U \cap \Gamma = \Lambda$ ou $[U \cap \Gamma] \nsubseteq \Gamma$, et, enfin $O_{\lambda_2}\Phi \cap (F_\alpha \cup F_{\alpha_1}) = \Lambda$. Si le recouvrement α_2 consiste des éléments du système ω_{λ_2} et des différences entre les éléments du recouvrement $\alpha \wedge \alpha_1$ et l'adhérence du voisinage $V \subseteq [V] \subseteq O_\lambda\Phi$ de l'ensemble Φ, il est clair que

$$\alpha_2 \in A', \ \Phi\alpha_2 = \lambda_2, \quad \alpha_2 > \alpha, \quad \alpha_2 > \alpha_1.$$

La condition 1) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément est donc satisfaite. Comme nous l'avons déjà remarqué, on peut supposer $|\Phi\alpha| \subseteq |\alpha|$ et alors $\alpha G = |\alpha| \setminus |\Phi\alpha|$ pour $\alpha \in A'$ et les homomorphismes $\partial_\lambda^\alpha : \Delta^r \alpha G \to \Delta^{r-1}\lambda$ et $\delta_\alpha^\lambda : \nabla^{r-1}\lambda \to \nabla^r \alpha G$ sont donc définis pour $\lambda = \Phi\alpha$. Montrons que ces homomorphismes vérifient la condition 2) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément.

Soit $\alpha_1 > \alpha$ et (donc) $\lambda_1 = \Phi\alpha_1 > \lambda = \Phi\alpha$. Alors pour chaque projection $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha_1} : |\alpha_1| \to |\alpha|$, on a l'inclusion $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha_1} |\lambda_1| \subseteq |\lambda|$ (en supposant que $|\lambda_1| \subseteq |\alpha_1|$ et $|\lambda| \subseteq |\alpha|$) de sorte que $(\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha_1})^{-1} \alpha G \subseteq \alpha_1 G$, la restriction de la projection $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha_1}$ à $|\lambda_1|$ coïncidant avec une des projections du nerf $|\lambda_1|$ dans le nerf $|\lambda|$. En vertu du théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5, on a

$$\mathfrak{w}_\lambda^{\lambda_1} \partial_{\lambda_1}^{\alpha_1} = \partial_\lambda^\alpha \mathfrak{w} G_\alpha^{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \delta_{\alpha_1}^{\lambda_1} \pi_{\lambda_1}^\lambda = \pi G_{\alpha_1}^\alpha \delta_\alpha^\lambda.$$

Ainsi, les lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément permettent d'introduire :

1) de tels homomorphismes continus $\partial_\lambda : \Delta_\Gamma^r \to \Delta^{r-1}\lambda$ et de tels homomorphismes $\delta^\lambda : \nabla^{r-1}\lambda \to \nabla_\Gamma^r$, $\lambda \in \Lambda^*$ que $\partial_\lambda = \mathfrak{w}_\lambda^{\lambda_1} \partial_{\lambda'}$ et $\delta^\lambda = \delta^{\lambda'} \pi_{\lambda'}^\lambda$ pour $\lambda < \lambda'$,

2) un tel homomorphisme continu $\partial' : \Delta_\Gamma^r \to \Delta^{r-1}\Phi$ et un tel homomorphisme $\delta' : \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla_\Gamma^r$, que $\partial_\lambda = \mathfrak{w}_\lambda \partial'$ et $\delta^\lambda = \delta' \pi^\lambda$, $\lambda \in \Lambda^*$.

Enfin, définissons les homomorphismes

$$\partial : \Delta^r \Gamma \to \Delta^{r-1}\Phi \text{ et } \delta : \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla^r \Gamma$$

en posant $\partial = \partial' j$ et $\delta = \bar{j}\delta'$.

L'homomorphisme ∂' fait correspondre au fil $\xi = \{\xi_\alpha, \alpha \in A'\}$ du spectre S_Γ' le fil $\partial'\xi = \{\xi_\lambda, \lambda \in \Lambda^* : \xi_\lambda = \partial_\lambda^\alpha \xi_\alpha, \lambda = \Phi\alpha, \alpha \in A'\}$ du spectre S_Φ. L'homomorphisme δ' applique la ∇-classe ζ du spectre

$\overline{S}_\Phi$ dans la ∇-classe du spectre $\overline{S}_\Gamma$ définie par un élément quelconque de la forme $\delta^\lambda_\alpha \zeta_\lambda$, $\zeta_\lambda \in \zeta$, $\lambda \in \Lambda^*$, $\lambda = \Phi\alpha$. Par conséquent.

1) l'homomorphisme ∂ fait correspondre au fil $\xi = \{\xi_\beta, \beta \in B\}$ du spectre Σ le fil $\partial' j\xi = \{\xi_\lambda, \lambda \in \Lambda^*: \xi_\lambda = \partial^\alpha_\lambda j^\beta_\alpha \xi_\beta, \lambda = \Phi\alpha, \alpha \in A', \beta = \Gamma\alpha\}$ du spectre S_Φ;

2) l'homomorphisme δ fait correspondre à la ∇-classe ζ du spectre $\overline{S}_\Phi$ la ∇-classe du spectre $\overline{\Sigma}$ déterminée par un élément quelconque de la forme $\overline{j}^\alpha_\beta \delta^\lambda_\alpha \zeta_\lambda$, $\zeta_\lambda \in \zeta$, $\lambda \in \Lambda^*$, $\lambda = \Phi\alpha$, $\alpha \in A'$, $\beta = \Gamma\alpha$.

§ 8. Suites exactes liées à la figure X, Φ, Γ

Théorème 5. *Les suites suivantes de la figure* X, Φ, Γ *sont exactes*

$$\Delta(X, \Phi, \Gamma): \ldots \to \Delta^{r+1}\Gamma \xrightarrow{\partial} \Delta^r\Phi \xrightarrow{E^\Phi_X} \Delta^r X \xrightarrow{J^X_\Gamma}$$
$$\to \Delta^r\Gamma \xrightarrow{\partial} \Delta^{r-1}\Phi \to \ldots \to \Delta^0\Gamma$$

et

$$\nabla(X, \Phi, \Gamma): \ldots \leftarrow \nabla^{r+1}\Gamma \xleftarrow{\delta} \nabla^r\Phi \xleftarrow{J^X_\Phi}$$
$$\leftarrow \nabla^r X \xleftarrow{E^\Gamma_X} \nabla^r\Gamma \xleftarrow{\delta} \nabla^{r-1}\Phi \leftarrow \ldots \leftarrow \nabla^0\Gamma.$$

Démonstration. D'après la définition des homomorphismes J^X_Γ et ∂, E^Γ_X et δ il suffit d'établir l'exactitude des suites

$$\ldots \to \Delta^{r+1}_\Gamma \xrightarrow{\partial'} \Delta^r\Phi \xrightarrow{E^\Phi_X} \Delta^r X \xrightarrow{J'^X_\Gamma} \Delta^r_\Gamma \xrightarrow{\partial'} \Delta^{r-1}\Phi \to \ldots \to \Delta^0\Gamma$$

et

$$\ldots \leftarrow \nabla^{r+1}_\Gamma \xleftarrow{\delta'} \nabla^r\Phi \xleftarrow{J^X_\Phi} \nabla^r X \xleftarrow{E'^\Gamma_X} \nabla^r_\Gamma \xleftarrow{\delta'} \nabla^{r-1}\Phi \leftarrow \ldots \leftarrow \nabla^0\Gamma.$$

1. Démontrons que $\operatorname{Im}\partial' = \operatorname{Ker} E^\Phi_X$ et $\operatorname{Ker}\delta' = \operatorname{Im} J^X_\Phi$.

Prenons un fil quelconque $\xi_\Gamma = \{\xi_{\alpha G}, \alpha \in A'\} \in \Delta^{r+1}_\Gamma$ du spectre S'_Γ. Alors $E^\Phi_X \partial' \xi_\Gamma = \{\xi_\alpha, \alpha \in A' : \xi_\alpha = E^\lambda_\alpha \partial^\alpha_\lambda \xi_{\alpha G} = 0$ *), $\lambda = \Phi\alpha\}$, et donc $\operatorname{Im}\partial' \subseteq \operatorname{Ker} E^\Phi_X$. Supposons maintenant que nous avons pour le fil $\xi_\Phi = \{\xi_\lambda, \lambda \in \Lambda^*\} \in \Delta^r\Phi$ du spectre S_Φ l'égalité $E^\Phi_X \xi_\Phi = \{\xi_\alpha, \alpha \in A' : \xi_\alpha = E^\lambda_\alpha \xi_\lambda, \lambda = \Phi\alpha\} = 0$. D'après le théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5, il existe pour chaque $\alpha \in A'$ et $\lambda = \Phi\alpha$ un élément

*) D'après le théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5.

$\xi_{\alpha G} \in \Delta^{r+1}\alpha G$ tel que $\partial^{\alpha}_{\lambda}\xi_{\alpha G} = \xi_{\lambda}$. Ainsi, pour chaque $\alpha \in A'$ les bicompacts $\Psi_{\alpha} = (\partial^{\alpha}_{\lambda})^{-1}\xi_{\lambda}$, $\lambda = \Phi\alpha$ sont non vides. (Le lecteur se rappelle que les groupes de coefficients, et par conséquent, les groupes d'homologie correspondants sont bicompacts, tandis que les homomorphismes $\partial^{\alpha}_{\lambda}$ sont continus.) Puisque $\partial^{\alpha}_{\Phi\alpha}\mathfrak{w}G^{\alpha'}_{\alpha} = \mathfrak{w}^{\Phi\alpha'}_{\Phi\alpha}\partial^{\alpha'}_{\Phi\alpha'}$ pour $\alpha' > \alpha$ (voir théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5), on a $\mathfrak{w}G^{\alpha'}_{\alpha}\Psi_{\alpha'} \subseteq \Psi_{\alpha}$. Par conséquent, les bicompacts Ψ_{α} forment un spectre $\{\Psi_{\alpha}, \mathfrak{w}^{\alpha'}_{\alpha}\}$, $\alpha \in A'$, dont la limite Ψ est non vide (voir AP, proposition 4, p. 144) et se trouve dans Δ^{r+1}_{Γ}, et l'on a évidemment $\partial'\Psi = \xi_{\Phi}$. Ainsi, $\operatorname{Ker} E^{\Phi}_{X} \subseteq \operatorname{Im}\partial'$. L'égalité $\operatorname{Im}\partial' = \operatorname{Ker} E^{\Phi}_{X}$ est démontrée.

Considérons maintenant la ∇-classe $\zeta \in \nabla^{r}X$ du spectre $\overline{S}' = \{\nabla^{r}\alpha, \pi^{\alpha}_{\alpha'}\}$, $\alpha \in A'$. La ∇-classe $\delta' J^{X}_{\Phi}\zeta$ se détermine par un élément quelconque de la forme $\delta^{\Phi\alpha}_{\alpha} J^{\alpha}_{\Phi\alpha}\zeta_{\alpha}$, où $\zeta_{\alpha} \in \zeta$. D'après le théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5, $\delta^{\Phi\alpha}_{\alpha} J^{\alpha}_{\Phi\alpha}\zeta_{\alpha} = 0$ et donc $\delta' J^{X}_{\Phi}\zeta = 0$. L'inclusion $\operatorname{Im} J^{X}_{\Phi} \subseteq \operatorname{Ker}\delta'$ est démontrée.

Prenons maintenant une ∇-classe $\zeta_{\Phi} \in \nabla^{r}\Phi$ du spectre $S_{\Phi} = \{\nabla^{r}\lambda, \pi^{\lambda}_{\lambda'}\}$, $\lambda \in \Lambda^{*}$, telle que $\delta'\zeta_{\Phi} = 0$.

Choisissons un élément quelconque ζ_{λ} de la ∇-classe ζ_{Φ} et un recouvrement $\alpha \in A'$ tel que $\lambda = \Phi\alpha$. Si $\delta'\zeta_{\Phi} = 0$, il existe un indice $\alpha' > \alpha$ tel que $\pi G^{\alpha}_{\alpha'}\delta^{\lambda}_{\alpha}\zeta_{\lambda} = 0$. Mais alors (d'après le théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5) on a aussi $\delta^{\Phi\alpha'}_{\alpha'}\pi^{\lambda}_{\Phi\alpha'}\zeta_{\lambda} = 0$. De l'exactitude de la ∇-suite pour les complexes (§ 1, chapitre 5) on tire l'existence d'un élément $\zeta_{\alpha'}$ du groupe $\nabla^{r}\alpha'$ tel que $\pi^{\lambda}_{\Phi\alpha'}\zeta_{\lambda} = J^{\alpha'}_{\Phi\alpha'}\zeta_{\alpha'}$. Pour la ∇-classe $\zeta \in \nabla^{r}X$ qui contient l'élément $\zeta_{\alpha'}$, nous avons l'égalité suivante: $J^{X}_{\Phi}\zeta = J^{X}_{\Phi}\pi^{\alpha'}\zeta_{\alpha'} = \pi^{\Phi\alpha'}J^{\alpha'}_{\Phi\alpha'}\zeta_{\alpha'} = \pi^{\Phi\alpha'}\pi^{\lambda}_{\Phi\alpha'}\zeta_{\lambda} = \pi^{\lambda}\zeta_{\lambda} = \zeta_{\Phi}$. Ainsi, l'inclusion $\operatorname{Ker}\delta' \subseteq \operatorname{Im} J^{X}_{\Phi}$ est démontrée; on a donc aussi $\operatorname{Ker}\delta' = \operatorname{Im} J^{X}_{\Phi}$.

2. Démontrons que $\operatorname{Im} E^{\Phi}_{X} = \operatorname{Ker} J'^{X}_{\Gamma}$ et $\operatorname{Ker} J^{X}_{\Phi} = \operatorname{Im} E'^{\Gamma}_{X}$.

Prenons un fil quelconque $\xi_{\Phi} = \{\xi_{\lambda}, \lambda \in \Lambda^{*}\} \in \Delta^{r}\Phi$ du spectre S_{Φ}.

Alors $J'^{X}_{\Gamma}E^{\Phi}_{X}\xi_{\Phi} = \{\xi_{\alpha}, \alpha \in A' : \xi_{\alpha} = J^{\alpha}_{\alpha G}E^{\lambda}_{\alpha}\xi_{\lambda}, \lambda = \Phi\alpha\} = 0$, et donc d'après le théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5, on a $J^{\alpha}_{\alpha G}E^{\Phi\alpha}_{\alpha}\xi_{\Phi\alpha} = 0$, $\alpha \in A'$.

L'inclusion $\operatorname{Im} E^{\Phi}_{X} \subseteq \operatorname{Ker} J'^{X}_{\Gamma}$ est démontrée.

Considérons maintenant un fil $\xi = \{\xi_{\alpha}, \alpha \in A'\} \in \Delta^{r}X$ du spectre S' tel que $J'^{X}_{\Gamma}\xi = \{\xi_{\alpha G}, \alpha \in A' : \xi_{\alpha G} = J^{\alpha}_{\alpha G}\xi_{\alpha}\} = 0$. D'après le théorème fondamental 1, § 1, chapitre 5, et l'égalité $J^{\alpha}_{\alpha G}\xi_{\alpha} = 0$, $\alpha \in A'$, on déduit l'existence d'un élément $\xi_{\Phi\alpha}$ du groupe $\Delta^{r}\Phi\alpha$ qui vérifie $E^{\Phi\alpha}_{\alpha}\xi_{\Phi\alpha} = \xi_{\alpha}$. Ainsi, pour chaque $\alpha \in A'$ les bicompacts $\Psi_{\Phi\alpha} = (E^{\Phi\alpha}_{\alpha})^{-1}\xi_{\alpha}$ sont non vides. Pour $\alpha' > \alpha$, sui-

vant le théorème fondamental 2, § 2, chapitre 5, on a $E_\alpha^{\Phi\alpha}\mathfrak{w}_{\Phi\alpha}^{\Phi\alpha'} = \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}E_{\alpha'}^{\Phi\alpha'}$ (si $\Phi\alpha' \equiv \Phi\alpha$, alors $\mathfrak{w}_{\Phi\alpha}^{\Phi\alpha'}$ sera l'application identique). Par conséquent, $\mathfrak{w}_{\Phi\alpha}^{\Phi\alpha'}\Psi_{\Phi\alpha'} \subseteq \Psi_{\Phi\alpha}$ pour $\alpha' > \alpha$. Ainsi, nous avons un spectre $\{\Psi_{\Phi\alpha}, \mathfrak{w}_{\Phi\alpha}^{\Phi\alpha'}\}$, $\alpha \in A'$, de bicompacts non vides. Sa limite Ψ_Φ est non vide (voir AP, p. 144) et elle est naturellement située dans $\Delta^r\Phi$, $E_X^\Phi\Psi_\Phi = \xi$. Ainsi $\operatorname{Im} E_X^\Phi \supseteq \operatorname{Ker} J_\Gamma^{\prime X}$, donc $\operatorname{Im} E_X^\Phi = \operatorname{Ker} J_\Gamma^{\prime X}$.

Considérons maintenant la ∇-classe $\zeta_\Gamma \in \nabla_\Gamma^r$ du spectre $\bar{S}_\Gamma$. La classe $J_\Phi^X E_X^{\prime\Gamma}\zeta_\Gamma$ se définit par un de ses éléments quelconques de la forme $J_{\Phi\alpha}^\alpha E_\alpha^{G\alpha}\zeta_\alpha$, $\zeta_\alpha \in \zeta_\Gamma$, qui est nul d'après le théorème fondamental 1, § 1 chapitre 5. Ainsi $J_\Phi^X E_X^{\prime\Gamma}\zeta_\Gamma = 0$ et donc $\operatorname{Im} E_X^{\prime\Gamma} \subseteq \subseteq \operatorname{Ker} J_\Phi^X$.

Supposons maintenant que $J_\Phi^X\zeta = 0$ pour une ∇-classe $\zeta \in \nabla^r X$ du spectre $\bar{S}'$ Choisissons arbitrairement $\alpha \in A'$ et $\lambda = \Phi\alpha$. Alors pour un certain $\lambda' > \lambda$, $\lambda' \in \Lambda^*$, nous avons l'égalité $\pi_{\lambda'}^\lambda J_\lambda^\alpha\zeta_\alpha = = 0$, $\zeta_\alpha \in \zeta$. Nous pouvons, comme nous avons déjà fait ci-dessus, construire un recouvrement $\alpha' \in A'$ pour lequel $\alpha' > \alpha$ et $\Phi\alpha' = \lambda'$. Alors (voir théorème fondamental 2, du § 2, chapitre 5) on a $0 = \pi_{\lambda'}^\lambda J_\lambda^\alpha\zeta_\alpha = J_{\lambda'}^{\alpha'}\pi_{\alpha'}^\alpha\zeta_\alpha$. D'après le théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5, il existe un élément $\zeta_{\alpha' G}$ du groupe $\nabla^r\alpha' G$ tel que $E_{\alpha'}^{\alpha' G}\zeta_{\alpha' G} = \pi_{\alpha'}^\alpha\zeta_\alpha$. Alors pour la ∇-classe $\zeta_\Gamma \in \nabla_\Gamma^r$ déterminée par l'élément $\zeta_{\alpha' G}$ on a la relation $E_X^{\prime\Gamma}\zeta_\Gamma = \zeta$. L'inclusion $\operatorname{Ker} J_\Phi^X \subseteq \operatorname{Im} E_X^{\prime\Gamma}$ est démontrée et on a donc démontré l'égalité $\operatorname{Ker} J_\Phi^X = \operatorname{Im} E_X^{\prime\Gamma}$.

3. Démontrons enfin $\operatorname{Im} J_\Gamma^{\prime X} = \operatorname{Ker}\partial'$ et $\operatorname{Ker} E_X^{\prime\Gamma} = \operatorname{Im}\delta'$.

Prenons le fil $\xi = \{\xi_\alpha, \alpha \in A'\}$ du spectre S'. Alors $\partial' J_\Gamma^{\prime X}\xi = = \{\xi_\lambda, \lambda \in \Lambda^* : \xi_\lambda = \partial_\lambda^\alpha J_{G\alpha}^\alpha\xi_\alpha, \Phi\alpha = \lambda, \alpha \in A'\}$. D'après le théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5, $\partial_\lambda^\alpha J_{G\alpha}^\alpha\xi_\alpha = 0$, d'où $\partial' J_\Gamma^{\prime X}\xi = 0$ et donc $\operatorname{Im} J_\Gamma^{\prime X}\xi \subseteq \operatorname{Ker}\partial'$.

Supposons maintenant que le fil $\xi_\Gamma = \{\xi_{\alpha G}, \alpha \in A'\} \in \Delta_\Gamma^r$ vérifie la relation $\partial'\xi_\Gamma = \{\xi_\lambda, \lambda \in \Lambda^* : \xi_\lambda = \partial_\lambda^\alpha\xi_{\alpha G}, \lambda = \Phi\alpha, \alpha \in A'\} = 0$. D'après le théorème fondamental du § 1, chapitre 5, et de l'égalité $\partial_\lambda^\alpha\xi_{\alpha G} = 0$, $\lambda = \Phi\alpha$, on déduit l'existence d'un élément ξ_α du groupe $\Delta^r\alpha$ tel que $J_{\alpha G}^\alpha\xi_\alpha = \xi_{\alpha G}$. Ainsi, pour chaque $\alpha \in A'$ le bicompact $\Psi_\alpha = (J_{\alpha G}^\alpha)^{-1}\xi_{\alpha G}$ est non vide. Puisque $\mathfrak{w}G_\alpha^{\alpha'}J_{\alpha' G}^{\alpha'} = J_{\alpha G}^\alpha\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}$ pour $\alpha' > \alpha$ (théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5), on a $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}\Psi_{\alpha'} \subseteq \subseteq \Psi_\alpha$. La limite Ψ du spectre $\{\Psi_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha \in A'$, est non vide, elle se trouve naturellement dans $\Delta^r X$ et $J_\Gamma^{\prime X}\Psi = \xi_\Gamma$. L'inclusion $\operatorname{Ker}\partial' \subseteq \operatorname{Im} J_\Gamma^{\prime X}$ est démontrée et donc $\operatorname{Ker}\partial' = \operatorname{Im} J_\Gamma^{\prime X}$.

Prenons une ∇-classe $\zeta_\Phi \in \nabla^{r-1}\Phi$ du spectre $\bar{S}_\Phi$. La ∇-classe $E_X'^{\Gamma}\delta'\zeta_\Phi$ se définit par un élément quelconque de la forme $E_\alpha^{\alpha G}\delta_\alpha^\lambda\zeta_\lambda$, $\zeta_\lambda \in \zeta_\Phi$, $\lambda = \Phi\alpha$, $\alpha \in A'$, qui est nul en vertu du théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5. Ainsi, $E_X'^{\Gamma}\delta'\zeta_\Phi = 0$, d'où l'on tire $\operatorname{Im}\delta' \subseteq \operatorname{Ker} E_X'^{\Gamma}$.

Supposons maintenant $E_X'^{\Gamma}\zeta_\Gamma = 0$ pour une ∇-classe $\zeta_\Gamma \in \nabla_\Gamma^r$ du spectre $\bar{S}_\Gamma$. Prenons $\zeta_{\alpha G} \in \zeta_\Gamma$. Il existe alors un $\alpha' > \alpha$ tel que $\pi_{\alpha'}^{\alpha} E_\alpha^{\alpha G}\zeta_{\alpha G} = 0$ et donc (d'après le théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5) on a $E_{\alpha'}^{\alpha' G}\pi G_{\alpha'}^{\alpha}\zeta_{\alpha G} = 0$. D'après le théorème fondamental 1 du § 1, chapitre 5, il existe un élément $\zeta_{\Phi\alpha'}$ du groupe $\nabla^{r-1}\Phi\alpha'$ tel que $\delta_{\alpha'}^{\Phi\alpha'}\zeta_{\Phi\alpha'} = \pi G_{\alpha'}^{\alpha}\zeta_{\alpha G}$. Alors pour la ∇-classe ζ_Φ déterminée par l'élément $\zeta_{\Phi\alpha'}$ nous avons la relation $\delta'\zeta_\Phi = \zeta_\Gamma$, d'où $\operatorname{Ker} E_X'^{\Gamma} \subseteq \operatorname{Im}\delta'$ et donc $\operatorname{Ker} E_X'^{\Gamma} = \operatorname{Im}\delta'$. Le théorème 5 est démontré.

§ 9. Isomorphisme de dualité ; dualité générale

D'après le théorème élémentaire de E. Nœther sur les homomorphismes, appliqué aux homomorphismes

$$\delta\colon \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla^r\Gamma \text{ et } \partial\colon \Delta^r\Gamma \to \Delta^{r-1}\Phi,$$

on déduit de l'exactitude des suites

$$(1_\nabla)\quad \ldots \leftarrow \nabla^{r+1}\Gamma \xleftarrow{\delta} \nabla^r\Phi \xleftarrow{J_\Phi^X} \nabla^r X \xleftarrow{E_X^\Gamma} \nabla^r\Gamma \xleftarrow{\delta} \nabla^{r-1}\Phi \leftarrow \ldots \leftarrow \nabla^0\Gamma$$

$$(1_\Delta)\quad \ldots \to \Delta^{r+1}\Gamma \xrightarrow{\partial} \Delta^r\Phi \xrightarrow{E_X^\Phi} \Delta^r X \xrightarrow{J_\Gamma^X} \Delta^r\Gamma \xrightarrow{\partial} \Delta^{r-1}\Phi \to \ldots \to \Delta^0\Gamma$$

les isomorphismes

$$(2_\nabla)\qquad \nabla^{r-1}\Phi - \operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Im}\delta = \operatorname{Ker} E_X^\Gamma,$$

où $\delta\colon \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla^r\Gamma$, $E_X^\Gamma\colon \nabla^r\Gamma \to \nabla^r X$ et

$$(2_\Delta)\qquad \Delta^r\Gamma - \operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Im}\partial = \operatorname{Ker} E_X^\Phi,$$

où $\partial\colon \Delta^r\Gamma \to \Delta^{r-1}\Phi$ et $E_X^\Phi\colon \Delta^{r-1}\Phi \to \Delta^{r-1}X$.

Prenant en considération que

$$\operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Im} J_\Phi^X \text{ (où } \delta\colon \nabla^{r-1}\Phi \to \nabla^r\Gamma,\ J_\Phi^X\colon \nabla^{r-1}X \to \nabla^{r-1}\Phi),$$

$$\operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Im} J_\Gamma^X \text{ (où } \partial\colon \Delta^r\Gamma \to \Delta^{r-1}\Phi,\ J_\Gamma^X\colon \Delta^r X \to \Delta^r\Gamma),$$

on obtient de (2_∇) et (2_Δ) les isomorphismes

$$(3_\nabla) \qquad \nabla^{r-1}\Phi - \operatorname{Im} J_\Phi^X = \operatorname{Ker} E_X^\Gamma,$$

où $J_\Phi^X : \nabla^{r-1}X \to \nabla^{r-1}\Phi$, $E_X^\Gamma : \nabla^r\Gamma \to \nabla^r X$,

$$(3_\Delta) \qquad \Delta^r\Gamma - \operatorname{Im} J_\Gamma^X = \operatorname{Ker} E_X^\Phi,$$

où $J_\Gamma^X : \Delta^r X \to \Delta^r\Gamma$, $E_X^\Phi : \Delta^{r-1}\Phi \to \Delta^{r-1}X$.

Si le bicompact X est acyclique en dimensions r et $r-1$, i.e. si $\nabla^r X = \Delta^r X = 0$, $\nabla^{r-1}X = \Delta^{r-1}X = 0$, on a pour $J_\Phi^X : \nabla^{r-1}X \to \nabla^{r-1}\Phi$, $E_X^\Gamma : \nabla^r\Gamma \to \nabla^r X$, $J_\Gamma^X : \Delta^r X \to \Delta^r\Gamma$, $E_X^\Phi : \Delta^{r-1}\Phi \to \Delta^{r-1}X$

$$\operatorname{Im} J_\Phi^X = 0\,; \ \operatorname{Ker} E_X^\Gamma = \nabla^r\Gamma\,; \quad \operatorname{Im} J_\Gamma^X = 0, \ \operatorname{Ker} E_X^\Phi = \Delta^{r-1}\Phi,$$

et les isomorphismes (3_∇) et (3_Δ) se transforment dans les isomorphismes

$$(4) \qquad \nabla^{r-1}\Phi = \nabla^r\Gamma \text{ et } \Delta^r\Gamma = \Delta^{r-1}\Phi,$$

qui expriment justement la *dualité générale d'Alexander-Kolmogorov-Pontriaguine.*

Soit X une variété homologique fermée de dimension n et Φ, un ensemble fermé de X. Le groupe de coefficients est un groupe discret $\mathfrak{A}$. Alors Γ est une variété ouverte à laquelle on peut appliquer la dualité de Poincaré, i. e. l'isomorphisme

$$\nabla^r\Gamma = \delta^{n-r}\Gamma$$

(voir [TC], chapitre 13, § 3) ; les raisonnements qui y sont effectués restent valables pour le cas d'une variété ouverte. Nous obtenons l'isomorphisme

$$(5) \qquad \nabla^{r-1}\Phi = \delta^{n-r}\Gamma,$$

qui exprime la dualité générale d'Alexander-Pontriaguine sous la forme que l'auteur lui a donné dans le livre [TC] et dans ses articles [4] et [5].

Enfin, en prenant les groupes $\Delta^{r-1}\Phi$ pour le groupe de coefficients bicompact $\mathfrak{B}$, dual au groupe $\mathfrak{A}$, nous pouvons écrire l'isomorphisme (5) sous forme de dualité

$$\Delta^{r-1}\Phi \mid \delta^{n-r}\Gamma$$

— c'est le théorème classique de dualité démontré par L. Pontriaguine en 1932 (en particulier, pour le cas le plus important $\mathfrak{A} = I$, $\mathfrak{B} = \varkappa$).

Revenons au cas général. Les groupes

$$\operatorname{Im} J_\Phi^X \subseteq \nabla^{r-1}\Phi, \ \operatorname{Ker} E_X^\Gamma \subseteq \nabla^r\Gamma$$

et les groupes analogues

$$\operatorname{Im} J_\Gamma^X \subseteq \Delta^r\Gamma, \ \operatorname{Ker} E_X^\Phi \subseteq \Delta^r\Phi$$

ont une signification particulièrement claire : les groupes $\operatorname{Im} J_\Phi^X$, $\operatorname{Im} J_\Gamma^X$ consistent de tous les éléments du groupe $\nabla^{r-1}\Phi$, respectivement du groupe $\Delta^r\Gamma$, qui sont définis (après les identifications appro-

priées) par les cocycles, respectivement les cycles, situés sur Φ, respectivement sur Γ, mais prolongeables à l'espace tout entier.

La signification précise de cette expression est la suivante: un cocycle donné, respectivement un cycle donné, est obtenu en appliquant l'opérateur J_Φ^X, respectivement J_Γ^X, à un certain cocycle (cycle) de l'espace X.

D'autre part, les groupes $\operatorname{Ker} E_X^\Gamma$ et $\operatorname{Ker} E_X^\Phi$ consistent de tous les éléments du groupe $\nabla^r\Gamma$, respectivement $\Delta^r\Phi$, qui sont engendrés par des cocycles (respectivement cycles) situés sur Γ (respectivement sur Φ), mais sont (co)homologues à zéro sur X tout entier, i.e. sont envoyés par l'opérateur E dans de tels cocycles et cycles.

Pour les groupes quotients $\nabla^{r-1}\Phi - \operatorname{Im} J_\Phi^X$, respectivement $\Delta^r\Gamma - \operatorname{Im} J_\Gamma^X$, les notations suivantes sont naturelles

$$(6_1)\qquad \begin{cases} \nabla^{r-1}\Phi - \operatorname{Im} J_\Phi^X = \nabla^{r-1}(\Phi : X), \\ \Delta^r\Gamma - \operatorname{Im} J_\Gamma^X = \Delta^r(\Gamma : X). \end{cases}$$

D'autre part, sont naturelles les notations

$$(6_2)\qquad \begin{cases} \nabla^r(\Gamma : X) = \operatorname{Ker} E_X^\Gamma \subseteq \nabla^r\Gamma, \\ \Delta^{r-1}(\Phi : X) = \operatorname{Ker} E_X^\Phi \subseteq \Delta^{r-1}\Phi. \end{cases}$$

Dans ces notations, les isomorphismes (3_∇), (3_Δ) prennent la forme de l'isomorphisme général de dualité

$$(6)\qquad \begin{cases} \nabla^{r-1}(\Phi : X) = \nabla^r(\Gamma : X), \\ \Delta^{r-1}(\Phi : X) = \Delta^r(\Gamma : X), \end{cases}$$

initialement établi dans mon article [4] (avec les notations correspondantes (6_1) et (6_2)).

§ 10. Homomorphismes de suites exactes induits par les applications continues

Supposons maintenant que l'on se donne les bicompacts X et X_1 qui contiennent les bicompacts $\Phi \subseteq X$, $\Phi_1 \subseteq X_1$, et les ensembles ouverts $\Gamma = X \setminus \Phi$, $\Gamma_1 = X_1 \setminus \Phi_1$. Supposons donnée en outre une application $f\colon X \to X_1$ telle que $f\Phi \subseteq \Phi_1$.

L'application f induit les homomorphismes $f\colon \Delta^r X \to \Delta^r X_1$ et $\bar{f}\colon \nabla^r X_1 \to \nabla^r X$ et l'application $f|_\Phi\colon \Phi \to \Phi_1$, les homomorphismes $f_\Phi\colon \Delta^r\Phi \to \Delta^r\Phi_1$ et $\bar{f}_\Phi\colon \nabla^r\Phi_1 \to \nabla^r\Phi$. Définissons maintenant les homomorphismes $fG\colon \Delta^r\Gamma \to \Delta^r\Gamma_1$ et $\overline{fG}\colon \nabla^r\Gamma_1 \to \nabla^r\Gamma$ induits par l'application f.

Définissons d'abord les homomorphismes

$$fG' : \Delta^r_\Gamma \to \Delta^r_{\Gamma_1} \text{ et } \overline{fG'} : \nabla^r_{\Gamma_1} \to \nabla^r_\Gamma.$$

L'application $\nu : A' \to A'_1$ (A'_1 se définit pour X_1 de même que A' pour X, voir p. 327) sera définie en posant $\nu(\alpha) = \alpha_1$, $\alpha \in A'$, $\alpha_1 \in A'_1$ si $\alpha > \alpha_1^{-1}$ (où $\alpha_1^{-1} = f^{-1}\alpha_1$). Cette application vérifie la condition 1) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément. En effet, si $\alpha \in \nu^{-1}(\alpha_1)$, $\alpha' \in \nu^{-1}(\alpha'_1)$, $\alpha''_1 \geqslant \alpha_1$, $\alpha''_1 \geqslant \alpha'_1$, alors pour le recouvrement $\alpha'' > \alpha \wedge \alpha' \wedge (\alpha''_1)^{-1}$, $\alpha'' \in A'$, on a les relations $\alpha'' > \alpha$, $\alpha'' > \alpha'$ et $\alpha'' > (\alpha''_1)^{-1}$ et donc $\alpha'' \in \nu^{-1}(\alpha''_1)$.

Vérifions maintenant les conditions 2) des lemmes 2 et $\bar{2}$ du Supplément. Il a été montré au n° 1 du § 2 que pour chaque application simpliciale $f^\alpha_{\alpha_1} : |\alpha| \to |\alpha_1|$, $\alpha \in A'$, $\alpha_1 \in A'_1$, $\alpha_1 \in \nu(\alpha)$, induite par l'application f, on a l'inclusion $f^\alpha_{\alpha_1} |\Phi\alpha| \subseteq |\Phi\alpha_1|$ et donc, en vertu des relations $|\alpha| \setminus |\Phi\alpha| = \alpha G$ et $|\alpha_1| \setminus |\Phi\alpha_1| = \alpha_1 G$, on a l'inclusion $(f^\alpha_{\alpha_1})^{-1}\alpha_1 G \subseteq \alpha G$. On peut donc définir les homomorphismes

$$fG^\alpha_{\alpha_1} : \Delta^r \alpha G \to \Delta^r \alpha_1 G \text{ et } \overline{fG}^{\alpha_1}_\alpha : \nabla^r \alpha_1 G \to \nabla^r \alpha G.$$

Ces homomorphismes ne dépendent pas du choix de l'application simpliciale $f^\alpha_{\alpha_1}$ induite par l'application f. En effet, deux applications simpliciales quelconques $f^\alpha_{\alpha_1}$ et $g^\alpha_{\alpha_1}$ du nerf $|\alpha|$ dans le nerf $|\alpha_1|$ induites par l'application f sont combinatoirement proches (voir n° 1, § 2); en outre, les restrictions $f^\alpha_{\alpha_1}|_{|\Phi\alpha|}$ et $g^\alpha_{\alpha_1}|_{|\Phi\alpha|}$ seront également combinatoirement proches (voir n° 1, § 2). En appliquant la condition 2° du théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5, on peut maintenant affirmer l'indépendance des homomorphismes $fG^\alpha_{\alpha_1}$ et $\overline{fG}^{\alpha_1}_\alpha$ par rapport au choix des applications simpliciales $f^\alpha_{\alpha_1}$.

Soient maintenant α, $\alpha' \in A'$, α_1, $\alpha'_1 \in A'_1$, $\alpha' > \alpha$, $\alpha'_1 > \alpha_1$, $\alpha_1 \in \nu(\alpha)$, $\alpha'_1 \in \nu(\alpha')$. Alors, d'après l'indépendance des homomorphismes $fG^\alpha_{\alpha_1}$ et $\overline{fG}^{\alpha_1}_\alpha$ par rapport au choix des applications simpliciales de $|\alpha|$ dans $|\alpha_1|$ induites par l'application f, et d'après la remarque 2 du § 2, chapitre 5, nous avons les égalités suivantes:

$$fG^\alpha_{\alpha_1}\mathfrak{D}G^{\alpha'}_\alpha = fG^{\alpha'}_{\alpha_1} = \mathfrak{D}G^{\alpha'_1}_{\alpha_1} fG^{\alpha'}_{\alpha'_1}$$

et

$$\pi G^\alpha_{\alpha'} \overline{fG}^{\alpha_1}_\alpha = \overline{fG}^{\alpha_1}_{\alpha'} = \overline{fG}^{\alpha'_1}_\alpha \pi G^{\alpha_1}_{\alpha'_1}$$

(puisque les applications simpliciales $f^\alpha_{\alpha_1}\mathfrak{D}^{\alpha'}_\alpha : |\alpha'| \to |\alpha_1|$ et $\mathfrak{D}^{\alpha'_1}_{\alpha_1} f^{\alpha'}_{\alpha'_1} : |\alpha'| \to |\alpha_1|$ sont induites par f).

Les conditions des lemmes 2°, 2 et $\bar{2}$ du Supplément sont satisfaites, et l'on peut donc définir :

1) les homomorphismes continus $fG_{\alpha_1}: \Delta^r_\Gamma \to \Delta^r \alpha_1 G$ et les homomorphismes $\overline{fG}^{\alpha_1}: \nabla^r \alpha_1 G \to \nabla^r_\Gamma$, $\alpha_1 \in A'_1$, qui vérifient

$$fG_{\alpha_1} = \mathfrak{S} G^{\alpha'_1}_{\alpha_1} fG_{\alpha'_1} \quad \text{et} \quad \overline{fG}^{\alpha_1} = \overline{fG}^{\alpha'_1} \pi G^{\alpha_1}_{\alpha'_1}, \quad \alpha'_1 > \alpha_1,$$

2) l'homomorphisme continu $fG': \Delta^r_\Gamma \to \Delta^r_{\Gamma_1}$ et l'homomorphisme $\overline{fG}': \nabla^r_{\Gamma_1} \to \nabla^r_\Gamma$ qui vérifient

$$\mathfrak{S} G_{\alpha_1} fG' = fG_{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \overline{fG}' \pi G^{\alpha_1} = \overline{fG}^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 \in A'_1.$$

L'homomorphisme fG' fait correspondre au fil $\xi = \{\xi_\alpha,\ \alpha \in A'\} \in \Delta^r_\Gamma$ du spectre S'_Γ le fil $\{\xi_{\alpha_1},\ \alpha_1 \in A'_1 : \xi_{\alpha_1} = fG^\alpha_{\alpha_1} \xi_\alpha, \alpha_1 \in \nu(\alpha)\}$ du spectre S'_{Γ_1}. L'homomorphisme $\overline{fG}'$ fait correspondre à la ∇-classe $\zeta \in \nabla^r_{\Gamma_1}$ du spectre $\bar{S}'_{\Gamma_1}$ la ∇-classe du spectre $\bar{S}'_\Gamma$ déterminée par un élément quelconque de la forme

$$\overline{fG}^{\alpha_1}_\alpha \zeta_{\alpha_1}, \ \zeta_{\alpha_1} \in \zeta, \ \alpha \in \nu^{-1}(\alpha_1).$$

Posons

$$fG = j_1^{-1} fG' j \quad \text{et} \quad \overline{fG} = \bar{j} \overline{fG}' \bar{j}_1^{-1}.$$

Théorème 6. *Les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \Delta^{r+1}\Gamma \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "fG"] & \Delta^r\Phi \arrow[r, "E^\Phi_X"] \arrow[d, "f_\Phi"] & \Delta^r X \arrow[r, "J^X_\Gamma"] \arrow[d, "f"] & \Delta^r\Gamma \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "fG"] & \Delta^{r-1}\Phi \arrow[r] \arrow[d, "f_\Phi"] & \dots \arrow[r] & \Delta^0\Gamma \arrow[d, "fG"] \\
\dots \arrow[r] & \Delta^{r+1}\Gamma_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & \Delta^r\Phi_1 \arrow[r, "E^{\Phi_1}_{X_1}"'] & \Delta^r X_1 \arrow[r, "J^{X_1}_{\Gamma_1}"'] & \Delta^r\Gamma_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & \Delta^{r-1}\Phi_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \Delta^0\Gamma_1
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\dots & \nabla^{r+1}\Gamma & \nabla^r\Phi \arrow[l, "\delta"'] & \nabla^r X \arrow[l, "J^X_\Phi"'] & \nabla^r\Gamma \arrow[l, "E^\Gamma_X"'] & \nabla^{r-1}\Phi \arrow[l, "\delta"'] & \dots & \nabla^0\Gamma \arrow[l] \\
\dots & \nabla^{r+1}\Gamma_1 \arrow[l] \arrow[u, "\overline{fG}"] & \nabla^r\Phi_1 \arrow[l, "\delta_1"] \arrow[u, "\bar{f}_\Phi"] & \nabla^r X_1 \arrow[l, "J^{X_1}_{\Phi_1}"] \arrow[u, "\bar{f}"] & \nabla^r\Gamma_1 \arrow[l, "E^{\Gamma_1}_{X_1}"] \arrow[u, "\overline{fG}"] & \nabla^{r-1}\Phi_1 \arrow[l, "\delta_1"] \arrow[u, "\bar{f}_\Phi"] & \dots \arrow[l] & \nabla^0\Gamma_1 \arrow[l] \arrow[u, "\overline{fG}"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il nous faut vérifier les relations suivantes :

$$f_\Phi \partial = \partial_1 fG, \ fE^\Phi_X = E^{\Phi_1}_{X_1} f_\Phi, \ fGJ^X_\Gamma = J^{X_1}_{\Gamma_1} f,$$
$$\delta \bar{f}_\Phi = \overline{fG} \delta_1, \ J^X_\Phi \bar{f} = \bar{f}_\Phi J^{X_1}_{\Phi_1}, \ E^\Gamma_X \overline{fG} = \bar{f} E^{\Gamma_1}_{X_1}.$$

D'après la définition des homomorphismes fG, $\overline{fG}$, ∂, ∂_1, δ, δ_1, J^X_Γ, $J^{X_1}_{\Gamma_1}$, E^Γ_X, $E^{\Gamma_1}_{X_1}$, il suffit de démontrer que

$$f_\Phi \partial' = \partial'_1 fG', \quad fE^\Phi_X = E^{\Phi_1}_{X_1} f_\Phi, \quad fG' J'^X_\Gamma = J'^{X_1}_{\Gamma_1} f,$$
$$\delta' \bar{f}_\Phi = \overline{fG}' \delta'_1, \quad J^X_\Phi \bar{f} = \bar{f}_\Phi J^{\Phi_1}_{X_1}, \quad E'^\Gamma_X \overline{fG}' = \bar{f} E'^{\Gamma_1}_{X_1}.$$

(a) Choisissons arbitrairement un fil $\xi_\Gamma = \{\xi_\alpha,\ \alpha \in A'\} \in \Delta_\Gamma^{r+1}$ du spectre S'_Γ, une ∇-classe $\zeta_{\Phi_1} \in \nabla^r \Phi_1$ du spectre $\overline{S}_{\Phi_1}$ et un indice $\lambda_1 \in \Lambda_1^*$. Il existe des indices $\alpha_1 \in A'_1$ et $\alpha \in A'$ tels que $\Phi\alpha_1 = \lambda_1$ et $\alpha > \alpha_1^{-1}$ et donc $\lambda = \Phi\alpha > \lambda_1^{-1}$. D'après le théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5,

$$f_{\lambda_1}^{\lambda} \partial_\lambda^\alpha \xi_\alpha = \partial_{\lambda_1}^{\alpha_1} f G_{\alpha_1}^\alpha \xi_\alpha$$

et

$$\delta_\alpha^\lambda \bar{f}_\lambda^{\lambda_1} \zeta_{\lambda_1} = \overline{fG}_\alpha^{\alpha_1} \delta_{\alpha_1}^{\lambda_1} \zeta_{\lambda_1}, \qquad \zeta_{\lambda_1} \in \nabla^r \lambda_1, \qquad \zeta_{\lambda_1} \in \zeta_{\Phi_1}.$$

Ainsi :

1) pour chaque $\lambda_1 \in \Lambda_1^*$ les coordonnées des fils $f_\Phi \partial' \xi_\Gamma$ et $\partial'_1 f G' \xi_\Gamma$ dans le groupe $\Delta^r \lambda_1$ coïncident, donc $f_\Phi \partial' \xi_\Gamma = \partial'_1 f G' \xi_\Gamma$ et par conséquent $f_\Phi \partial' = \partial'_1 f G'$;

2) les ∇-classes $\bar{\delta}' f_\Phi \zeta_{\Phi_1}$ et $\overline{fG}' \delta' \zeta_{\Phi_1}$ possèdent les mêmes représentants dans le groupe $\nabla^{r+1}\alpha$, donc $\delta' \bar{f}_\Phi \zeta_{\Phi_1} = \overline{fG}' \delta' \zeta_{\Phi_1}$ et par conséquent $\delta' \bar{f}_\Phi = \overline{fG}' \delta'$.

(b) Prenons maintenant arbitrairement un fil $\xi_\Phi = \{\xi_\lambda,\ \lambda \in \Lambda^*\} \in \Delta^r \Phi$ du spectre S_Φ, une ∇-classe $\zeta \in \nabla^r X_1$ du spectre $\overline{S}'_1$ et un indice $\alpha_1 \in A'_1$. Il existe un indice $\alpha \in A'$ tel que $\alpha \geqslant \alpha_1^{-1}$ et donc $\lambda = \Phi\alpha \geqslant \lambda_1^{-1}$, $\lambda_1 = \Phi\alpha_1$.

D'après le théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5,

$$f_{\alpha_1}^\alpha E_\alpha^\lambda \xi_\lambda = E_{\alpha_1}^{\lambda_1} f_{\lambda_1}^\lambda \xi_\lambda$$

et

$$J_\lambda^\alpha \bar{f}_\alpha^{\alpha_1} \zeta_{\alpha_1} = \bar{f}_\lambda^{\lambda_1} J_{\lambda_1}^{\alpha_1} \zeta_{\alpha_1}, \quad \zeta_{\alpha_1} \in \nabla^r \alpha_1, \quad \zeta_{\alpha_1} \in \zeta.$$

Ainsi :

1) pour chaque $\alpha_1 \in A'_1$, les coordonnées des fils $f E_X^\Phi \xi_\Phi$ et $E_{X_1}^{\Phi_1} f_\Phi \xi_\Phi$ dans le groupe $\Delta^r X_1$ coïncident ; par conséquent, les fils eux-mêmes coïncident, i.e. $f E_X^\Phi = E_{X_1}^{\Phi_1} f_\Phi$;

2) les ∇-classes $J_\Phi^X \bar{f} \zeta$ et $\bar{f}_\Phi J_{\Phi_1}^{X_1} \zeta$ ont les mêmes représentants dans le groupe $\nabla^r \lambda$ et donc coïncident, d'où $J_\Phi^X \bar{f} = \bar{f}_\Phi J_{\Phi_1}^{X_1}$.

(c) Choisissons enfin un fil arbitraire $\xi = \{\xi_\alpha,\ \alpha \in A'\} \in \Delta^r X$ du spectre S', une ∇-classe $\zeta_{\Gamma_1} \in \nabla^r \Gamma_1$ du spectre $\overline{S}'_{\Gamma_1}$, un indice $\alpha_1 \in A'_1$ et $\alpha > \alpha_1^{-1}$, $\alpha \in A'$. D'après le théorème fondamental 2 du § 2, chapitre 5,

$$f G_{\alpha_1}^\alpha J_{\alpha G}^\alpha \xi_\alpha = J_{\alpha_1 G}^{\alpha_1} f_{\alpha_1}^\alpha \xi_\alpha$$

et

$$E_\alpha^{\alpha G} \overline{fG}_\alpha^{\alpha_1} \zeta_{\alpha_1} = \bar{f}_\alpha^{\alpha_1} E_{\alpha_1}^{\alpha_1 G} \zeta_{\alpha_1}, \quad \zeta_{\alpha_1} \in \nabla^r \alpha_1 G, \quad \zeta_{\alpha_1} \in \zeta_{\Gamma_1}.$$

Ainsi :

1) pour chaque $\alpha_1 \in A'_1$ les coordonnées des fils $fG'J'^{X}_{\Gamma}$ et $J'^{X_1}_{\Gamma_1}f\xi$ dans le groupe $\Delta^r\alpha_1 G$ coïncident, ainsi que les fils eux-mêmes, et donc $fG'J'^{X}_{\Gamma} = J'^{X_1}_{\Gamma_1}f$;

2) les ∇-classes $E'^{\Gamma}_{X}\overline{fG'}\zeta_{\Gamma_1}$ et $\bar{f}E'^{\Gamma_1}_{X_1}\zeta_{\Gamma_1}$ ont des représentants identiques dans le groupe $\nabla^r\alpha$ et donc ces ∇-classes coïncident, d'où $E'^{\Gamma}_{X}\overline{fG'} = \bar{f}E'^{\Gamma_1}_{X_1}$. Le théorème est démontré.

SUPPLÉMENT AU CHAPITRE SIX

SPECTRES DE GROUPES DIRECTS ET INVERSES

1. Ensembles dirigés et leurs parties confinales. On sait bien que l'ensemble A s'appelle *partiellement ordonné* si pour certains couples de ses éléments distincts α_0, α_1 on a établi une relation d'ordre qui s'exprime par les mots « l'élément (par exemple α_1) *suit* l'autre élément (α_0) ». La notation correspondante est $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$. On suppose alors vérifiée la condition de transitivité: $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$ et $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$ implique $\alpha_2 \geqslant \alpha_0$.

Un ensemble partiellement ordonné s'appelle *dirigé* *) si l'on peut trouver, pour ses éléments quelconques α_0 et α_1, l'élément α_2 qui suit tout aussi bien α_0 que α_1.

L'ensemble A′ s'appelle *partie* de l'ensemble dirigé A si l'on a les deux conditions:

1°. $A' \subseteq A$;

2°. $\alpha'_0 \in A'$, $\alpha'_1 \in A'$ et $\alpha'_1 \geqslant \alpha'_0$ dans A′ implique $\alpha'_1 \geqslant \alpha'_0$ dans A.

L'ensemble dirigé A′, qui est une partie de l'ensemble dirigé A, s'appelle *partie confinale* de cet ensemble, si chaque élément α de l'ensemble A est suivi (dans A) d'au moins un élément $\alpha' \in A'$ (*condition de confinalité*).

Cas particuliers. Si l'ensemble dirigé A′, qui est une partie de l'ensemble dirigé A, consiste de tous les éléments de l'ensemble A, alors A′ est toujours une partie confinale de A.

Dans ce cas nous disons que A′ s'obtient de A en prenant un *ordre plus faible*.

Supposons en même temps que A′ est une partie de l'ensemble dirigé A qui préserve l'ordre donné dans A (i.e. pour $\alpha_0 \in A'$, $\alpha_1 \in A'$ on a $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$ si et seulement si $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$ dans A). Si A′ satisfait à la condition de confinalité, alors A′ est automatiquement dirigé et sera donc une partie confinale de l'ensemble A.

---

*) « Directed set » en anglais.— *Note du traducteur.*

2. Spectres inverses d'espaces topologiques. Rappelons la définition du spectre inverse et quelques assertions du livre AP, Supplément au chapitre 1, p. 142.

Etant donné l'ensemble dirigé A, appelons ses éléments α, β, γ, ... indices. Supposons que l'on fait correspondre à chaque indice $\alpha \in A$ un espace topologique X_α et que la relation $\beta \geqslant \alpha$ implique l'existence d'une application continue (*projection*) $\mathfrak{w}_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ *). Supposons enfin que pour $\gamma \geqslant \beta \geqslant \alpha$ nous avons la condition de transitivité:

$$\mathfrak{w}_\alpha^\gamma = \mathfrak{w}_\alpha^\beta \mathfrak{w}_\beta^\gamma. \tag{1}$$

Dans ce cas nous disons que l'on a un *spectre inverse* $S = \{X_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^\beta\}$. Les espaces X_α s'appellent *éléments du spectre* S. Le point $x = \{x_\alpha\}$ du produit topologique $\Pi = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ des espaces X_α s'appelle *fil du spectre* S lorsque $x_\alpha = \mathfrak{w}_\alpha^\beta x_\beta$ pour $\beta \geqslant \alpha$. L'ensemble $X \subseteq \Pi$ de tous les fils du spectre S s'appelle *limite du spectre* S et se note $X = \varprojlim X_\alpha$, en outre on introduit en X la topologie induite par le produit Π. L'application $\mathfrak{w}_\alpha : X \to X_\alpha$ qui fait correspondre au fil $x = \{x_\alpha\}$ sa α-ième coordonnée x_α est continue et s'appelle également *projection*. Pour $\beta \geqslant \alpha$ nous avons évidemment sa relation

$$\mathfrak{w}_\alpha = \mathfrak{w}_\alpha^\beta \mathfrak{w}_\beta. \tag{2}$$

Les ensembles de la forme $\mathfrak{w}_\alpha^{-1} O_\alpha$ où O_α est un ensemble ouvert de X_α, $\alpha \in A$, forment, comme on voit facilement, une base de X.

Soit un spectre inverse $\Sigma = \{Y_\beta, \mathfrak{w}_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$; pour chaque $\beta \in B$ supposons définie une application $f_\beta : X \to Y_\beta$ dans l'espace topologique X telle que

$$f_\beta = \mathfrak{w}_\beta^{\beta'} f_{\beta'} \quad \text{pour} \quad \beta' \geqslant \beta. \tag{3}$$

Pour chaque point $x \in X$, l'ensemble $\{f_\beta x\}$ est un fil du spectre Σ qui sera désigné par fx. On définit alors l'application $f : X \to Y$ de l'espace x dans la limite Y du spectre Σ qui fait correspondre au point $x \in X$ le point $fx \in Y$. L'application f sera appelée *limite des applications* f_β. Evidemment

$$f_\beta = \mathfrak{w}_\beta f, \quad \beta \in B. \tag{4}$$

Remarquons que l'application $g : X \to Y$ qui satisfait pour chaque $\beta \in B$ à la relation $f_\beta = \mathfrak{w}_\beta g$ coïncide nécessairement avec l'application f.

---

*) Quand $\beta = \alpha$, il est commode de prendre l'application identique de X_α pour projection $\mathfrak{w}_\alpha^\beta$.

Le lecteur démontrera sans difficulté l'assertion suivante (il en trouvera une démonstration dans le livre AP à la page 144).

Lemme 1°. *Soit* $\Sigma = \{Y_\beta, \varpi_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$, *un spectre inverse. Si les applications* $f_\beta : X \to Y_\beta$ *qui satisfont à la relation* (3) *sont continues,* $\beta \in B$, *alors leur limite* $f : X \to Y$ *est également continue ; si l'on a en même temps*

$$[f_\beta X] = Y_\beta, \quad \beta \in B, \quad \textit{alors } [fX] = Y.$$

Au chapitre 6 nous nous servirons souvent de l'assertion suivante :

Lemme 2°. *Soient* $S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, *et* $\Sigma = \{Y_\beta, \varpi_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$, *des spectres inverses d'espaces topologiques et soit* φ *une application, en général multivaluée, d'un ensemble* $A' \subseteq A$ *sur l'ensemble* B *telle que*

1) *pour deux indices quelconques* α *et* α' *(éventuellement coïncidents) de* A' *et pour les indices* $\beta \in \varphi\alpha$, $\beta' \in \varphi\alpha'$ *de* B *il existe un tel indice* β'', $\beta'' \geqslant \beta$, $\beta'' \geqslant \beta'$, *et un tel indice* $\alpha'' \in \varphi^{-1}\beta''$ *(i.e.* $\beta'' \in \varphi\alpha''$*) que* $\alpha'' \geqslant \alpha$, $\alpha'' \geqslant \alpha'$;

2) *pour chaque couple d'indices* $\alpha \in A'$ *et* $\beta \in \varphi\alpha$ *on peut définir l'application* $f_\beta^\alpha : X_\alpha \to Y_\beta$ *telle que, si* $\beta \in \varphi\alpha$, $\beta' \in \varphi\alpha'$, $\alpha' \geqslant \alpha$, $\beta' \geqslant \beta$, *on a*

$$f_\beta^\alpha \varpi_\alpha^{\alpha'} = \varpi_\beta^{\beta'} f_{\beta'}^{\alpha'}. \tag{5}$$

Alors les applications

$$f_\beta = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha, \quad \alpha \in \varphi^{-1}\beta,$$

de la limite X du spectre S ne dépendent pas du choix de l'indice α *et satisfont aux relations* (3). *La limite* $f : X \to Y$ *des applications* f_β, $\beta \in B$, *satisfait aux relations*

$$f_\beta^\alpha \varpi_\alpha = \varpi_\beta f, \quad \alpha \in \varphi^{-1}\beta. \tag{6}$$

Nous avons ainsi pour le fil $x = \{x_\alpha\} \in X$

$$fx = f\{x_\alpha\} = \{f_\beta^\alpha x_\alpha,\ \alpha \in \varphi^{-1}\beta.\ \beta \in B\}.$$

Si toutes les applications f_β^α *sont continues, alors les applications* f_β, $\beta \in B$, *et* f *le sont aussi.*

Démonstration. Prenons les indices α et α' dans l'ensemble $\varphi^{-1}\beta$. Il existe en vertu de la condition 1) de tels indices $\beta'' \geqslant \beta$ et $\alpha'' \in \varphi^{-1}\beta''$ que $\alpha'' \geqslant \alpha$ et $\alpha'' \geqslant \alpha'$. Il découle des relations (2) et (5) les égalités

$$f_\beta^{\alpha'} \varpi_{\alpha'} = f_\beta^{\alpha'} \varpi_{\alpha'}^{\alpha''} \varpi_{\alpha''} = \varpi_\beta^{\beta''} f_{\beta''}^{\alpha''} \varpi_{\alpha''} = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha^{\alpha''} \varpi_{\alpha''} = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha.$$

L'égalité obtenue $f_\beta^{\alpha'} \varpi_{\alpha'} = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha$ nous montre que l'application $f_\beta = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha$, $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$, ne dépend pas du choix de α. Démontrons les

conditions (3). Prenons les indices β et $\beta' \geqslant \beta$ et des indices quelconques $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$, $\alpha' \in \varphi^{-1}\beta'$ et enfin, suivant la condition (1), les indices $\beta'' \geqslant \beta'$, $\alpha'' \in \varphi^{-1}\beta''$, $\alpha'' \geqslant \alpha$, $\alpha'' \geqslant \alpha'$. Alors (cf. (5))

$$f_\beta = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha^{\alpha''} \varpi_{\alpha''} = \varpi_\beta^{\beta''} f_{\beta''}^{\alpha''} \varpi_{\alpha''} = \varpi_\beta^{\beta'} \varpi_{\beta'}^{\beta''} f_{\beta''}^{\alpha''} \varpi_{\alpha''} =$$
$$= \varpi_\beta^{\beta'} f_{\beta'}^{\alpha'} \varpi_{\alpha'}^{\alpha''} \varpi_{\alpha''} = \varpi_\beta^{\beta'} f_{\beta'}^{\alpha'} \varpi_{\alpha'} = \varpi_\beta^{\beta'} f_{\beta'}.$$

Les relations (3) sont donc vérifiées. D'après le lemme 1°, nous avons pour la limite f des applications f_β

$$\varpi_\beta f = f_\beta = f_\beta^\alpha \varpi_\alpha, \qquad \alpha \in \varphi^{-1}\beta.$$

La continuité de l'application f découle de celle des applications f_β^α en vertu du lemme 1°. Le lemme 2° est démontré.

Remarque 1. Sous les hypothèses du lemme 2°, l'application f, étant la limite des applications f_β, sera également appelée limite des applications f_β^α, $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$, $\beta \in B$.

Remarque 2. Si dans les conditions du lemme 2° on a $A' = A$ et pour chaque $\beta \in \varphi\alpha$, $\alpha \in A$, l'application f_β^α est un homéomorphisme de X_α sur X_β, alors la limite f des applications f_β^α est un homéomorphisme de X sur Y.

Démonstration. Si les fils x et x' ont des coordonnées distinctes dans X_α, alors, en vertu de la bijectivité de l'application f_β^α, $\beta \in \varphi\alpha$, les fils fx et fx' auront des coordonnées distinctes dans Y_β. L'application f est donc injective.

Choisissons un fil $y = \{y_\beta\}$ du spectre Σ et, pour les indices α et $\alpha' \geqslant \alpha$ de A, choisissons pour certains $\beta \in \varphi\alpha$ et $\beta' \in \varphi\alpha'$ les points $x_\alpha = (f_\beta^\alpha)^{-1} y_\beta$ et $x_{\alpha'} = (f_{\beta'}^{\alpha'})^{-1} y_{\beta'}$. D'après l'hypothèse 1) du lemme 2°, trouvons les indices $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geqslant \alpha$, $\alpha'' \geqslant \alpha'$, et $\beta'' \in B$, $\beta'' \geqslant \beta$, $\beta'' \geqslant \beta'$, $\beta'' \in \varphi\alpha''$. Alors pour le point $x_{\alpha''} = (f_{\beta''}^{\alpha''})^{-1} y_{\beta''}$ nous avons, d'après les relations (5) et la bijectivité des applications f_β^α, $f_{\beta'}^{\alpha'}$, $f_{\beta''}^{\alpha''}$,

$$x_\alpha = \varpi_\alpha^{\alpha''} x_{\alpha''} = \varpi_\alpha^{\alpha'} \varpi_{\alpha'}^{\alpha''} x_{\alpha''} = \varpi_\alpha^{\alpha'} x_{\alpha'}.$$

Ceci démontre que l'ensemble $x = \{x_\alpha = (f_\beta^\alpha)^{-1} y_\beta,\ \alpha \in A,\ \beta \in \varphi\alpha\}$ est un fil du spectre S. Pour ce fil on a évidemment $fx = y$. Ainsi, f est une application bijective continue de X sur Y.

Si X est bicompact, alors nous obtenons immédiatement que f est un homéomorphisme. Dans le cas général, on remarque facilement que l'ensemble des fils du spectre S, pour lesquels la α-ième coordonnée est contenue dans l'ensemble O_α ouvert dans X_α, est appliqué par f précisément dans l'ensemble de tous les fils du spectre Σ pour lesquels la β-ième coordonnée, $\beta \in \varphi\alpha$, est contenue dans l'ensemble $O_\beta = f_\beta^\alpha O_\alpha$. Puisque f_β^α est un homéomorphisme, l'ensemble O_β est

ouvert dans Y_β. Ainsi, f applique les ensembles de la base de l'espace X dans les ensembles de la base de l'espace Y; c'est donc un homéomorphisme.

3. Spectres inverses de groupes topologiques. Si les éléments X_α d'un spectre inverse $S = \{X_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, sont des groupes topologiques et les projections $\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}$, leurs applications continues, on dit qu'*un spectre inverse de groupes topologiques est donné*. Dans ce cas, la limite X du spectre S se transforme en un groupe topologique de la manière suivante: le zéro de X sera le fil $0 = \{0_\alpha\}$; pour le fil $x = \{x_\alpha\}$ posons $-x = \{-x_\alpha\}$ et pour les fils $x = \{x_\alpha\}$ et $y = \{y_\alpha\}$ posons

$$x + y = \{x_\alpha + y_\alpha\}.$$

On voit facilement que les opérations du passage à l'élément de signe contraire et l'opération d'addition sont continues dans la topologie de la limite X du spectre S. Remarquons aussi que la projection $\mathfrak{w}_\alpha : X \to X_\alpha$, en vertu de la définition de la structure de groupe dans la limite X du spectre S, sera un homomorphisme (continu).

Lemme 1. *Soit* $\Sigma = \{Y_\beta, \mathfrak{w}_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$, *un spectre inverse de groupes topologiques* Y_β *et supposons défini pour chaque* $\beta \in B$ *un tel homomorphisme* f_β *du groupe topologique* X *dans le groupe* Y_β *que*

$$f_\beta = \mathfrak{w}_\beta^{\beta'} f_{\beta'}, \qquad \beta' \geqslant \beta.$$

Alors la limite f *des homomorphismes* f_β *sera également un homomorphisme. Si tous les homomorphismes* f_β *sont continus, alors l'homomorphisme* f *le sera aussi.*

Démonstration. En effet,

$$f(x + x') = \{f_\alpha (x + x')\} = \{f_\alpha x + f_\alpha x'\} = \\ = \{f_\alpha x\} + \{f_\alpha x'\} = fx + fx'.$$

La continuité de f découle du lemme 1°.

Le lemme 2° implique le

Lemme 2. *Si dans le lemme 2° les spectres* S *et* Σ *sont des spectres de groupes et les applications* f_β^α *sont des homomorphismes, alors les applications* f_β *ainsi que l'application limite* f *seront des homomorphismes. Si tous les homomorphismes* f_β^α *sont continus, alors il en sera de même des homomorphismes* f_β *et de l'homomorphisme limite* f.

En guise d'application des lemmes 2° et 2, démontrons deux propositions qui se rapportent à l'isomorphisme des limites des spectres de groupes inverses.

Les spectres de groupes inverses $S = \{X_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, et $\Sigma = \{Y_\beta, \mathfrak{w}_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$, sont dits *isomorphes* s'il existe entre les ensembles dirigés A et B un tel isomorphisme $\varphi: A \to B$ et pour chaque $\alpha \in A$ il existe entre les groupes topologiques X_α et Y_β, $\beta = \varphi\alpha$, un tel isomorphisme $f_\beta^\alpha: X_\alpha \to Y_\beta$ que pour $\beta' = \varphi\alpha' \geqslant \beta = \varphi\alpha$ on a la relation

$$f_\beta^\alpha \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'} = \mathfrak{w}_\beta^{\beta'} f_{\beta'}^{\alpha'}. \tag{5'}$$

Proposition 1. *Les limites des spectres de groupes inverses isomorphes sont elles-mêmes isomorphes.*

Démonstration. Supposons que les spectres $S = \{X_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, $\Sigma = \{Y_\beta, \mathfrak{w}_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$, sont isomorphes, i.e. qu'il existe un isomorphisme $\varphi: A \to B$ et des isomorphismes $f_\beta^\alpha: X_\alpha \to Y_\beta$, $\beta = \varphi\alpha$, qui satisfont aux relations (5'). D'après les lemmes 2° et 2, on peut définir un homomorphisme $f: X \to Y$ continu des limites des spectres S et Σ suivant la relation

$$fx = \{f_\beta^\alpha x_\alpha, \ \beta = \varphi\alpha\}, \qquad x = \{x_\alpha\} \in X.$$

Les mêmes lemmes permettent de définir un homomorphisme continu $g: Y \to X$ en posant

$$gy = \{(f_\beta^\alpha)^{-1} y_\beta, \ \alpha = \varphi^{-1}\beta\}, \quad y = \{y_\beta\} \in Y.$$

Il est évident que $g^{-1}f$ et $f^{-1}g$ sont les applications identiques des groupes X et Y respectivement. La proposition 1 est démontrée.

Soit $S = \{X_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, un spectre inverse et B, une partie confinale de l'ensemble A. Alors le spectre $S_B = \{X_\beta, \mathfrak{w}_\beta^{\beta'}\}$, $\beta \in B$ *), s'appelle *partie confinale du spectre S*.

Montrons que la limite Y du spectre S_B est isomorphe à la limite X du spectre S.

Si $\varphi: B \to B$ désigne l'application identique de l'ensemble $B \subseteq A$ sur lui-même, alors φ satisfait à la condition 1) du lemme 2°. Pour $\beta \in B$ prenons en qualité de f_β^β l'application identique du groupe X_β. La condition 2) du lemme 2° est également vérifiée. Par conséquent, les lemmes 2° et 2 permettent de définir un homomorphisme continu $f: X \to Y$ en posant $fx = f\{x_\alpha\} = \{x_\beta, \beta \in B\}$.

Montrons que l'application f est une bijection de X sur Y. Prenons le fil $y = \{x_\beta\} \in Y$. Si $\alpha < \beta$ et $\alpha < \beta'$, $\alpha \in A$, β et $\beta' \in B$, il existe un $\beta'' \in B$, $\beta'' \geqslant \beta$, $\beta'' \geqslant \beta'$. Alors

$$\mathfrak{w}_\alpha^\beta x_\beta = \mathfrak{w}_\alpha^\beta \mathfrak{w}_\beta^{\beta''} x_{\beta''} = \mathfrak{w}_\alpha^{\beta''} x_{\beta''} = \mathfrak{w}_\alpha^{\beta'} \mathfrak{w}_{\beta'}^{\beta''} x_{\beta'} = \mathfrak{w}_\alpha^{\beta'} x_{\beta'},$$

---

*) La projection $\mathfrak{w}_\beta^{\beta'}$ du spectre S_B coïncide avec la projection $\mathfrak{w}_\beta^{\beta'}$ du spectre S.

i.e. le point $x_\alpha = \mathfrak{w}_\alpha^\beta x_\beta$, $\beta \in B$, $\beta > \alpha$, ne dépend pas du choix de la coordonnée x_β du fil y. Montrons que l'ensemble $gy = \{x_\alpha\}$, où $x_\alpha = \mathfrak{w}_\alpha^\beta x_\beta$ pour un certain $x_\beta \in y$ est un fil du spectre S. En effet, soit $\alpha' \geqslant \alpha$. Puisque B est une partie confinale de A, il existe dans B un indice $\beta \geqslant \alpha'$. Alors

$$\mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'} x_{\alpha'} = \mathfrak{w}_\alpha^{\alpha'} \mathfrak{w}_{\alpha'}^\beta x_\beta = \mathfrak{w}_\alpha^\beta x_\beta = x_\alpha.$$

Nous avons ainsi obtenu une application $g\colon Y \to X$ qui, comme on le voit facilement, est inverse à l'application f. Ainsi, f est un homomorphisme bijectif et continu de X sur Y, qui fait correspondre au fil $x = \{x_\alpha\}$ du spectre S le seul fil $fx = \{x_\beta\}$ du spectre S_B qu'il contient.

Il reste à démontrer que l'application g est continue. Considérons le fil $y = \{x_\beta\} \in Y$, le fil $x = gy = \{x_\alpha\}$ et son voisinage de base $Ox = \{x' = \{x'_\alpha\}\colon x'_{\alpha_0} \in O_{\alpha_0}\}$. Il existe un indice $\beta_0 \in B$, $\beta_0 \geqslant \alpha_0$, pour lequel

$$Ox = \{x' = \{x'_\alpha\}\colon x'_{\beta_0} \in O_{\beta_0} = (\mathfrak{w}_{\alpha_0}^{\beta_0})^{-1} O_{\alpha_0}\}.$$

Evidemment, $Ox \supseteq gV$, où

$$V = \{y' = \{x'_\beta\}\colon x'_{\beta_0} \in O_{\beta_0}\}.$$

La continuité de l'application g est démontrée.

Nous avons obtenu la

Proposition 2. *Si Σ est la partie confinale d'un spectre inverse de groupes S, alors, en faisant correspondre à chaque fil du spectre S l'unique fil du spectre Σ qu'il contient, nous obtiendrons un isomorphisme du groupe limite du spectre S sur le groupe limite du spectre Σ.*

Au chapitre 6 nous aurons affaire aux spectres inverses de groupes bicompacts, pour lesquels l'assertion suivante est importante.

Proposition 3. *La limite d'un spectre inverse de groupes bicompacts est un groupe bicompact.*

Ceci découle immédiatement du fait que la limite d'un spectre inverse de bicompacts est un bicompact (AP, supplément au chapitre 1, p. 143).

Nous nous servirons également au chapitre 6 du

Lemme 3. *Supposons donnés les spectres inverses $S = \{X_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^\beta\}$, $S' = \{Y_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ et $S'' = \{Z_\alpha, q_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in A$, de groupes bicompacts X_α, Y_α et Z_α et: 1) pour chaque indice $\alpha \in A$ il existe les homomorphismes*

$$f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha \quad \text{et} \quad g_\alpha\colon Y_\alpha \to Z_\alpha$$

qui vérifient $\operatorname{Im} f_\alpha = \operatorname{Ker} g_\alpha$; *2) pour tous les α et $\beta \in A$ on a les relations $f_\alpha \mathfrak{w}_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta f_\beta$ et $g_\alpha p_\alpha^\beta = q_\alpha^\beta g_\beta$. Alors, pour les homomorphis-*

mes limites $f: X \to Y$ *et* $g: Y \to Z$, *on a la relation*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g.$$

Démonstration. L'image du point $x = \{x_\alpha\}$ dans Z est le point $gfx = g(\{f_\alpha x_\alpha\}) = \{g_\alpha f_\alpha x_\alpha\} = \{0_\alpha\}$, i.e. $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

Considérons le point $y = \{y_\alpha\}$ pour lequel $gy = 0$, i.e. $g_\alpha y_\alpha = 0_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Il découle de la condition 1) que chaque ensemble $f_\alpha^{-1} y_\alpha = \Phi_\alpha$ est non vide, et de la condition 2) on tire que $\mathfrak{w}_\alpha^\beta \Phi_\beta \subseteq \subseteq \Phi_\alpha$ quels que soient $\beta > \alpha$. Les ensembles Φ_α, $\alpha \in A$, sont bicompacts; par conséquent, la limite du spectre $\{\Phi_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in A$, est non vide, i.e. le spectre S possède au moins un fil $x = \{x_\alpha\}$ pour lequel $x_\alpha \in \Phi_\alpha$ quel que soit α. Il est clair que $fx = y$. Ainsi, $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f$. Le lemme est démontré.

4. Spectres directs de groupes. Soit, comme dans le cas des spectres inverses, un ensemble dirigé A dont les éléments α, β, γ, ... s'appellent indices; à chaque indice $\alpha \in A$ correspond un groupe X_α; chaque fois que $\beta \geqslant \alpha$, on a l'homomorphisme (la *projection*) *)

$$\pi_\beta^\alpha: X_\alpha \to X_\beta,$$

et pour $\gamma \geqslant \beta \geqslant \alpha$ on a la condition de transitivité

$$\pi_\gamma^\alpha = \pi_\gamma^\beta \pi_\beta^\alpha. \tag{1}$$

Sous ces hypothèses, on dit qu'un spectre de groupes direct est défini ou, plus précisément, le spectre

$$\bar{S} = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}, \quad \alpha \in A,$$

des groupes X_α avec les projections π_α^β.

Le *groupe limite* (*la limite*) du spectre $\bar{S}$ se définit de la manière suivante.

Deux éléments $x_\alpha \in X_\alpha$, $y_\beta \in X_\beta$ sont dits *équivalents* dans un spectre donné s'il existe un γ, qui suit α aussi bien que β, pour lequel $\pi_\gamma^\alpha x_\alpha = \pi_\gamma^\beta y_\beta$.

On vérifie aisément que cette définition de l'équivalence satisfait aux conditions de réflexivité, de symétrie et de transitivité et détermine donc une décomposition de l'ensemble $\bigcup_\alpha X_\alpha$ en classes d'éléments équivalents. Ces classes, que l'on appelle également *faisceaux*, sont par définition les éléments du groupe limite X. La somme de deux faisceaux ξ' et ξ'' se définit ainsi: on choisit un tel α qu'il existe dans les faisceaux ξ' et ξ'' des éléments x'_α, x''_α

---

*) On entend par π_α^α l'application identique de l'ensemble X_α.

appartenant au groupe X_α *). Le faisceau ξ qui contient l'élément $x'_\alpha + x''_\alpha$ s'appelle par définition somme des faisceaux ξ' et ξ''. On vérifie aisément que cette définition de la somme ne dépend pas du choix des éléments $x'_\alpha \in \xi'$, $x''_\alpha \in \xi''$. Le zéro du groupe X sera le faisceau qui contient les zéros de tous les groupes X_α. Le faisceau opposé au faisceau ξ sera celui qui consiste des éléments opposés aux éléments du faisceau ξ. Le fait que le groupe X est la limite du spectre $\{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$ s'écrit ainsi: $X = \varinjlim X_\alpha$. L'application

$$\pi^\alpha : X_\alpha \to X,$$

qui fait correspondre à l'élément x_α du groupe X_α le faisceau $\xi \in X$ qui le contient s'appelle *projection* de X_α dans X. On voit facilement que c'est un homomorphisme. Il est évident que pour $\beta \geqslant \alpha$ on a

$$\pi^\alpha = \pi^\beta \pi^\alpha_\beta. \tag{2}$$

Soit un spectre de groupes direct $\overline{\Sigma} = \{Y_\beta, \pi^\beta_{\beta'}\}$, $\beta \in B$, et supposons défini pour chaque β un homomorphisme $f^\beta : Y_\beta \to X$ dans le groupe X tel que

$$f^\beta = f^{\beta'} \pi^\beta_{\beta'} \text{ pour } \beta' \geqslant \beta. \tag{3}$$

Alors, pour deux points quelconques $y_\beta \in Y_\beta$ et $y_{\beta'} \in Y_{\beta'}$, appartenant à un même faisceau, on a la relation

$$f^\beta y_\beta = f^{\beta'} y_{\beta'}.$$

En effet, il existe un indice β'' tel que $\beta'' \geqslant \beta$, $\beta'' \geqslant \beta'$ et $\pi^\beta_{\beta''} y_\beta = \pi^{\beta'}_{\beta''} y_{\beta'}$. On obtient de la relation (3)

$$f^\beta y_\beta = f^{\beta''} \pi^\beta_{\beta''} y_\beta = f^{\beta''} \pi^{\beta'}_{\beta''} y_{\beta'} = f^{\beta'} y_{\beta'}.$$

Ainsi, pour la limite Y du spectre $\overline{\Sigma}$ on a l'application $\overline{f} : Y \to X$ qui satisfait pour tout β à la relation

$$f^\beta = \overline{f} \pi^\beta. \tag{4}$$

L'application $\overline{f}$ s'appelle *limite des applications* f^β. Il est évident que l'image $f\xi$ d'un faisceau quelconque ξ est définie par l'image $f^\beta y_\beta$ d'un élément quelconque y_β de ce faisceau.

L'application $\overline{f}$ est un homomorphisme. Montrons-le.

Considérons les faisceaux ξ et ξ'. Il existe un indice β tel que l'on peut trouver des points $y_\beta \in \xi \cap Y_\beta$ et $y'_\beta \in \xi' \cap Y_\beta$. Alors

$$\overline{f}(\xi + \xi') = f^\beta (y_\beta + y'_\beta) = f^\beta y_\beta + f^\beta y'_\beta = \overline{f}\xi + \overline{f}\xi'.$$

Ainsi, nous avons démontré le

*) Un tel α existe toujours; prenons en effet $x'_{\alpha'} \in \xi'$, $x''_{\alpha''} \in \xi''$ et un indice α qui suit α' aussi bien que α''; les éléments $x'_\alpha = \pi^{\alpha'}_\alpha x'_{\alpha'}$, $x''_\alpha = \pi^{\alpha''}_\alpha x''_{\alpha''}$ du groupe X_α appartiennent respectivement aux faisceaux ξ' et ξ''.

Lemme $\bar{1}$. *Soit un spectre de groupes direct* $\bar{\Sigma} = \{Y_\beta, \pi^\beta_{\beta'}\}$, $\beta \in B$, *et supposons définis pour tous les* β *des homomorphismes* $f^\beta: Y_\beta \to X$ *dans le groupe* X *qui satisfont aux relations* $(\bar{3})$. *Alors la limite* $\bar{f}: Y \to X$ *des homomorphismes* f^β *est un homomorphisme de la limite* Y *du spectre* $\bar{\Sigma}$ *qui satisfait à la relation* $(\bar{4})$, *tandis que l'image* $\bar{f}\xi$ *d'un faisceau quelconque* $\xi \in Y$ *coïncide avec l'image* $f^\beta y_\beta$ *d'un élément quelconque* y_β *de ce faisceau.*

Au chapitre 6 nous nous servirons du

Lemme $\bar{2}$. *Supposons donnés les spectres de groupes directs* $\bar{S} = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, *et* $\bar{\Sigma} = \{Y_\beta, \pi^\beta_{\beta'}\}$, $\beta \in B$, *et une application* φ, *éventuellement multivaluée, de l'ensemble* $A' \subseteq A$ *sur l'ensemble* B *telle que:*

1) *pour chaque couple d'indices* α *et* α' *(éventuellement identiques) de* A' *et pour les indices* $\beta \in \varphi\alpha$, $\beta' \in \varphi\alpha'$ *il existe un indice* β'', $\beta'' \geqslant \beta$, $\beta'' \geqslant \beta'$, *et un indice* $\alpha'' \in \varphi^{-1}\beta''$ *tels que* $\alpha'' \geqslant \alpha$, $\alpha'' \geqslant \alpha'$;

2) *pour chaque couple d'indices* $\alpha \in A'$ *et* $\beta \in \varphi\alpha$ *il existe un homomorphisme* $f^\beta_\alpha: Y_\beta \to X_\alpha$ *tel que pour* $\beta \in \varphi\alpha$, $\beta' \in \varphi\alpha'$, $\alpha' \geqslant \alpha$, $\beta' \geqslant \beta$, *on a*

$$f^{\beta'}_{\alpha'}\pi^\beta_{\beta'} = \pi^\alpha_{\alpha'} f^\beta_\alpha. \tag{$\bar{5}$}$$

Alors les applications

$$f^\beta = \pi^\alpha f^\beta_\alpha: \quad Y_\beta \to X, \quad \alpha \in \varphi^{-1}\beta,$$

dans la limite X *du spectre* $\bar{S}$ *ne dépendent pas du choix de l'indice* α; *ce sont des homomorphismes qui vérifient les relations* $(\bar{3})$. *La limite* $\bar{f}: Y \to X$ *des homomorphismes* f^β *vérifie les relations*

$$\pi^\alpha f^\beta_\alpha = \bar{f}\pi^\beta, \qquad \alpha \in \varphi^{-1}\beta. \tag{$\bar{6}$}$$

En outre, l'image $\bar{f}\xi$ *du faisceau* ξ *du spectre* $\bar{\Sigma}$ *est un faisceau du spectre* $\bar{S}$ *défini par l'image* $f^\beta_\alpha y_\beta$ *d'un élément quelconque* y_β *du faisceau* ξ *pour* $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$.

Démonstration. Prenons les indices α et α' dans l'ensemble $\varphi^{-1}\beta$. D'après la condition 1), il existe un tel indice $\beta'' \geqslant \beta$ et un $\alpha'' \in \varphi^{-1}\beta''$ que $\alpha'' \geqslant \alpha$ et $\alpha'' \geqslant \alpha'$. En vertu des relations (2) et $(\bar{5})$ on a

$$\pi^\alpha f^\beta_\alpha = \pi^{\alpha''}\pi^\alpha_{\alpha''} f^\beta_\alpha = \pi^{\alpha''} f^{\beta''}_{\alpha''}\pi^\beta_{\beta''} = \pi^{\alpha''}\pi^{\alpha'}_{\alpha''} f^\beta_{\alpha'} = \pi^{\alpha'} f^\beta_{\alpha'}.$$

L'indépendance des applications $f^\beta = \pi^\alpha f^\beta_\alpha$ par rapport au choix des indices $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$ est démontrée. Les applications f^β sont des homomorphismes, parce que les applications π^α et f^β_α l'étaient.

Etablissons les relations ($\bar{3}$). Prenons les indices β et $\beta' > \beta$ et des indices quelconques $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$, $\alpha' \in \varphi^{-1}\beta'$ et (selon la condition (1)) les indices $\beta'' \geqslant \beta'$, $\alpha'' \in \varphi^{-1}\beta''$, $\alpha'' \geqslant \alpha$, $\alpha'' \geqslant \alpha'$. Alors (cf. ($\bar{5}$))

$$f^\beta = \pi^\alpha f^\beta_\alpha = \pi^{\alpha''}\pi^\alpha_{\alpha''} f^\beta_\alpha = \pi^{\alpha''} f^{\beta''}_{\alpha''}\pi^\beta_{\beta''} =$$
$$= \pi^{\alpha''} f^{\beta''}_{\alpha''}\pi^{\beta'}_{\beta''}\pi^\beta_{\beta'} = \pi^{\alpha''}\pi^{\alpha'}_{\alpha''} f^{\beta'}_{\alpha'}\pi^\beta_{\beta'} = \pi^{\alpha'} f^{\beta'}_{\alpha'}\pi^\beta_{\beta'} = f^{\beta'}\pi^\beta_{\beta'}.$$

Les relations ($\bar{3}$) sont ainsi vérifiées.

Le lemme $\bar{1}$ et les relations ($\bar{4}$) impliquent les relations

$$\bar{f}\pi^\beta = f^\beta = \pi^\alpha f^\beta_\alpha, \qquad \alpha \in \varphi^{-1}\beta.$$

L'assertion du lemme découle immédiatement de ces relations. Le lemme $\bar{2}$ est démontré.

Remarque 1. Dans les conditions du lemme $\bar{2}$ l'homomorphisme $\bar{f}$, qui est la limite des homomorphismes f^β, sera également appelé *limite des homomorphismes* f^β_α, $\alpha \in \varphi^{-1}\beta$, $\beta \in B$.

Remarque $\bar{2}$. Si dans les conditions du lemme $\bar{2}$ on a $A' = A$ et pour chaque $\beta \in \varphi\alpha$, $\alpha \in A$, l'application f^β_α est un isomorphisme de Y_β sur X_α, alors la limite $\bar{f}$ des applications f^β_α est un isomorphisme de Y sur X.

Démonstration. Si ζ est un faisceau du spectre $\bar{S}$ et $x_\alpha \in \zeta$, alors on peut trouver dans Y_β, $\beta \in \varphi\alpha$, un élément y_β tel que $f^\beta_\alpha y_\beta = x_\alpha$. Alors pour le faisceau $\xi \ni y_\beta$ du spectre $\bar{\Sigma}$ on aura, d'après le lemme $\bar{2}$, $\bar{f}\xi = \zeta$. Par conséquent, $\bar{f}$ est une application de Y sur X. Il reste à démontrer qu'elle est injective. Prenons les points $y_\beta \in Y_\beta$, $y_{\beta'} \in Y_{\beta'}$, $f^\beta_\alpha y_\beta = x_\alpha \in X_\alpha$, $\beta \in \varphi\alpha$, $f^{\beta'}_{\alpha'} y_{\beta'} = x_{\alpha'} \in X_{\alpha'}$, $\beta' \in \varphi\alpha'$. Soit $\pi^\alpha_{\alpha_1} x_\alpha = \pi^{\alpha'}_{\alpha_1} x_{\alpha'} = x_{\alpha_1}$ pour un certain α_1. Prenons $\beta_1 \in \varphi\alpha_1$; $\beta_2 \geqslant \beta$, $\beta_2 \geqslant \beta'$; $\alpha_2 \in \varphi^{-1}\beta_2$. D'après la condition 1) du lemme $\bar{2}$ trouvons les indices α'' et $\beta'' \in \varphi\alpha''$, $\alpha'' \geqslant \alpha_1$, $\alpha'' \geqslant \alpha_2$, $\beta'' \geqslant \beta_1$, $\beta'' \geqslant \beta_2$. En vertu des relations ($\bar{5}$) et de la bijectivité des applications f^β_α on a

$$\pi^\beta_{\beta''} y_\beta = (f^{\beta''}_{\alpha''})^{-1}\pi^\alpha_{\alpha''} f^\beta_\alpha y_\beta = (f^{\beta''}_{\alpha''})^{-1}\pi^{\alpha_1}_{\alpha''}\pi^\alpha_{\alpha_1} x_\alpha =$$
$$= (f^{\beta''}_{\alpha''})^{-1}\pi^{\alpha_1}_{\alpha''} x_{\alpha_1} = (f^{\beta''}_{\alpha''})^{-1}\pi^{\alpha_1}_{\alpha''}\pi^{\alpha'}_{\alpha_1} f^{\beta'}_{\alpha'} y_{\beta'} = \pi^{\beta'}_{\beta''} y_{\beta'}.$$

La bijectivité (et donc l'isomorphie) de $\bar{f}$ est démontrée.

Les spectres de groupes directs $\bar{S} = \{X_\alpha, \pi^\alpha_{\alpha'}\}$, $\alpha \in A$, et $\bar{\Sigma} = \{Y_\beta, \pi^\beta_{\beta'}\}$, $\beta \in B$, sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi: A \to B$ entre les ensembles dirigés A et B et si, pour chaque $\alpha \in A$, on peut établir un tel isomorphisme $f^\beta_\alpha: Y_\beta \to X_\alpha$ entre les groupes

X_α et Y_β, $\beta = \varphi\alpha$, que pour $\beta' = \varphi\alpha' > \beta = \varphi\alpha$ on a la relation

$$(\bar{5}') \qquad f_{\alpha'}^{\beta'} \pi_{\beta'}^{\beta} = \pi_{\alpha'}^{\alpha} f_{\alpha}^{\beta}.$$

D'après le lemme $\bar{2}$, l'application φ et les isomorphismes f_α^β, $\beta = \varphi\alpha$, ainsi que l'application φ^{-1} et les isomorphismes $(f_\alpha^\beta)^{-1}$, $\alpha = \varphi^{-1}\beta$, déterminent des homomorphismes $\bar{f}: Y \to X$ et $\bar{g}: X \to Y$ des limites Y et X des spectres $\bar{\Sigma}$ et $\bar{S}$ dont l'un est l'inverse de l'autre (ce qui s'ensuit immédiatement de la dernière assertion du lemme $\bar{2}$). Ainsi, nous avons démontré la

Proposition 1. *Les limites de deux spectres de groupes directs isomorphes sont isomorphes.*

Soit un spectre de groupes direct $\bar{S} = \{X_\alpha, \pi_{\alpha'}^{\alpha}\}$, $\alpha \in A$, et soit B une partie confinale de l'ensemble A. Alors le spectre $\bar{S}_B = \{X_\beta, \pi_{\beta'}^{\beta}\}$, $\beta \in B$ (les projections $\pi_{\beta'}^{\beta}$ du spectre $\bar{S}_B$ coïncident avec les projections $\pi_{\beta'}^{\beta}$ du spectre $\bar{S}$), s'appelle partie confinale du spectre $\bar{S}$.

Démontrons que la limite Y du spectre $\bar{S}_B$ est isomorphe à la limite X du spectre $\bar{S}$.

Désignons par $\varphi: B \to B$ l'application identique de l'ensemble $B \subseteq A$ sur lui-même. Elle satisfait à la condition 1) du lemme $\bar{2}$. Pour $\beta \in B$, prenons en guise de f_β^β l'application identique du groupe X_β. La condition 2) du lemme $\bar{2}$ est également vérifiée. On a donc l'homomorphisme $\bar{f}: Y \to X$ qui fait correspondre au faisceau ξ du spectre $\bar{S}_B$ le faisceau $\bar{f}\xi$ (du spectre $\bar{S}$) contenant l'image $f_\beta^\beta y_\beta$ d'un élément quelconque y_β du faisceau ξ, i.e. $\bar{f}\xi$ est un faisceau (du spectre $\bar{S}$) contenant chaque élément du faisceau ξ et donc le faisceau ξ lui-même.

L'application $\bar{f}$ est une bijection de Y sur X.

En effet, considérons des éléments quelconques y_β et $y_{\beta'}$, β et $\beta' \in B$, du faisceau ζ du spectre $\bar{S}$. Il existe alors un tel indice $\alpha \in A$, $\alpha \geqslant \beta$, $\alpha \geqslant \beta'$, que $\pi_\alpha^\beta y_\beta = \pi_\alpha^{\beta'} y_{\beta'}$. Mais alors, pour l'indice $\beta'' \in B$, $\beta'' \geqslant \alpha$ (qui existe puisque l'ensemble B est la partie confinale de l'ensemble A), on a

$$\pi_{\beta''}^{\beta} y_\beta = \pi_{\beta''}^{\alpha} \pi_\alpha^\beta y_\beta = \pi_{\beta''}^{\alpha} \pi_\alpha^{\beta'} y_{\beta'} = \pi_{\beta''}^{\beta'} y_{\beta'}.$$

Ainsi, chaque faisceau ζ du spectre $\bar{S}$ contient un faisceau unique (du spectre $\bar{S}_B$) consistant de tous les éléments du faisceau ζ contenus dans les éléments Y_β du spectre S_B. Nous avons donc démontré la

Proposition 2. *Si $\bar{\Sigma}$ est la partie confinale du spectre de groupes direct $\bar{S}$, alors, en faisant correspondre à chaque faisceau du spectre $\bar{\Sigma}$ l'unique faisceau du spectre $\bar{S}$ qui le contient, on obtient un isomorphisme de la limite du spectre $\bar{\Sigma}$ sur la limite du spectre $\bar{S}$.*

Lemme 3. *Si*

$$\bar{S}=\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta\}, \quad \bar{S}'=\{Y_\alpha, p^\alpha_\beta\}, \quad \bar{S}''=\{Z_\alpha, q^\alpha_\beta\}, \quad \alpha\in A,$$

sont des spectres directs des groupes X_α, Y_α et Z_α tels que

1) *pour chaque indice $\alpha \in A$ sont définis des homomorphismes $\varphi_\alpha: Y_\alpha \to X_\alpha$ et $\psi_\alpha: Z_\alpha \to Y_\alpha$, tels que*

$$\operatorname{Im}\psi_\alpha = \operatorname{Ker}\varphi_\alpha;$$

2) *pour tous les α et $\beta \in A$ on a les relations*

$$\pi^\alpha_\beta\varphi_\alpha = \varphi_\beta p^\alpha_\beta \quad \textit{et} \quad p^\alpha_\beta\psi_\alpha = \psi_\beta q^\alpha_\beta,$$

alors pour les homomorphismes limites $\varphi: Y \to X$ et $\psi: Z \to Y$ on a la relation

$$\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi.$$

Démonstration. Si z_α est un élément du faisceau z du spectre $\bar{S}''$, on a, en vertu de la condition 1), $\varphi_\alpha\psi_\alpha z_\alpha = 0$, i.e. $\varphi\psi z = 0$, ce qui signifie que $\operatorname{Im}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

Supposons maintenant $\varphi y = 0$. Cela signifie que pour un certain élément y_α du faisceau y on a la relation $\varphi_\alpha y_\alpha = 0$. D'après la condition 1), on peut trouver un tel élément z_α du groupe Z_α que $\psi_\alpha z_\alpha = y_\alpha$, mais alors $\psi z = y$ pour le faisceau z qui contient l'élément z_α. L'inclusion $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Im}\psi$ est aussi démontrée, ce qui termine la démonstration du lemme.

5. **Spectres duaux.** Supposons que pour un même ensemble d'indices nous avons deux spectres de groupes: un spectre direct

$$\bar{S}=\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta\}$$

et un spectre inverse de groupes bicompacts

$$S = \{Y_\alpha, \varpi^\beta_\alpha\}$$

tels que pour chaque α les groupes X_α et Y_α sont duaux entre eux (voir Supplément au chapitre 1, p. 85) et pour chaque couple β, α, $\beta \geqslant \alpha$, les homomorphismes π^α_β et ϖ^β_α sont duaux (Loc. cit.). Dans ces conditions, les spectres $\bar{S}$ et S s'appellent *duaux*. Posons $X = \varinjlim X_\alpha$, $Y = \varprojlim Y_\alpha$.

Pour des éléments quelconques

$$x \in X, \quad y \in Y$$

définissons de la manière suivante le produit scalaire (x, y): on prend arbitrairement $x_\alpha \in x$ et l'on pose $(x, y) = (x_\alpha, y_\alpha)$, où $y_\alpha \in y$.

Montrons tout d'abord que cette définition est correcte, i.e. ne dépend pas du choix $x_\alpha \in x$. En effet, soit $x_\beta \in x$. Choisissons γ qui suit α et β, de sorte que $\pi_\gamma^\alpha x_\alpha = \pi_\gamma^\beta x_\beta = x_\gamma$. Il suffit de démontrer que $(x_\alpha, y_\alpha) = (x_\gamma, y_\gamma)$ et $(x_\beta, y_\beta) = (x_\gamma, y_\gamma)$. Mais

$$(x_\gamma, y_\gamma) = (\pi_\gamma^\alpha x_\alpha, y_\gamma) = (x_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^\gamma y_\gamma) = (x_\alpha, y_\alpha).$$

On démontre l'égalité $(x_\beta, y_\beta) = (x_\gamma, y_\gamma)$ de la même manière.

La distributivité du produit scalaire introduit se vérifie aisément. Par conséquent, chaque élément $y \in Y$ détermine un caractère du groupe X $f_y(x) = (x, y)$ (où x parcourt tout le groupe X); nous avons donc un homomorphisme algébrique φ, à savoir l'application $y \to f_y$ du groupe Y dans le groupe des caractères X^* du groupe X. Démontrons que pour chaque élément non nul $y \in Y$, le caractère $\varphi(y) = f_y$ est également non nul; ceci démontrera que φ est un monomorphisme (algébrique) du groupe Y dans le groupe X^*. Mais si $y \neq 0$, il existe un élément non nul $y_\alpha \in y$ du groupe Y_α et donc un tel élément $x_\alpha \in X_\alpha$ que $(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$. Mais alors, en désignant $x \in X$ le faisceau contenant l'élément x_α, nous avons

$$f_y(x) = (x, y) = (x_\alpha, y_\alpha) \neq 0,$$

ce qui démontre notre assertion. Montrons ensuite que l'application φ est une *surjection* sur le groupe X^*, i.e. construisons, pour chaque caractère f du groupe X un tel $y \in Y$ que $f(x) = f_y(x) = (x, y)$ quel que soit $x \in X$. Pour chaque α, l'application $f\pi^\alpha$ est un homomorphisme du groupe X_α dans le groupe $\varkappa$, i.e. un caractère du groupe X_α, donc $f\pi^\alpha = y_\alpha \in Y_\alpha$. Démontrons que l'ensemble y de tous les y_α ainsi construits forme un fil; alors, en choisissant arbitrairement $x \in X$ et $x_\alpha \in x$, nous aurons

$$(x, y) = (x_\alpha, y_\alpha) = f\pi^\alpha(x_\alpha) = f(x),$$

i.e. notre but sera atteint. Considérons pour des $\beta > \alpha$ quelconques les homomorphismes y_α et y_β et démontrons que $\mathfrak{w}_\alpha^\beta y_\beta = y_\alpha$. Ceci montrera que $y = \{y_\alpha\}$ est un fil. Choisissons arbitrairement $x_\alpha \in X_\alpha$. Nous avons

$$(x_\alpha, y_\alpha) = f\pi^\alpha(x_\alpha) = f\pi^\beta(\pi_\beta^\alpha x_\alpha) = (\pi_\beta^\alpha x_\alpha, y_\beta) = (x_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^\beta y_\beta).$$

Puisque l'égalité $(x_\alpha, y_\alpha) = (x_\alpha, \mathfrak{w}_\alpha^\beta y_\beta)$ est satisfaite pour tous les $x_\alpha \in X_\alpha$, alors $y_\alpha = \mathfrak{w}_\alpha^\beta y_\beta$.

Ainsi, φ est un isomorphisme algébrique du groupe Y sur le groupe X^*. Il reste à démontrer que c'est un isomorphisme topologique. Mais puisque Y, ainsi que X^* sont bicompacts, il suffit de démontrer que φ est une application continue du groupe Y sur

le groupe X^*. Il suffit de démontrer la continuité dans l'élément nul. Supposons donné un voisinage quelconque U de l'élément nul du groupe X^*. Cela signifie que l'on se donne un certain voisinage W de zéro du groupe $\varkappa$ et un certain ensemble fini d'éléments $x^1, \ldots, x^s$ du groupe X; mais alors U (d'après la définition de la topologie dans le groupe de caractères) consiste de tous les $f_y \in X^*$ pour lesquels $f_y(x^j) = (x^j, y) \in W$, $j = 1, \ldots, s$.

Fixons maintenant un tel α qu'il soit possible de choisir un élément x^j_α dans chaque faisceau x^j, $j = 1, \ldots, s$. Pour chacun de ces éléments x^j_α prenons un tel voisinage V_α de l'élément nul dans Y_α que l'on ait $(x^j_\alpha, V_\alpha) \subseteq W$ quel que soit $j = 1, \ldots, s$. Alors, pour le voisinage $\mathfrak{w}_\alpha^{-1} V_\alpha$ de l'élément nul de Y, nous aurons $(x^j, \mathfrak{w}_\alpha^{-1} V_\alpha) = (x^j_\alpha, V_\alpha) \subseteq W$ (pour tous les $j = 1, \ldots, s$), ce qui signifie

$$\varphi(\mathfrak{w}_\alpha^{-1} V_\alpha) \subseteq U.$$

Ainsi, nous avons démontré la

Proposition 4. *Relativement à la définition du produit scalaire des éléments des groupes limites de deux spectres duaux, ces groupes limites sont duaux entre eux.*

CHAPITRE SEPT

THÉORÈME DE HOPF ET PREMIER THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE HOMOLOGIQUE DE LA DIMENSION POUR LES BICOMPACTS, SOUS SA FORME ALGÉBRIQUE (COHOMOLOGIQUE)

Soit X un compact et $\dim X = n$. Nous savons déjà qu'il existe alors dans X un ensemble fermé A qui contient un cycle convergent z^{n-1} pour le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$, homologue à zéro dans X mais non homologue à zéro dans A. En même temps, pour $r > n - 1$, chaque cycle de dimension r homologue à zéro dans X est homologue à zéro sur chacun de ses supports $A \subseteq X$.

La même assertion peut être énoncée d'une autre manière (chapitre 6, p. 340). Si X est un compact et $\dim X = n$, alors il existe dans X un tel ensemble fermé A que le groupe $\Delta^{n-1}(A : X, \mathfrak{R}_1)$ est non nul, tandis que pour tout fermé $A \subseteq X$, avec $r > n - 1$ et pour un groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ quelconque, on a $\Delta^r(A : X, \mathfrak{A}) = 0$.

Nous verrons au présent chapitre que le théorème énoncé ci-dessus reste vrai, et même pour un bicompact quelconque de dimension n, si l'on y remplace le groupe de coefficients $\mathfrak{R}_1$ par le groupe cyclique continu $\varkappa$. Le groupe $\varkappa$ et le groupe I des nombres entiers sont duaux dans le sens de la théorie des caractères de Pontriaguine; par conséquent, les groupes $\Delta^{n-1}(A : X, \varkappa)$ et $\nabla^{n-1}(A : X, I)$ sont duaux et l'annulation de l'un est équivalente à l'annulation de l'autre. Ainsi, nous obtenons la proposition suivante (premier théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension pour les bicompacts sous sa forme algébrique):

Soit X un bicompact et $\dim X = n$. *Alors n est le plus grand nombre entier pour lequel X contient un tel ensemble fermé A qu'une des deux conditions équivalentes ci-dessous est satisfaite*:

$$\Delta^{n-1}(A : X, \varkappa) \neq 0 \mid \nabla^{n-1}(A : X, I) \neq 0.$$

C'est justement dans cette formulation algébrique que le théorème fondamental sera démontré — tout à fait de nouveau et indépendamment de la démonstration donnée au chapitre 4, § 3. Pour la démonstration, on se servira seulement des notions introduites aux §§ 1, 2, chapitre 6.

Quelle que soit la formulation du théorème fondamental, sa démonstration doit être basée sur le théorème classique de Hopf concernant la caractérisation (co)homologique des applications essentielles d'un polyèdre de dimension n sur une sphère de dimension n; ce théorème est intimement lié au « théorème de classification de Hopf » (théorème 2), non moins connu, concernant l'équivalence de la classification homologique et homotopique des applications continues d'un polyèdre de dimension n sur une sphère de dimension n. Ces théorèmes (seul le premier nous servira directement) sont aussi démontrés de nouveau au § 1 de ce chapitre; on y donnera une démonstration cohomologique, dans le cas général des applications d'un bicompact quelconque de dimension n sur la sphère de même dimension. Cette démonstration, comme il nous semble, ne fait que souligner la clarté et la puissance des constructions géométriques sur lesquelles se base la démonstration originale de Hopf, reproduite au chapitre 3, et essentiellement présentes dans la nouvelle démonstration (H. Whitney [1]).

Au chapitre 4 nous avions défini la dimension homologique $d_{\mathfrak{A}}X$ du compact X pour le groupe de coefficients $\mathfrak{A}$. Une définition analogue peut être donnée pour les bicompacts.

On appelle *dimension homologique* $d_{\mathfrak{A}}X$ *du bicompact* X *pour le groupe de coefficients* $\mathfrak{A}$ le plus grand entier n tel que X contient un ensemble fermé A et sur celui-ci un cycle projectif *) de dimension $n-1$ pour le groupe de coefficients $\mathfrak{A}$, homologue à zéro dans X mais non homologue à zéro dans A pour le même groupe de coefficients.

Autrement dit, $d_{\mathfrak{A}}X$ est le plus grand n tel que X contient un ensemble fermé $A \subseteq X$ pour lequel $\Delta^{n-1}(A : X, \mathfrak{A}) \neq 0$.

On appelle *dimension cohomologique* $\mathrm{cd}_{\mathfrak{A}}X$ *du bicompact* X *pour le groupe de coefficients* $\mathfrak{A}$ le plus grand entier n pour lequel on peut trouver dans X un ensemble fermé $A \subseteq X$ tel que $\nabla^{n-1}(A : X, \mathfrak{A}) \neq 0$ (i.e. le groupe $\nabla^{n-1}(A, \mathfrak{A})$ contient un élément ζ_A^{n-1} non prolongeable à X tout entier).

Si $\mathfrak{A}$ est un groupe discret et $\mathfrak{B}$ son groupe de caractères bicompact, alors $\nabla^{n-1}(A : X, \mathfrak{A}) \mid \Delta^{n-1}(A : X, \mathfrak{B})$, de sorte que l'étude des dimensions cohomologiques des bicompacts est essentiellement équivalente à l'étude de leurs dimensions homologiques dans les cas les plus intéressants et les plus naturels.

R e m a r q u e 1. Soit $\dim X = n$. On voit facilement que chaque cycle projectif z^n de dimension n pour un groupe de coefficients $\mathfrak{A}$ quelconque, situé sur un ensemble fermé $\Phi \subseteq X$ et homologue à zéro dans X, contient une partie confinale consistant seulement de zéros; il est donc homologue à zéro dans Φ. Par conséquent

*) Voir chapitre 6, p. 307.

$d_{\mathfrak{A}}X \leqslant n$, i.e. $d_{\mathfrak{A}}X \leqslant \dim X$. Cette dernière inégalité étant évidemment vérifiée pour $\dim X = \infty$, on voit que pour un compact quelconque X la dimension $\dim X$ est la plus grande parmi les dimensions homologiques $d_{\mathfrak{A}}X$.

Passons au résumé de ce chapitre.

Nous commencerons notre exposé par le théorème suivant de Hopf, d'ailleurs initialement trouvé pendant l'élaboration de la théorie homologique de la dimension *). Sous sa forme cohomologique la plus générale il s'énonce ainsi:

Théorème 1 (théorème de Hopf sur le prolongement des applications). *Soit X un bicompact*, $\dim X \leqslant n-1$; *supposons donnée une application $f_0: A \to \widetilde{S}^n$ d'un certain ensemble fermé $A \subseteq X$ dans la sphère $\widetilde{S}^n$. Pour que l'on puisse prolonger f_0 à une application $f: X \to \widetilde{S}^n$ de tout l'espace X dans la sphère $\widetilde{S}^n$, il faut et il suffit que le degré (entier) $d_0 \equiv df_0 \in \nabla^n(A, I)$ de l'application f_0 soit un élément prolongeable du groupe $\nabla^n A$. Ensuite, si d_0 est prolongeable à un élément $d \in \nabla^n(X, I)$ (i.e. si $d_0 = J_A^X d$), alors l'application $f_0: A \to \widetilde{S}^n$ peut être prolongée à une application $f: X \to \widetilde{S}^n$ de degré d.*

Ce théorème se démontre aux §§ 1, 2 du présent chapitre, en deux étapes. On démontre d'abord son cas « polyédral »: X est un polyèdre, donné dans une certaine triangulation K, A est l'ensemble sous-jacent à un certain sous-complexe fermé de cette triangulation, relativement auquel f_0 est une application simpliciale. Alors, au § 1 nous nous intéressons seulement à l'assertion la plus difficile du théorème de Hopf: la possibilité de prolonger une application dont le degré est prolongeable. Ensuite au § 2 on démontre le théorème 1 dans son énoncé général.

Au § 3 on déduit du théorème de Hopf le théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension que nous connaissons déjà; répétons sa formulation (sous sa forme cohomologique):

Théorème 2. *Soit X un bicompact de dimension n. Il existe alors dans X un ensemble fermé (même canonique) A tel que le groupe $\nabla^{n-1}(A, I)$ contient un élément non prolongeable. D'autre part, pour $r \geqslant n$ chaque élément du groupe $\nabla^r(A, I)$ est prolongeable.*

Un théorème analogue est vrai pour les espaces normaux quelconques: le cas général d'un espace normal quelconque X se réduit immédiatement au cas d'un bicompact $\overline{X}$ en passant à l'extension de Čech $\beta X = \overline{X}$.

Au même § 3, le théorème 2 s'énonce sous une autre forme, équivalente à celle donnée ci-dessus. A savoir:

---

*) Voir H Hopf [1].

Théorème 2'. *La dimension d'un bicompact X de dimension finie* $\dim X < \infty$ *est le plus grand nombre n pour lequel X contient un ensemble fermé $A \subseteq X$ tel que*

le groupe $\nabla^{n-1}(A:X)$ pour le groupe de coefficients I	*le groupe $\Delta^{n-1}(A:X)$ pour le groupe de coefficients $\varkappa$*

est non nul.

Ce qui veut dire:

il existe sur A

un élément non prolongeable $\zeta \in \nabla^{n-1}(A, I)$	*un cycle*) $z^{n-1} \in Z^{n-1}(A, \varkappa)$ non homologue à zéro dans A, mais homologue à zéro dans X.*

Remarque 2. Le théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension s'énonce et se démontre sous l'hypothèse que la dimension $\dim X$ de l'espace X est finie. On ne sait pas jusqu'à maintenant si un bicompact de dimension infinie peut avoir une dimension homologique ou cohomologique finie pour un certain groupe de coefficients.

Pour conclure le chapitre, comme nous l'avons déjà mentionné, nous démontrerons le

Théorème de classification de Hopf (théorème 3). *Soit X un bicompact de dimension n. En faisant correspondre à chaque application continue f du bicompact X dans une sphère $\widetilde{S}^n$ de dimension n le degré $df \in \nabla^n(X, I)$ de cette application, on obtient une bijection entre l'ensemble de toutes les classes homotopiques d'applications $f: X \to \widetilde{S}^n$ et de tous les éléments du groupe $\nabla^n(X, I)$.*

Autrement dit, nous avons les trois assertions suivantes, dont la première a déjà été démontrée au § 4 du chapitre précédent:

1°. Deux applications homotopes d'un bicompact X de dimension n dans une sphère $\widetilde{S}^n$ de dimension n ont le même degré.

2°. Deux applications de même degré d'un bicompact X de dimension n dans une sphère $\widetilde{S}^n$ de dimension n sont homotopes.

3°. Pour chaque élément d du groupe $\nabla^n(X, I)$, il y a une application $f: X \to \widetilde{S}^n$ de degré $df = d$.

La démonstration des assertions 2° et 3° est effectuée au § 4 qui termine ainsi la démonstration du théorème 3.

Abordons donc l'étude que nous venons de résumer.

---

*) Projectif dans le cas général si X est un bicompact, convergent si X est un compact.

§ 1. Le cas polyédral du théorème de Hopf sur le prolongement d'une application

Pour l'énoncé exact du théorème, nous aurons besoin de la notion de *subdivision barycentrique d'un complexe X modulo un sous-complexe fermé A*, qui se définit exactement comme la subdivision barycentrique usuelle, par récurrence, avec la seule différence que les simplexes du complexe A ne sont pas subdivisés.

A savoir, pour chaque $r \geqslant 0$ désignons par $X^{(r)}$ (respectivement par $A^{(r)}$) le sous-complexe du complexe X (du complexe A) qui consiste de tous les simplexes de ce complexe de dimension $\leqslant r$ (le « squelette de dimension r » du complexe). On définit la subdivision barycentrique du complexe X modulo A en laissant le squelette $X^{(0)}$ intact. Ensuite, si la subdivision de $X^{(r)}$ est déjà définie, subdivisons chaque simplexe T^{r+1} de dimension $r+1$ de la manière suivante : si $T^{r+1} \in A$, alors nous ne subdivisons pas le simplexe T^{r+1}. Mais si $T^{r+1} \in X \setminus A$, alors la subdivision de T^{r+1} est un cône dont la base est la frontière du simplexe T^{r+1}, subdivisée comme un sous-complexe du squelette $X^{(r)}$, et le sommet est le centre du simplexe T^{r+1}.

Il est évident que si le sous-complexe A est vide, on obtiendra de cette manière la définition usuelle de la subdivision barycentrique.

Pour une subdivision barycentrique X_1 du complexe X modulo un sous-complexe A, on définit d'une manière usuelle le déplacement canonique $\sigma_X^{X_1} : X_1 \to X$ (identique sur le sous-complexe A).

Ainsi, il s'agit du théorème suivant :

Théorème E_n. *Soit X un complexe de dimension $\leqslant n+1$; soit A un sous-complexe fermé du complexe X ; soient S^n une triangulation élémentaire de la sphère $\widetilde{S}^n$ de dimension n et f_0 une application simpliciale du complexe A dans le complexe S^n dont le degré $df_0 = \gamma_0 \in \nabla^n A \equiv \equiv \nabla^n (A, I)$ est un élément prolongeable du groupe $\nabla^n A$, de sorte que $\gamma_0 = J_A^X \gamma$, où $\gamma \in \nabla^n X$. Alors l'application $f_0 : A \to S^n$ se prolonge à une application simpliciale $f : X_h \to S^n$ d'une certaine subdivision barycentrique X_h du complexe X modulo le sous-complexe A de degré $df = \overline{\sigma}_{X_h}^X \gamma$, où $\sigma_X^{X_h} : X_h \to X$ est le déplacement canonique.*

Le théorème E_n sera démontré conjointement avec le théorème suivant :

Théorème H_n. *Soient X un complexe de dimension $\leqslant n$ et S^n une triangulation de la sphère de dimension n que nous supposons soit élémentaire, soit obtenue de la triangulation élémentaire par une subdivision barycentrique, éventuellement multiple. Soit f une application simpliciale du complexe X dans la sphère S^n. Supposons enfin que le degré de f est nul. L'application f est alors homotopiquement triviale.*

La démonstration des théorèmes E_n et H_n sera effectuée par une double récurrence sur n, dans l'ordre suivant:

Assertion 1: le théorème H_1 est vérifié.

Assertion 2: le théorème H_n pour $n \geqslant 1$ implique le théorème E_n.

Assertion 3. Le théorème E_n pour $n \geqslant 1$ implique le théorème H_{n+1}.

Démonstration de l'assertion 1 (du théorème H_1). On a une application simpliciale f du polyèdre $\widetilde{X}$ unidimensionnel, considéré dans sa triangulation X, dans une sphère $\widetilde{S}^1$ unidimensionnelle — un cercle — envisagée soit dans sa triangulation élémentaire, soit dans une de ses subdivisions barycentriques.

Fixons dans S^1 le sommet a et les simplexes orientés $\tau = (ab)$, $\tau' = (ab')$ adjacents au sommet a. Dans le complexe X (que nous supposons réalisé géométriquement dans un certain R^n), choisissons une orientation des simplexes unidimensionnels soumise à la seule condition: $t = (ee')$ et $fe' = a$ implique $fe = a$; il découle de cette condition que les égalités $ft = -\tau$ et $ft = -\tau'$ sont impossibles.

En vertu de la définition donnée au chapitre 1, p. 85, le degré de l'application f se détermine par la classe de cohomologie du cocycle $\bar{f}\tau = z$. Le fait que le degré est nul signifie qu'il existe dans le complexe X une chaîne y^0 telle que $\nabla y^0 = z$. Remarquons que pour chaque simplexe unidimensionnel $t = (ee')$ nous avons

(1) $(\tau, ft) = (\bar{f}\tau, t) = (z, t) = (\nabla y^0, t) = (y^0, \Delta t) = (y^0, e') - (y^0, e)$.

Enfin, introduisons dans $\widetilde{S}^1$ un système de coordonnées polaires de sorte que l'angle attribué au point a soit nul et qu'au point b on ait l'angle $\omega(b)$, $0 < \omega(b) < 1$. On se donne ainsi une fonction $\omega: \widetilde{S}^1 \to [0, 2\pi)$ dont la seule discontinuité est au point a; on a donc aussi une fonction $\omega f: \widetilde{X} \to [0, 2\pi)$ sur le polyèdre $\widetilde{X}$ qui peut être discontinue sur l'ensemble $f^{-1}a$.

Désignons par $\psi: R^1 \to S^1$ l'application naturelle (« l'enroulement » de la droite sur le cercle) qui fait correspondre à chaque point $\alpha \in R^1$ le point $\psi\alpha$ du cercle S^1 d'angle polaire α; effectuons l'étape principale de la démonstration du théorème H_1: la construction, à partir de la fonction ωf et de la chaîne y^0, d'une fonction réelle $\theta(x)$, continue sur $\widetilde{X}$ et telle que $\psi\theta = f$.

Définissons d'abord la valeur de la fonction θ aux sommets $x = e$ du complexe X. Désignons ici et par la suite par (y^0, x) [respectivement (y^0, e'), etc.] la valeur de la chaîne y^0 de dimension nulle au sommet $x = e$ (respectivement dans $x = e'$, etc.) et posons

(2) $$\theta(x) = 2\pi(y^0, x) \quad \text{si} \quad fx = a,$$

(3) $$\theta(x) = 2\pi[(y^0, x) - 1] + \omega(fx) \quad \text{si} \quad fx \neq a.$$

Aux points intérieurs x du simplexe (orienté !) $t=(ee')$ posons

(4) $\theta(x)=\theta(e')$ si $ft=0$,

(5) $\theta(x)=2\pi[(y^0, e')-1]+\omega(fx)$ si $ft\neq 0$.

Remarquons que les formules (4) et (5) peuvent s'écrire, d'après les égalités (1), de manière plus détaillée:

(4') $\theta(x)=\theta(e)$ si $ft=0$,

(5') $\theta(x)=2\pi(y^0, e)+\omega(fx)$ si $ft=\tau$,

(5'') $\theta(x)=2\pi[(y^0, e)-1]+\omega(fx)$ si $ft\neq+\tau$, $ft\neq 0$.

L'application ωf peut être discontinue seulement sur l'ensemble $f^{-1}a$ consistant de sommets et de simplexes dégénérés par l'application f, la fonction θ étant par construction constante sur les simplexes dégénérés d'après (4), (4'). Par conséquent, pour la démonstration de la continuité de la fonction θ, il suffit de vérifier sa continuité aux sommets du complexe X. Nous atteindrons ce but si nous montrerons que la restriction de la fonction θ au simplexe fermé $\bar{t}$ est continue aux sommets de ce simplexe, en supposant que le simplexe t est non dégénéré : $ft\neq 0$.

Ainsi, nous démontrons la continuité de l'application θ aux points e et e' du simplexe $t=(ee')$. La continuité au point e' se démontre très facilement. En vertu de l'hypothèse imposée à l'orientation des simplexes, nous avons $fe'\neq a$; dans le cas contraire $fe=a$ et le simplexe t sera dégénéré. La fonction ωf est donc continue au point e', $\lim\limits_{\substack{x\to e'\\ x\in(ee')}}\omega(fx)=\omega(fe')$ et donc

$$\lim_{x\to e'}\theta(x)=\lim_{x\to e'}\{2\pi[(y^0, e')-1]+\omega(fx)\}=$$
$$=2\pi[(y^0, e')-1]+\omega(fe')=\theta(e').$$

Pour démontrer la continuité au point e, considérons séparément trois cas.

1. $ft=\tau$ (et donc $fe=a$). Alors $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\in(ee')}}\omega(fx)=0$ et d'après (5')

$$\lim_{\substack{x\to e\\ x\in(ee')}}\theta(x)=\lim_{\substack{x\to e\\ x\in(ee')}}\{2\pi(y^0, e)+\omega(fx)\}=2\pi(y^0, e)=\theta(e).$$

2. $ft=\tau'$ (et donc $fe=a$). Alors $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\in(ee')}}\omega(fx)=2\pi$ et en vertu de (5'')

$$\lim_{\substack{x\to e\\ x\in(ee')}}\theta(x)=\lim_{\substack{x\to e\\ x\in(ee')}}\{2\pi[(y^0, e)-1]+\omega(fx)\}=$$
$$=2\pi(y^0, e)-2\pi+2\pi=\theta(e).$$

3. $ft \neq \tau$, $ft \neq \tau'$ (et, comme nous nous rappelons, $ft \neq 0$). Donc, $fe \neq a$, la fonction ωf est continue au point e et

$$\lim_{\substack{x \to e \\ x \in (ee')}} \theta(x) = \{2\pi[(y^0, e) - 1] + \omega(fx)\} = 2\pi[(y^0, e) - 1] + \omega(fe) = \theta(e).$$

Ainsi, la fonction $\theta: \widetilde{X} \to R^1$ est continue; la propriété $\psi\theta = f$ découle directement des définitions (2)-(5) de la fonction θ.

Posons maintenant $f_t(x) = \psi(t\theta(x))$ pour tout $x \in \widetilde{X}$ et tout t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. On a évidemment $f_1 = \psi\theta = f$ et $f_0(\widetilde{X}) = \psi(0) = a$, de sorte que la famille f_t réalise une déformation de l'application f dans l'application constante, i.e. l'application f est homotope à une application constante. Le théorème H_1 est démontré.

Démonstration de l'assertion 2. Nous supposons l'assertion H_n démontrée. Démontrons l'assertion E_n.

On se donne: une sphère S^n, envisagée comme la frontière du simplexe orienté $(e_0e_1, \ldots, e_{n+1})$ de dimension $n+1$; le complexe X de dimension $\leqslant n+1$; son sous-complexe fermé A et l'application simpliciale $f_0: A \to S^n$ dont le degré df_0 est un élément prolongeable $\gamma_0 \in \nabla^n A$ du groupe $\nabla^n A$, de sorte que $\gamma_0 = J_A^X \gamma$, $\gamma \in \nabla^n X$.

Prenons pour cocycle fondamental de la sphère S^n le simplexe orienté $v = (e_1e_2 \ldots e_{n+1})$. Alors le degré df_0 est la classe $\gamma_0 \in \nabla^n A$ du cocycle $d_0 \in Z_\nabla A$ défini sur chaque simplexe orienté t_A^n du complexe A par les égalités

$$(d_0, t_A^n) = (\overline{f}_0 v, t_A^n) = (v, f_0 t_A^n).$$

Autrement dit, la chaîne d_0 est non nulle seulement sur les simplexes orientés t_A^n pour lesquels $f_0 t_A^n = \pm v$, et $(d_0, t_A^n) = +1$ pour $f_0 t_A^n = +v$, $(d_0, t_A^n) = -1$ pour $f_0 t_A^n = -v$.

L'égalité $\gamma_0 = J_A^X \gamma$, où $\gamma \in \nabla^n X$, est donnée. Alors le cocycle d_0 sera également prolongeable:

$$d_0 = J_A^X D \text{ *)},$$

où $D \in Z_\nabla^n X$.

Le prolongement cherché $f: X_h \to S^n$ de l'application f_0 sera obtenu à partir du cycle D par une construction basée sur un prolongement spécial de l'application f_0 à l'ensemble des simplexes de dimension $\leqslant n$ du complexe X.

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_s$ tous les simplexes de la chaîne $J_{X \setminus A}^X D$, orientés de sorte que $(D, t_i) > 0$. En choisissant une subdivision

---

*) En effet, pour chaque $D' \in \gamma$ on a par définition de l'opérateur d'in' - section $J_A^X D' \sim d_0$; soit $\nabla_A x_A^{n-1} = J_A^X D' - d_0$. Alors pour le cycle $D = J$ - $- \nabla x_A^{n-1}$ on obtient $J_A^X D = J_A^X D' - J_A^X \nabla x_A^{n-1} = J_A^X D' - \nabla_A x_A^{n-1} = d_0$.

barycentrique suffisamment fine X_k du complexe X modulo A, trouvons sur la subdivision de chacun des simplexes t_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, des « petits simplexes » $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots, \tau_{is_i}$ de dimension n (en nombre égal à la valeur de la chaîne D sur le simplexe t_i), situés à une distance positive de la frontière du simplexe t_i et à une distance positive l'un de l'autre; les orientations

$$\tau_{ij} = (e_{ij}^1 e_{ij}^2 \ldots e_{ij}^{n+1})$$

seront choisies telles qu'elles coïncident avec celle de t_i. Prenons un compact $\widetilde{Y} = \widetilde{X}^{(n)} \cup \widetilde{A}$ et sa subdivision Y_k dans X_k. Définissons l'application simpliciale $f_1 : Y_k \to S^n$ en posant

$$f_1 e_{ij}^p = e_p$$

pour les sommets de chaque « petit » simplexe τ_{ij}, $i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, s_i$; $p = 1, \ldots, n+1$;

$$f_1 e_A = f_0 e_A$$

pour les sommets du complexe A et

$$f_1 e_X = e_0$$

pour tous les autres sommets du complexe $X^{(n)}$.

Choisissons un simplexe quelconque $T^{n+1} \in X \setminus A$ de dimension $n+1$ et désignons par Σ sa frontière, par Σ_k, la subdivision de Σ dans X_k et par θ, la subdivision de l'adhérence combinatoire $[T^{n+1}]$ dans X_k. Désignons enfin par $g_1 : \Sigma_k \to S^n$ la restriction de l'application f_1 à Σ_k. La propriété principale de l'application construite f_1 consiste dans le fait que le degré de l'application g_1 est nul sur chaque simplexe $T^{n+1} \in X \setminus A$. Démontrons-le.

Le degré de l'application f_1 est la ∇-classe du cocycle

$$\bar{f}_1 v = \sum_{i,j} \tau_{ij} + d_0.$$

D'autre part, en choisissant un déplacement canonique $\sigma_X^{X_k}$ du complexe X_k dans X tel que $\sigma_X^{X_k} \tau_{i1} = t_i$ pour chaque i (et alors $\sigma_X^{X_k} \tau_{ij} = 0$ pour tous les $j = 2, \ldots, s_i$), nous obtiendrons

$$\bar{\sigma}_{Y_k}^{Y} J_Y^X D = \sum_{i=1}^{s} s_i \tau_{i1} + d_0,$$

où, comme nous nous rappelons, $s_i = (D, t_i)$. Dans la subdivision du simplexe $T_i = |t_i|$ les cocycles $\tau_{i1}, \ldots, \tau_{is_i}$ sont homologues entre eux, donc

$$s_i \tau_{i1} \sim \tau_{i1} + \ldots + \tau_{is_i} \text{ dans } [T_i]_k$$

et donc

$$\bar{\sigma}^{Y\partial}_{Y_h} J^X_Y D \sim \sum_{i,j} \tau_{ij} + d_0 = \bar{f}_1 v. \tag{6}$$

Le degré de l'application $g_1 = f_1 |_\Sigma$ est déterminé par le cocycle

$$\bar{g}_1 v = J^{Y_h}_{\Sigma_h} \bar{f}_1 v \sim J^{Y_h}_{\Sigma_h} \bar{\sigma}^Y_{Y_h} J^X_Y D = \bar{\sigma}^\Sigma_{\Sigma_h} J^X_\Sigma D;$$

mais $J^X_\Sigma D = J^{[T^{n+1}]}_\Sigma J^X_{[T^{n+1}]} D$, le cocycle $J^X_{[T^{n+1}]} D$ de dimension n de la pseudo-variété orientée $[T^{n+1}]$ de dimension $n+1$ est homologue à zéro et donc les cocycles suivants le seront aussi :

$$J^X_\Sigma D = J^{[T^{n+1}]}_\Sigma J^X_{[T^{n+1}]} D, \quad \bar{\sigma}^\Sigma_{\Sigma_h} J^X_\Sigma D \text{ et } \bar{g}_1 v.$$

Nous avons démontré ainsi que le degré de l'application g_1 est nul. D'après le théorème H_n, que l'on suppose démontré, l'application g_1 est homotope à l'application constante et d'après le lemme élémentaire 1 du chapitre 3, p. 190, l'application g_1 se prolonge continûment à l'intérieur de la sphère Σ, i.e. au simplexe T^{n+1}.

Il nous faut néanmoins un peu plus — l'existence d'un prolongement simplicial de l'application g_1 à une subdivision appropriée du simplexe T^{n+1}. Cela se fait tout simplement en appliquant la remarque qui suit le théorème de Hopf sur l'approximation simpliciale (p. 136). Il suffit, en effet, de prendre l'approximation simpliciale de l'application prolongée que l'on peut considérer identique à g_1 sur le polyèdre Σ en vertu de la remarque citée.

Ayant effectué un tel prolongement à chaque simplexe $T^{n+1} \in X \setminus A$, nous obtiendrons le prolongement f cherché de l'application $f_0 : A \to S^n$, et, sans restriction de généralité, nous pouvons supposer que les subdivisions nécessaires des simplexes T^{n+1} appartiennent à une subdivision barycentrique plus fine X_h du complexe X_k modulo A.

La vérification du fait que le degré de l'application construite $f : X_h \to S^n$ est $\bar{\sigma}^X_{X_h} \gamma$, i.e.

$$df \in \bar{\sigma}^X_{X_h} \gamma,$$

s'effectue automatiquement — nous la laissons au lecteur.

D é m o n s t r a t i o n d e l'a s s e r t i o n 3: E_n implique H_{n+1}.

Remarque préliminaire. Soit $f : \tilde{X} \to \tilde{S}^{n+1}$ une application simpliciale du polyèdre $\tilde{X}$ de dimension $n+1$, donné dans sa triangulation X, sur la sphère $\tilde{S}^{n+1}$ donnée dans une triangulation quelconque S^{n+1}. En remplaçant s'il le faut les triangulations X et S^{n+1} par leurs doubles subdivisions barycentriques X_2 et S^{n+1}_2 et en choisissant un simplexe principal approprié $\tau^{n+1} \in S^{n+1}_2$ déter-

minant l'orientation de la sphère S^{n+1}, on peut toujours supposer que :

A. Les simplexes t^{n+1} du complexe X_2 appliqués par f sur le simplexe τ^{n+1} sont loin l'un de l'autre (i.e. à une distance positive).

B. Si un simplexe quelconque $t \in X_2$ est appliqué par f sur une face du simplexe τ^{n+1}, alors ce simplexe est la face d'un des simplexes t^{n+1} qui s'appliquent sur τ^{n+1}.

En effet, soit τ'^{n+1} un simplexe quelconque du complexe S^{n+1}. Dans la double subdivision barycentrique S_2^{n+1} de la triangulation S^{n+1} prenons un simplexe τ^{n+1} situé à l'intérieur du simplexe τ'^{n+1} (i.e. n'adhérant pas à sa frontière). Le simplexe τ^{n+1} est l'image par f de certains simplexes du complexe X_2 obtenu par subdivision barycentrique double de la triangulation X ; ces simplexes peuvent être trouvés de la manière suivante : à l'intérieur de chaque simplexe $T'^{n+1} \in X$ qui s'applique sur τ'^{n+1}, il faut prendre l'unique simplexe t^{n+1} du complexe X_2 qui est appliqué sur le simplexe τ'^{n+1} par l'application f du simplexe τ^{n+1} sur le simplexe τ'^{n+1}. Il est également clair que seules les faces des simplexes t^{n+1} sont appliquées sur les faces du simplexe τ^{n+1}.

Après cette remarque, passons à la démonstration de l'assertion 2.

Ainsi, on se donne une triangulation X du polyèdre $\widetilde{X}$ de dimension $n+1$ et l'application f de ce polyèdre dans la sphère $\widetilde{S}^{n+1}$, définie par l'application simpliciale de même nom de la triangulation X dans la triangulation S^{n+1}. Il est donné que le degré df de l'application f est nul. Supposons que l'assertion E_n est démontrée. Il faut démontrer que l'application $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{S}^{n+1}$ est homotope à l'application constante.

D'après la remarque préliminaire que nous venons de faire, nous pouvons supposer que les conditions A et B sont satisfaites. La situation sera donc la suivante. Soit $\tau^{n+1} \in S^{n+1}$ le simplexe principal (de la triangulation S^{n+1}) dont l'orientation définit l'orientation de la sphère $\widetilde{S}^{n+1}$. La frontière du simplexe τ^{n+1} est désignée par S^n. Le degré df de l'application $f\colon X \to S^{n+1}$ est ∇-classe du cocycle $d^{n+1} \in Z_\Delta^{n+1}X$, défini sur chaque simplexe t^{n+1} de dimension $n+1$ du complexe X par l'égalité

$$(d^{n+1}, t^{n+1}) = (ft^{n+1}, \tau).$$

Puisque, par hypothèse, $df = 0$, il existe une chaîne $x^n \in L^nX$ pour laquelle $\nabla x^n = d^{n+1}$. Les simplexes t^{n+1} du complexe X qui s'appliquent sur τ^{n+1} sont par hypothèse situés loin l'un de l'autre : ces simplexes et leurs faces forment un sous-complexe fermé Q de dimension $n+1$ du complexe X. Comme toujours, désignons par $Q^{(n)}$ le sous-complexe du complexe Q qui consiste de tous les simplexes de ce dernier de dimension $\leqslant n$. L'application f, restreinte

au polyèdre $\widetilde{Q}^{(n)}$, sera désignée par f_0 ; c'est une application simpliciale du polyèdre $\widetilde{Q}^{(n)}$ (qui est la réunion d'un nombre fini de sphères, de dimension n, dans leurs triangulations élémentaires, éloignées l'une de l'autre) dans la sphère S^n considérée dans sa triangulation élémentaire (celle de la frontière du simplexe τ^{n+1}).

Notre premier et principal problème est de prolonger l'application f_0 à une application $\varphi: \widetilde{Y} \to \widetilde{S}^n$ du polyèdre $\widetilde{Y}$ qui est l'ensemble sous-jacent au complexe $Y = Q^{(n)} \cup (X \setminus Q)$. Montrons qu'ayant résolu ce problème principal, nous aurons atteint notre but qui consiste à montrer que l'application $f: X \to S^{n+1}$ est homotope à l'application constante. En effet, supposons que nous avons su prolonger l'application $f_0: \widetilde{Q}^n \to \widetilde{S}^n$ à une application $\varphi: \widetilde{Y} \to \widetilde{S}^n$. Envisageons $\widetilde{S}^{n+1}$ comme une sphère de dimension $n+1$ dans le sens géométrique élémentaire et le simplexe $|\tau^{n+1}|$, comme l'hémisphère nord de cette sphère, de sorte que $\widetilde{S}^n$ soit l'équateur. Par hypothèse, le polyèdre $\widetilde{Y}$ est appliqué par φ sur l'équateur $\widetilde{S}^n$. Construisons maintenant l'application $g: \widetilde{X} \to \widetilde{S}^{n+1}$ de la manière suivante.

Si $x \in \widetilde{Q}$, posons

$$g(x) = f(x),$$

de sorte qu'en particulier

$$g(x) = f(x) = \varphi(x) \quad \text{si} \quad x \in \widetilde{Q}^{(n)}.$$

Mais si $x \in \widetilde{X} \setminus \widetilde{Q}$, posons

$$g(x) = \varphi(x).$$

Puisqu'aux points x de l'intersection $\widetilde{Q}^{(n)} = \widetilde{Q} \cap \widetilde{Y}$ des ensembles fermés $\widetilde{Q}$ et $\widetilde{Y}$ nous avons $g(x) = f(x) = \varphi(x)$, alors g est une application continue bien définie dans $\widetilde{S}^{n+1}$ de tout l'ensemble $\widetilde{X} = \widetilde{Q} \cup \widetilde{Y}$.

Et alors, si $x \in \widetilde{Q}$, le point $g(x) = f(x)$ est situé dans l'hémisphère nord (comprenant l'équateur) de la sphère $\widetilde{S}^{n+1}$, mais si $x \in \widetilde{X} \setminus \widetilde{Q}$, alors le point $g(x) = \varphi(x)$ est situé sur l'équateur $\widetilde{S}^n$, tandis que le point $f(x)$ est situé dans le complément au simplexe fermé τ^{n+1}, i.e. à l'intérieur de l'hémisphère sud de la sphère $\widetilde{S}^{n+1}$. Ainsi, quel que soit le point $x \in X$, les points $g(x)$ et $f(x)$ ne peuvent jamais être des points diamétralement opposés de la sphère $\widetilde{S}^{n+1}$, ce qui signifie que les applications g et f sont homotopes entre elles. Mais l'application g, étant une application du polyèdre $\widetilde{X}$ dans l'hémisphère nord (comprenant l'équateur) de la sphère $\widetilde{S}^{n+1}$, est homotopiquement triviale ; par conséquent, l'application $f: \widetilde{X} \to$

$\to \widetilde{S}^{n+1}$, homotope à g, est également homotopiquement triviale et tout est démontré.

Ainsi, il ne reste qu'à résoudre le problème principal du prolongement de l'application $f_0 : \widetilde{Q}^{(n)} \to \widetilde{S}^n$ à l'application $\varphi : \widetilde{Y} \to \widetilde{S}^n$.

Puisque l'application f_0 est simpliciale et l'assertion E_n démontrée, il suffit, pour résoudre notre problème, de démontrer que le degré df_0 de l'application f_0 est un élément prolongeable du groupe $\nabla^n Q^{(n)}$, i.e. qu'il existe un élément $\gamma^n \in \nabla^n Y$ tel que $J^Y_{Q^{(n)}}\gamma^n = df_0$.

Supposons que τ^n est un simplexe principal de dimension n de la sphère S^n, orienté de sorte que $\nabla\tau^n = \tau^{n+1}$. Le degré df_0 est la classe de cohomologie $df_0 \in \nabla^n Q^{(n)}$ du cocycle d_0^n défini sur chaque simplexe $t^n_{Q^{(n)}}$ par l'égalité

$$(d_0^n, t^n_{Q^{(n)}}) = (f_0 t^n_{Q^{(n)}}, \tau_0^n).$$

Nous avons défini la chaîne $x^n \in L^n X = L^n X^{(n)}$ par la condition $\nabla x^n = d^{n+1}$. La première étape de la démonstration du fait que le degré $df_0 \in \nabla^n Q^{(n)}$ est prolongeable consiste à montrer que la chaîne $J^X_{Q^{(n)}} x^n \in L^n Q^{(n)} = Z^n_\nabla Q^{(n)}$ est un cocycle sur $Q^{(n)}$, appartenant à la même classe de cohomologie que d_0^n, i.e.

$$J^X_{Q^{(n)}} x^n \in df_0. \tag{7}$$

Ensuite, la deuxième et dernière étape de la démonstration consistera à démontrer que le cocycle $J^X_{Q^{(n)}} x^n$ se prolonge au complexe Q.

Ainsi — la première étape!

Nous avons $d^{n+1} = \nabla x^n$, d'où

$$J^X_Q d^{n+1} = J^X_Q \nabla x^n = \nabla_Q J^X_Q x^n. \tag{8}$$

Les simplexes τ^{n+1} et τ^n sont choisis de manière à avoir $\nabla_Q \tau^n = \tau^{n+1}$. D'après la définition de d^{n+1} et d_0^n, nous avons $\overline{f}\tau^{n+1} = d^{n+1}$ et $\overline{f}_0\tau^n = d_0^n$, de sorte que

$$\nabla_Q E_Q^{Q^{(n)}} d_0^n = \nabla_Q E_Q^{Q^{(n)}} \overline{f}_0 \tau = \nabla_Q E_Q^{Q^{(n)}} J^X_{Q^{(n)}} \overline{f}\tau^n.$$

Mais le sous-complexe $Q^{(n)}$ contient tous les simplexes de dimension n du complexe Q, donc $E_Q^{Q^{(n)}} J^X_{Q^{(n)}} \overline{f}\tau^n = J^X_Q \overline{f}\tau^n$ et par conséquent

$$\nabla_Q E_Q^{Q^{(n)}} d_0^n = \nabla_Q J^X_Q \overline{f}\tau^n = J^X_Q \nabla \overline{f}\tau^n = J^X_Q \overline{f} \nabla \tau^n = J^X_Q \overline{f}\tau^{n+1} = J^X_Q d^{n+1}. \tag{9}$$

En comparant (8) et (9), nous voyons que $\nabla_Q (J^X_Q x^n - E_Q^{Q^{(n)}} d_0^n) = 0$, i.e. la chaîne $J^X_Q x^n - E_Q^{Q^{(n)}} d_0^n$ est un cocycle sur Q. Mais Q est la réunion de simplexes éloignés de dimension $n+1$ et de leurs faces,

par conséquent $\nabla^n Q$ est nul et donc $(J_Q^X x^n - E_Q^{Q^{(n)}} d_0^n) \sim 0$ sur Q, ce qui implique

$$J_{Q^{(n)}}^Q (J_Q^X x^n - E_Q^{Q^{(n)}} d_0^n) = J_{Q^{(n)}}^X x^n - d_0^n \sim 0$$

sur $Q^{(n)}$, i.e. les cocycles d_0^n et $J_{Q^{(n)}}^X x^n$ sont cohomologues entre eux sur $Q^{(n)}$ et donc cohomologues à une même classe — l'élément df_0 du groupe $\nabla^n Q^{(n)}$.

La première étape est terminée.

Deuxième étape. Le cocycle $\nabla_X x^n = d^{n+1}$ est situé sur Q et donc $J_Y^X d^{n+1} = J_{X \setminus Q}^X d^{n+1} + J_{Q^{(n)}}^X d^{n+1} = 0$, i.e.

$$J_Y^X \nabla_X x^n = \nabla_Y J_Y^X x^n = 0,$$

la chaîne $J_Y^X x^n$ est un cocycle sur Y et ce cocycle est évidemment le prolongement du cocycle $J_{Q^{(n)}}^X x^n \in df_0$.

La démonstration de l'assertion 3, et donc des propositions E_n et H_n pour tout n, est achevée.

§ 2. Le cas général du théorème de Hopf

Démontrons maintenant le théorème 1 dans toute sa généralité. On se donne : un bicompact X de dimension $\leqslant n+1$; un ensemble fermé $A \subseteq X$; l'application continue f_0 de l'ensemble A dans la sphère $\widetilde{S}^n$.

1°. Supposons que l'application $f_0 : A \to \widetilde{S}^n$ peut être prolongée à l'application $f : X \to \widetilde{S}^n$. Démontrons que le degré de l'application prolongée $df = d \in \nabla^n X$ est le prolongement du degré $d_0 = df_0 \in \nabla^n A$ de l'application f_0, ce qui démontrera la première assertion du théorème 1.

Puisque $f : X \to \widetilde{S}^n$ est le prolongement de $f_0 : A \to \widetilde{S}^n$, alors, en désignant par

$$E : A \to X$$

l'application identique de l'ensemble A dans X, nous pouvons écrire $f_0 x = fEx$ pour chaque $x \in A$, i.e. l'application $f_0 : A \to \widetilde{S}^n$ est la composition des applications $E : A \to X$ et $f : X \to \widetilde{S}^n$. On peut donc conclure, en vertu de la remarque faite à la fin § 8, chapitre 1, que l'application $\overline{f}_0 : \nabla^n S^n \to \nabla^n A$ est la composition $\overline{f}_0 = \overline{E}\overline{f}$ des applications $\overline{f} : \nabla^n S^n \to \nabla^n X$ et $\overline{E} = J_A^X : \nabla^n X \to \nabla^n A$. Cela signifie que l'on a

$$\overline{f}_0 \eta^n = J_A^X \overline{f} \eta^n \quad \text{pour tout } \eta^n \in \nabla^n S^n. \tag{1}$$

Cette formule est vérifiée en particulier lorsque η^n est l'élément générateur du groupe (cyclique) $\nabla^n \widetilde{S}^n$, i.e. la classe de cohomologie $\sigma^n \in \nabla^n \widetilde{S}^n$ contenant le cocycle fondamental σ^n — le simplexe orienté τ^n de la triangulation S^n de la sphère $\widetilde{S}^n$. Mais $\overline{f}_0\sigma^n \in \nabla^n A$ est le degré de l'application f_0, i.e. $\overline{f}_0\sigma^n = df_0$, tandis que $f\sigma^n = df$ est le degré de l'application f.

L'égalité (1) se transforme dans l'égalité

$$df_0 = J_A^X\, df$$

(ce qui signifie que le degré de l'application f_0 est prolongeable jusqu'au degré df).

L'assertion 1° est démontrée.

2°. Supposons que l'application $f_0 : A \to \widetilde{S}^n$ est de degré $df_0 = d_0 \in \nabla^n A$ prolongeable à un certain $d \in \nabla^n X$ de telle sorte que

$$d_0 = J_A^X d. \tag{2}$$

Démontrons que l'application f_0 peut être prolongée à une application $f : X \to \widetilde{S}^n$ de degré d, ce qui démontrera la deuxième assertion du théorème 1.

Choisissons une fois pour toutes la triangulation S^n de la sphère $\widetilde{S}^n$ et prenons un simplexe orienté τ^n de cette triangulation; désignons par σ^n la classe de cohomologie qu'il détermine, de sorte que $\tau^n \in \sigma^n \in \nabla^n S^n = \nabla^n \widetilde{S}^n$, σ^n étant l'élément générateur du groupe $\nabla^n S^n$ et

$$\overline{f}_0\sigma^n = d_0. \tag{3}$$

Prenons un recouvrement correct $\omega = \{O_1, \ldots, O_\nu\}$ si fin du bicompact X que la ∇-classe $d \in \nabla^n X$ contient le cocycle z_ω^n situé sur le nerf $|\omega|$ et que l'application f_0 envoie chaque ensemble $A \cap O_i$ dans l'étoile Q_{e_j} d'un certain sommet $e_{j(i)}$ de la triangulation S^n.

Supposons que parmi les ensembles $A \cap O_i$ les s premiers sont non vides et forment donc un recouvrement $A\omega = \{A \cap O_1, \ldots, A \cap O_s\}$ du bicompact A. Désignons par a_i le sommet du nerf $|\omega|$ (respectivement du nerf $|A\omega|$) correspondant à l'élément O_i du recouvrement ω (à l'élément $A \cap O_i$ du recouvrement $A\omega$). Ainsi, $|A\omega| \subseteq |\omega|$ et nous supposons que le nerf $|\omega|$ est réalisé sous forme de triangulation. Numérotons ensuite, éventuellement avec des répétitions, les sommets de la triangulation S^n, de sorte que

$$f_0\,(A \cap O_i) \subseteq O_{e_i}. \tag{4}$$

Alors, en faisant correspondre à l'ensemble $A \cap O_i$ (au sommet a_i du complexe $|A\omega|$) le sommet e_i du complexe S^n, nous obtenons

une application simpliciale $f_0^{A\omega}$ du nerf $| A\omega |$ dans la triangulation S^n.

Soit $t^n = (a_{i_0} \ldots a_{i_n})$ un simplexe orienté quelconque du complexe $| A\omega | \subseteq \omega$.

Définissant la chaîne $z^n_{A\omega}$ du complexe $| A\omega |$ par la condition

$$(z^n_{A\omega}, t^n_A) = (\tau^n, f_0^{A\omega} t^n_A)$$

(où, comme nous nous rappelons, $\tau^n \in \sigma^n \in \nabla^n S^n$), nous obtenons le cocycle $z^n_{A\omega}$ du nerf $| A\omega |$ contenu dans la classe de cohomologie d_0. Puisque $d_0 = J_A^X d$ et, par hypothèse,

$$z^n_\omega \in d, \tag{5}$$

on a

$$J_A^X z^n_\omega \sim z^n_{A\omega} \quad \text{sur} \quad | A\omega |. \tag{6}$$

L'application $f_0^{A\omega}$ est une application simpliciale de la triangulation $| A\omega |$ dans la triangulation S^n, et la classe $d_0^{(A\omega)} \in \nabla^n | A\omega |$ contenant le cocycle $z^n_{A\omega}$ est le degré de l'application $f_0^{A\omega}$. Evidemment $d_0^{(A\omega)} \subseteq d_0$. En outre, z^n_ω est le cocycle (de la triangulation $| \omega |$) dont la classe $d^{(\omega)} \in \nabla^n | \omega |$ est le prolongement de la classe $d_0^{(A\omega)}$ du cycle $z^n_{A\omega}$ en vertu de la relation (6). D'où l'on déduit, en se servant du cas polyédral du théorème 1, que l'application simpliciale $f_0^{A\omega}$ de l'ensemble sous-jacent $\widetilde{A\omega}$ de la triangulation $| A\omega |$ se prolonge à une application continue f^ω de l'ensemble sous-jacent $\widetilde{\omega}$ de la triangulation $| \omega |$, et l'on peut supposer que le degré de l'application f^ω est $d^{(\omega)} \in \nabla^n \widetilde{\omega}$.

Considérons maintenant l'application canonique $g_\omega : X \to \widetilde{\omega}$; restreinte à A, g_ω est une application canonique (désignée par $g_{A\omega}$) du bicompact A dans $\widetilde{A\omega}$, et il est évident que g_ω est un prolongement de l'application $g_{A\omega}$. Puisque $f^\omega : \widetilde{\omega} \to \widetilde{S}^n$ est le prolongement de l'application $f_0^{A\omega} : \widetilde{A\omega} \to \widetilde{S}^n$, l'application $\widetilde{f}_\omega = f^\omega g_\omega : X \to \widetilde{S}^n$ sera aussi le prolongement de l'application $F_{A\omega} = f_0^{A\omega} g_{A\omega} : A \to \widetilde{S}^n$.

Démontrons maintenant le lemme suivant:

Lemme 1. *Les applications* $f_0 : A \to \widetilde{S}^n$ *et* $f_0^{A\omega} g_{A\omega} : A \to \widetilde{S}^n$ *sont homotopes entre elles.*

Supposons pour l'instant que ce lemme est déjà démontré. Puisque des deux applications homotopes f_0 et $f_0^{A\omega} g_{A\omega}$ de l'ensemble X dans $\widetilde{S}^n$ la deuxième se prolonge à l'application $F_\omega : X \to \widetilde{S}^n$, la première application, i.e. $f_0 : A \to \widetilde{S}^n$ se prolonge (en vertu du lemme du champignon, voir AP, p. 231) à une certaine application $f : X \to \widetilde{S}^n$ homotope à l'application F_ω; le degré de l'application f

est donc égal au degré de F_ω, i.e. $\bar{g}_\omega \bar{f}^\omega \bar{\sigma} = g_\omega d^{(\omega)} = d$ et l'assertion 2° est démontrée.

Ainsi, il ne reste qu'à démontrer le lemme. Supposons que le point $x \in A$ appartient aux éléments $A \cap O_{i_0}, \ldots, A \cap O_{i_r}$ du recouvrement $A\omega$ et à eux seulement. Alors

$$g_{A\omega} x \in |a_{i_0} \ldots a_{i_r}| \in |A\omega| \text{ et } f_0^{A\omega} g_{A\omega} x \in f_0^{A\omega} |a_{i_0} \ldots a_{i_r}| \in |e_{i_0} \ldots e_{i_r}| \in S^n.$$

D'autre part, nous avons

$$f_0 (A \cap O_i) \subseteq Oe_{i_0}, \ldots, f (A \cap O_{i_r}) \subseteq Oe_{i_r},$$

de sorte que

$$f_0 x \in Oe_{i_0} \cap \ldots \cap Oe_{i_r} = | e_{i_0} \ldots e_{i_r}|.$$

Ainsi, quel que soit le point $x \in A$, il existe un simplexe de la triangulation S^n qui contient les deux points $f_0 x$ et $f_0^{A\omega} g_{A\omega} x$, d'où l'on peut déjà déduire que les applications f_0 et $f_0^{A\omega} g_{A\omega}$ sont homotopes entre elles, ce qui démontre le lemme, et donc l'assertion 2° et le théorème de Hopf en entier.

§ 3. Premier théorème fondamental et principales définitions de la théorie homologique de la dimension

Déduisons maintenant, du théorème 1, le théorème 2, i.e. le premier théorème fondamental de la théorie homologique de la dimension.

Ainsi, on se donne un bicompact X de dimension n. D'après le théorème des applications essentielles, le bicompact X contient un ensemble fermé A possédant la propriété suivante : il existe une certaine application $f_0 : A \to \widetilde{S}^{n-1}$ qui ne peut être prolongée à une application de X tout entier sur $\widetilde{S}^{n-1}$. En prolongeant l'application f_0 à un certain voisinage OA (ce qui est possible en vertu du corollaire du théorème de prolongement de Brouwer-Urysohn, voir le livre AP, chapitre 1, page 64) et en prenant un voisinage plus petit $O_1 A$ de manière à avoir $A_1 = [O_1 A] \subseteq OA$, nous voyons que l'application prolongée $f_0 : A_1 \to \widetilde{S}^{n-1}$ de l'ensemble fermé canonique $A_1 \subseteq X$ ne peut être prolongée à une application $X \to \widetilde{S}^{n-1}$, de sorte que dès le début on aurait pu supposer A canonique.

Il découle du théorème 1 que le degré de l'application $f : A \to \widetilde{S}^{n-1}$ est un élément non prolongeable $df \in \nabla^{n-1} A$ du groupe $\nabla^{n-1} A$: la première assertion du théorème fondamental est démontrée.

Supposons maintenant que l'ensemble fermé $A \subseteq X$, le nombre $r \geqslant n = \dim X$ et l'élément $\zeta_0^r \in \nabla^r A$ sont arbitraires. Montrons que l'on peut prolonger l'élément ζ_0^r.

Dans l'ensemble dirigé de tous les recouvrements ouverts du bicompact X, une partie confinale Σ est formée par les recouvrements α de multiplicité $n+1$. Les recouvrements correspondants $A\alpha$ forment une partie confinale $A\Sigma$ dans l'ensemble dirigé de tous les recouvrements ouverts du bicompact A. Définissons la classe de cohomologie $\zeta_A^n \in \nabla^n A$ comme l'ensemble des cocycles $z_{A\alpha}^n$ situés sur les complexes $|A\alpha|$, où $A\alpha \in A\Sigma$.

Supposons d'abord $r = n$. Puisque chacun des complexes $|\alpha|$ est de dimension n, chaque chaîne de dimension n du complexe α, en particulier chaque chaîne de la forme $E_\alpha^{A\alpha} z_{A\alpha}^n$, est un cocycle du complexe $|\alpha|$, ce qui signifie que le cocycle $z_{A\alpha}^n$ est prolongeable et chaque classe $E_X^A \zeta_A^n$ est contenue dans une certaine classe $\zeta_X^n \in \in \nabla^n X$.

Dans ces conditions, d'après la définition de l'opérateur J_A^X, nous avons $\zeta_A^n = J_A^X \zeta_X^n$, i.e. tous les éléments du groupe $\nabla^r A$ sont prolongeables.

Soit maintenant $r > n$. Puisque tous les nerfs $|\alpha|$ sont de dimension n et $|A\alpha| \subseteq |\alpha|$, alors chaque chaîne de dimension r, et en particulier chaque cycle de dimension r du complexe $|A\alpha|$ (et de tout le complexe $|\alpha|$), est une chaîne nulle, le groupe $\nabla^r A$ (de même que le groupe $\nabla^r X$) est un groupe trivial et l'élément nul est donc prolongeable.

Le théorème fondamental est démontré.

Au chapitre 6 nous avons désigné le groupe de tous les éléments prolongeables du groupe $\nabla^r A$ par $\nabla^r AX$ et le groupe quotient $\nabla^r A - \nabla^r AX$ par $\nabla^r (A : X)$; ce groupe est trivial si et seulement si $\nabla^r AX = \nabla^r A$, i.e. lorsque tous les éléments du groupe $\nabla^r A$ sont prolongeables. En même temps, comme il a été montré au chapitre 6, on a la dualité $\nabla^r (A : X) \mid \Delta^r (A : X)$, sous l'hypothèse que les groupes de coefficients à gauche et à droite sont duaux (ici nous supposons que le groupe $\nabla^r (A : X)$ a pour coefficients le groupe des entiers et le groupe $\Delta^r (A : X)$, les coefficients $\varkappa$). Ainsi, les égalités $\nabla^r (A : X) = 0$ et $\Delta^r (A : X) = 0$ sont équivalentes entre elles, et la deuxième signifie que chaque cycle projectif de dimension r de l'ensemble A, homologue à zéro sur X, est également homologue à zéro sur A. Mais ceci est le théorème 2′ promis dans l'introduction.

§ 4. Théorème de classification de Hopf

Ce théorème est énoncé dans l'introduction : théorème 3, p. 362. Il nous reste à démontrer la deuxième et la troisième assertion de ce théorème. Commençons par la troisième :

On se donne un bicompact X de dimension n et un élément du groupe $\nabla^n X = \nabla^n (X, I)$. Il faut démontrer qu'il existe une applica-

tion continue $F: X \to \widetilde{S}^n$ dont le degré dF est ζ. Prenons l'ensemble $A \subseteq X$ consistant du seul point x_0 et l'application $f: A \to \widetilde{S}^n$ qui fait correspondre à ce point x_0 un certain point $y_0 \in \widetilde{S}^n$. Evidemment $\nabla^n A = 0$ et donc $df = 0$. Il est également évident que $df = 0 = J_A^X \zeta$, quel que soit $\zeta \in \nabla^n X$, et df est non seulement un élément prolongeable du groupe $\nabla^n A = 0$, mais il peut être prolongé — dans le sens de l'égalité $df = J_A^X \zeta$ — à un élément quelconque, en particulier l'élément donné ζ du groupe $\nabla^n X$. Par conséquent, suivant le théorème 1, l'application $f: A \to \widetilde{S}^n$ peut être prolongée à une application $F: X \to \widetilde{S}^n$ de degré donné ζ. L'assertion 3° du théorème 3 est démontrée.

Passons à la démonstration de la seule assertion du théorème 3 qui nous reste, la plus difficile:

Deux applications $f_0: X \to \widetilde{S}^n$ et $f_1: X \to \widetilde{S}^n$ de même degré $df_0 = df_1 = \delta \in \nabla^n X$ sont homotopes.

Démonstration. Prenons le produit topologique

$$W = X \times Q^1$$

du bicompact X par le segment unité $Q^1 = [0, 1]$. Désignons par X_0, respectivement par X_1, la base inférieure, respectivement supérieure, du cylindre

$$X_0 = \{(x, 0): x \in X\}, \qquad X_1 = \{(x, 1): x \in X\}.$$

Posons $A = X_0 \cup X_1$. Définissons sur A l'application $f: A \to \widetilde{S}^n$ en posant

$$f(x, 0) = f_0 x \text{ sur } X_0 \quad \text{et} \quad f(x, 1) = f_1 x \text{ sur } X_1.$$

Pour démontrer que les applications $f_0: X \to \widetilde{S}^n$ et $f_1: X \to \widetilde{S}^n$ sont homotopes, il suffit de prolonger l'application $f: A \to \widetilde{S}^n$ que nous venons de construire à une application $F: W \to \widetilde{S}^n$. En vertu du théorème 1, il suffit pour cela à son tour que le degré df de l'application f soit un élément prolongeable du groupe $\nabla^n A$. C'est cela que nous chercherons à démontrer.

Parmi les recouvrements du bicompact W, il suffit de considérer seulement les recouvrements Ω qui ne contiennent pas d'éléments communs à X_0 et X_1. Ces recouvrements engendrent des recouvrements ω du sous-espace $A \subseteq W$ de la forme

$$\omega = A\Omega = \omega_0 \cup \omega_1,$$

où ω_i, $i = 0, 1$, consiste de toutes les intersections non vides des éléments du recouvrement Ω avec X_i.

Conformément à ceci, chaque chaîne x sur le nerf d'un certain ω se met de façon unique sous la forme

$$x = x_0 + x_1,$$

où x_0 est situé sur le nerf du recouvrement ω_0 et x_1, sur le nerf du recouvrement ω_1. Supposons maintenant que l'on se donne un élément ζ_A du groupe $\nabla^n A$. Choisissons un cocycle $z \in \zeta_A$. Il est situé sur le nerf d'un certain recouvrement ω et se met de façon unique sous la forme

$$z = z_0 + z_1,$$

où z_0 est situé sur $|\omega_0|$ et z_1, sur $|\omega_1|$. Désignons par ζ_i, $i = 0, 1$, la ∇-classe $\zeta_i \in \nabla^n X_i$ qui contient le cocycle z_i. On voit facilement que cette ∇-classe dépend seulement de la ∇-classe ζ_A et non du choix du cocycle z.

En envisageant les éléments des ∇-classes ζ_i, $i = 0, 1$, comme des cocycles du nerf $|\omega|$ tout entier, on peut écrire

$$\zeta_A = \zeta_0 + \zeta_1.$$

En vertu de l'unicité de cette représentation, nous concluons que le groupe $\nabla^n A$ est isomorphe à la somme directe des groupes $\nabla^n X_0$ et $\nabla^n X_1$, ce que nous écrivons sous la forme

$$\nabla^n A = \nabla^n X_0 + \nabla^n X_1.$$

Prenons maintenant une ∇-classe arbitraire $\zeta \in \nabla^n X$. On peut la considérer également comme un élément ζ_0 du groupe $\nabla^n X_0$ ainsi qu'un élément ζ_1 du groupe $\nabla^n X_1$. Il découle de la définition même de l'application $f\colon A = X_0 \cup X_1 \to \tilde{S}^n$ et de son degré df que

$$df_0 = df_1 = \zeta \in \nabla^n X$$

implique

$$df = \zeta_0 + \zeta_1 \in \nabla^n A,$$

et il nous faut démontrer que cette ∇-classe se prolonge sur tout l'espace W. Ceci découle de la proposition générale suivante.

Si $\zeta \in \nabla^n X$ est arbitraire, alors chaque ∇-classe

$$\zeta_A = \zeta_0 + \zeta_1 \in \nabla^n A$$

se prolonge sur W.

La démonstration est presque évidente. En effet, considérons l'application (la projection)

$$\pi(x, \theta) = x, \qquad \theta \in [0, 1] = Q^1$$

de l'espace W sur X.

Sur les ensembles $X_i \subseteq W$, $i = 0, 1$, l'application π consiste à changer les noms des points $(x, i) \in X_i$ en $x \in X$, i.e. c'est l'appli-

cation

(1) $$T_i(x, i) = x, \quad i = 0, 1.$$

L'homomorphisme dual $\bar{T}_i$: $\nabla^n X_i \to \nabla^n X$ consiste à donner aux éléments $\zeta_i \in \nabla^n X$, $i = 0, 1$, de nouveaux noms $\zeta \in \nabla^n X$, $i = 0, 1$, i.e. pour chaque $\zeta \in \nabla^n X$ nous avons

(1′) $$\bar{T}_i \zeta = \zeta_i, \quad i = 0, 1.$$

L'application π: $W \to X$ engendre un homomorphisme dual

$$\bar{\pi}: \nabla^n X \to \nabla^n W.$$

Démontrons qu'alors pour tout $\zeta \in \nabla^n X$

(2) $$J_A^W \bar{\pi} \zeta = \zeta_0 + \zeta_1,$$

ce qui démontrera la prolongeabilité d'une ∇-classe donnée (arbitraire) $\zeta_A = \zeta_0 + \zeta_1 \in \nabla^n A$ à une ∇-classe $\bar{\pi}\zeta \in \nabla^n W$ et tout sera terminé.

Pour démontrer la formule (2), remarquons tout d'abord que pour chaque $\zeta_W \in \nabla^n W$ nous avons évidemment

$$J_A^W \zeta_W = J_{X_0}^W \zeta_W + J_{X_1}^W \zeta_W,$$

et il suffit donc de démontrer que

(2_i) $$J_{X_i}^W \bar{\pi} \zeta = \zeta_i, \quad i = 0, 1.$$

Pour atteindre ce dernier but, considérons les applications identiques

$$E_i: X_i \to W, \quad i = 0, 1,$$

i.e.

$$E(x, i) = (x, i), \quad i = 0, 1.$$

Evidemment

(3) $$\pi E_i(x, i) = T_i(x, i) = x.$$

L'application E_i: $X_i \to W$ induit l'homomorphisme d'intersection

$$\bar{E}_i = J_{X_i}^W : \nabla^n W \to \nabla^n X_i.$$

Par conséquent, en passant aux homomorphismes duaux et en se servant des formules (1′) et (3), on obtient

$$\zeta_i = \bar{T}_i \zeta = \bar{E}_i \bar{\pi} \zeta = J_{X_i}^W \zeta,$$

i.e. la formule (2_i) qui conclut la démonstration du théorème de classification.

SUPPLÉMENT

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DE LA DIMENSION

Comme nous l'avons indiqué dans la note au début de la préface, ce Supplément rassemble certains faits de la théorie de la dimension, exposés dans le livre [AP] et nécessaires à la compréhension du présent ouvrage. Le § 1 contient les définitions fondamentales (des dimensions dim, ind, Ind). Si le lecteur ne les connaît pas, il gagnera à commencer la lecture du livre par ce paragraphe, qui contient également les énoncés de certains résultats fondamentaux (sans démonstrations), qui ne sont pas formellement nécessaires ici. Les autres paragraphes (§§ 2 à 5) sont de caractère plutôt auxiliaire; on peut donc s'y adresser au fur et à mesure que l'on rencontre les renvois correspondants dans le texte du livre.

Nous supposons que le lecteur est familier avec la théorie des ensembles « naïve » et les fondements de la topologie générale, par exemple dans les limites du chapitre 1 des livres [AP] ou [AH]. Nous nous servons des notations usuelles de la théorie des ensembles $\cup$, $\cap$, $\setminus$ (différence d'ensembles), $\wedge$ (ensemble vide), $\subseteq$ (appartenance), $\subset$ (appartenance stricte). Si A est un sous-ensemble topologique de l'espace X, alors $[A]$ (parfois $\bar{A}$) désigne son adhérence, $\langle A \rangle$, son intérieur et $\mathrm{Fr}\, A$, sa frontière.

§ 1. Les invariants dimensionnels fondamentaux dim, ind, Ind

1. Dimension dim. Si $\omega = \{O_\nu\}$ est un recouvrement topologique de l'espace X, on appelle *multiplicité* de ω le plus grand nombre (peut-être $+\infty$) des éléments (du recouvrement ω) $O_{\nu_1}, \ldots, O_{\nu_x}$ dont l'intersection $\bigcap_i O_{\nu_i} \in x \in X$ est non vide. Rappelons que le recouvrement ω' est *inscrit* dans ω (on dit également qu'il le *suit*: $\omega' > \omega$), si pour chaque $O' \in \omega'$ il existe un élément $O \supseteq O'$, $O \in \omega$, qui le contient. Par définition, la dimension dim X d'un espace topologique X est égale à n ($\leqslant +\infty$), si dans chaque recouvrement ouvert de X on peut inscrire un recouvrement ouvert de multiplicité n, mais il existe un tel recouvrement de X dans lequel on ne peut inscrire un recouvrement de multiplicité $\leqslant n-1$.

Le lemme suivant (bien connu) se démontre sans difficulté.

Lemme de Lebesgue. *Pour chaque recouvrement ouvert fini* $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ *du compact* X, *il existe un tel* $\varepsilon > 0$ (que l'on appelle *nombre de Lebesgue du recouvrement* ω) *que chaque ensemble* $M \subseteq X$ *de diamètre* $< \varepsilon$ *est contenu dans au moins un* $O_i \in \omega$.

En se servant de ce lemme, le lecteur démontrera sans difficulté que, pour les compacts, la définition de dim est équivalente à la suivante : $\dim X \leqslant n$, si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un ε-recouvrement ouvert fini (i.e. un recouvrement dont tous les éléments sont de diamètre $< \varepsilon$) de multiplicité n; $\dim X = n$, si $\dim X \leqslant n$, mais il est faux que $\dim X \leqslant n - 1$.

On peut démontrer qu'un sous-ensemble $A \subseteq R^n$ de l'espace euclidien R^n est de dimension n, si et seulement si A possède des points intérieurs (Megner, Urysohn); en particulier, l'espace R^n lui-même et le cube (la boule) $Q^n \subset R^n$ ont une dimension dim égale à n (Lebesgue, Brouwer). En outre, chaque polyèdre P de dimension k (dans le sens élémentaire !) possède une dimension $\dim P = k$ (voir § 2).

2. Les dimensions ind et Ind. Nous dirons qu'un sous-ensemble S (éventuellement vide !) d'un espace topologique X sépare les sous-ensembles $P, Q \subseteq X$, si $X \setminus S = G_1 \cup G_2$, où G_1 et G_2 sont disjoints et ouverts dans $P \setminus S$ et $P \subseteq G_1$, $Q \subseteq G_2$. Si en même temps S est fermé, on l'appelle *cloison* entre P et Q dans X. Une cloison S s'appelle fine lorsque $\langle S \rangle = \Lambda$. Le lecteur démontrera sans difficulté que le fait qu'une cloison quelconque existe entre P et Q implique toujours l'existence d'une cloison fine.

Posons par définition $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = -1$ si et seulement si X est vide. Supposons (la définition est récurrente) que l'on a déjà défini la classe des espaces pour lesquels $\operatorname{ind} X \leqslant n - 1$ (resp. $\operatorname{Ind} X \leqslant n - 1$). Posons $\operatorname{ind} X \leqslant n$ (resp. $\operatorname{Ind}. X \leqslant n$), si entre un ensemble fermé quelconque $P \subseteq X$ et un point quelconque $q \notin P$ (respectivement entre deux ensembles fermés quelconques $Q \subseteq X$, $Q \cap P = \Lambda$) il existe une cloison S de dimension $\operatorname{ind} S \leqslant n - 1$ (resp. $\operatorname{Ind} S \leqslant n - 1$). Enfin, posons $\operatorname{ind} X = n$ ($\operatorname{Ind} X = n$), si $\operatorname{ind} X \leqslant n$ ($\operatorname{Ind} X \leqslant n$), mais il est faux que $\operatorname{ind} X \leqslant n - 1$ ($\operatorname{Ind} X \leqslant n - 1$).

3. Relations entre les dimensions. Si X est un espace à base dénombrable (en particulier, un compact, un polyèdre, un sous-ensemble de l'espace euclidien R^n), on a les égalités d'Urysohn

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X.$$

Dans le cas général des bicompacts, nous avons seulement les inégalités

$$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X,$$

qui peuvent être strictes, comme le montrent respectivement les exemples de Luntz-Lokoutsievski et Philippov. Pour les espaces métriques, nous avons l'égalité de Katétov $\dim X = \operatorname{ind} X$; il est évident que $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$, mais on peut avoir $\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X$ (exemple de P. Roy). D'autre part, un compact quelconque de dimension n (et même un espace métrique arbitraire à base dénombrable de dimension n) est homéomorphe à un certain sous-ensemble de l'espace euclidien R^{2n+1} (théorème de Nöbeling-Pontriaguine-Hurewicz). Ainsi, la classe des compacts de dimension finie coïncide avec la classe de tous les sous-ensembles fermés bornés de l'espace R^n, $n = 1, 2, \ldots$

Tous les résultats indiqués sont démontrés dans le livre [AP]; voir également V. Hurewicz, H. Wallman [1].

§ 2. Complexes géométriques et abstraits ; recouvrements et nerfs

1. Points indépendants dans R^n. C'est ainsi que l'on appelle un ensemble de points $a^0, a^1, \ldots, a^k \in R^n$, si les vecteurs $\overrightarrow{a^0a^1}, \ldots, \overrightarrow{a^0a^k}$ sont linéairement indépendants. Il est évident qu'un système de $k+1$ points sera indépendant si et seulement s'il n'est pas situé dans un plan de dimension $k-1$; dans ce cas il définit un seul plan de dimension k dans lequel il est contenu. On déduit de la continuité des déterminants (et des propriétés des rangs des matrices de coordonnées des vecteurs linéairement indépendants) l'assertion suivante :

Proposition 1. *Chaque système de $k+1$ points de l'espace R^n, $n \leqslant k$, peut être, par un déplacement aussi petit que l'on veut, transformé en un système géométriquement indépendant; chaque système de points géométriquement indépendant le reste après un déplacement arbitraire suffisamment petit.*

D é f i n i t i o n. Un ensemble de points de l'espace R^n est dit *en position générale*, si chaque sous-ensemble de cet ensemble consistant de $n+1$ points (ou moins) est géométriquement indépendant.

La proposition 1 implique la

Proposition 2. *Supposons donnés un ensemble fini ou dénombrable de points*

$$M = \{a^1, a^2, \ldots, a^k, \ldots\}$$

situé dans l'espace R^n, et une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ En déplaçant chaque point a^i d'une distance inférieure à ε_i, on peut transformer l'ensemble M dans un ensemble $N = \{b^1, b^2, \ldots, b^i, \ldots\}$ qui sera en position générale. Si en même temps les

points $a^1, \ldots, a^k$ *étaient déjà en position générale, on peut supposer que* $b^1 = a^1, \ldots, b^k = a^k$.

On déduit de cette assertion la

Remarque 1. Supposons que l'on se donne dans l'espace R^{2n+1} un plan R^n de dimension n et un système fini de points $M = \{a^1, \ldots, a^s\}$. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$ en déplaçant chaque point a^i dans un point b^i situé de a_i à une distance inférieure à ε, on peut transformer l'ensemble M en un tel ensemble $N = \{b^1, \ldots, b^s\}$ en position générale, que tout plan R^k, $k \leqslant n$, qui contient les $k+1$ points quelconques $b^{i_0}, b^{i_1}, \ldots, b^{i_k}$ ne possède pas de points communs avec R^n.

La proposition 1 implique également la

Proposition 3. *Un ensemble fini M en position générale dans R^n conserve cette propriété pour tout déplacement suffisamment petit.*

Moins évidente est la proposition 4 que l'on déduit de la proposition 2.

Proposition 4. *Si l'ensemble dénombrable $M = \{a^1, a^2, \ldots, a^k, \ldots\}$ se trouve dans R^n en position générale, il existe des nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ tels que chaque ensemble $M' = \{b^1, b^2, \ldots, b^k, \ldots\}$ pour lequel $\rho(b^k, a^k) < \varepsilon_k$ sera également en position générale.*

2. Coordonnées baricentriques et simplexes. Si $\{a^0, a^1, \ldots, a^k\}$ est un système de points indépendants, on vérifie facilement que pour chaque point x du plan P^k déterminé par les points $a^0, \ldots, a^k$ (et seulement pour les points de ce plan) il existe une collection unique de nombres $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ pour lesquels

$$x = \mu_0 a_0 + \ldots + \mu_k a_k \quad \text{et} \quad \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_k = 1.$$

Ces nombres s'appellent *coordonnées baricentriques* du point x. On appelle *simplexe ouvert* T^k *de dimension* k, de sommets aux points $a^0, \ldots, a^k$, l'ensemble de points (du plan P^k) dont toutes les coordonnées baricentriques sont positives. L'adhérence $\overline{T}^k$ s'appelle *simplexe fermé* et coïncide avec l'enveloppe convexe des points $a^0, \ldots, a^k$. Pour chaque sous-ensemble de sommets $a_{i_0}, \ldots, a_{i_s}$ $(s \leqslant k)$ du simplexe T^k, on appelle *face contenant ces sommets*, le simplexe de dimension s déterminé par le système de points $a_{i_0}, \ldots, a_{i_s}$ (qui sera évidemment indépendant). Deux faces d'un même simplexe sont dites *opposées*, si leurs ensembles de sommets forment une partition de l'ensemble des sommets du simplexe donné en deux sous-ensembles disjoints. En particulier, la *face opposée au sommet* a^i est la face déterminée par les points $a^0, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^k$.

3. Complexes géométriques. Les complexes (géométriques) simpliciaux sont des ensembles de simplexes ouverts de l'espace donné R^n. Ils peuvent être soumis à telle ou telle condition supplémentaire, et alors le nom commun « complexe » est accompagné par l'adjectif correspondant. Ainsi, par exemple, nous considérerons dans la majorité des cas les complexes finis, c'est-à-dire ceux qui contiennent un nombre fini de simplexes; on peut ensuite stipuler que les simplexes, éléments d'un complexe donné, soient disjoints. Le complexe K est dit *de dimension* n, si tous ses simplexes sont de dimension $\leqslant n$ et au moins un d'eux est de dimension n. La condition principale appliquée aux complexes considérés sera celle de complétude: un complexe K s'appelle *complet*, si chaque simplexe, qui est la face d'un simplexe quelconque du complexe K, est lui-même un élément de ce complexe. Un complexe complet fini K, dont les éléments sont des simplexes disjoints (ouverts) de l'espace donné R^n, s'appelle *triangulation* (située dans R^n).

Remarque 1. Si nous ne notons pas explicitement le contraire, nous entendons par simplexe un simplexe ouvert.

Appelons *ensemble sous-jacent* d'un complexe K la réunion des points de tous les simplexes qui appartiennent à K. L'ensemble sous-jacent d'un complexe K se désigne par $\widetilde{K}$. L'ensemble sous-jacent de toute triangulation coïncide avec la somme des adhérences de tous les simplexes de cette triangulation et, étant la somme d'un nombre fini de compacts situés dans R^n, est lui-même un compact. Chaque compact qui est l'ensemble sous-jacent d'une triangulation s'appelle *polyèdre*; si $P = \widetilde{K}$, la triangulation K s'appelle *triangulation* du polyèdre P. Ainsi, chaque triangulation est la triangulation de son ensemble sous-jacent, mais un même polyèdre peut (sauf dans le cas trivial des polyèdres de dimension nulle) posséder un nombre infini de triangulations.

On appelle, bien entendu, *sous-complexe* d'un complexe K tout complexe K_0 dont tous les éléments sont également des éléments du complexe K. Si nous n'indiquons pas le contraire, par complexe K nous entendrons toujours un complexe complet; par contre, dans les complexes complets K, nous envisagerons souvent des sous-complexes K_0 non complets.

Pour chaque complexe non complet K_0, on peut définir son *adhérence combinatoire*, à savoir le complexe complet $[K_0]$ qui consiste de tous les simplexes $T \in K_0$ et de toutes les faces de ces simplexes. En particulier, on peut parler de l'adhérence combinatoire du simplexe T, en entendant par cela le complexe complet $[T]$ consistant du simplexe T et de toutes ses faces. On appelle *frontière combinatoire* d'un simplexe, le complexe consistant de toutes les faces propres de ce complexe.

4. Simplexes abstraits et nerfs. Considérons un ensemble quelconque E dont les éléments seront appelés sommets. Chaque sous-ensemble fini $T \subseteq E$ sera appelé *simplexe* (*abstrait*) de l'ensemble de sommets; les sous-ensembles non vides du simplexe T s'appellent faces de ce simplexe.

On appellera *dimension* d'un simplexe le nombre de ses sommets moins un.

Chaque ensemble K de simplexes abstraits de l'ensemble des sommets E s'appelle *complexe* (*abstrait*) de cet ensemble de sommets.

Les notions de face, de dimension, d'adhérence combinatoire, de complétude, etc., se définissent tout comme dans le cas des complexes géométriques.

L'exemple le plus important des complexes abstraits est donné par les nerfs des systèmes d'ensembles finis, en particulier, des recouvrements. Soit $\alpha = \{M_1, \ldots, M_s\}$ un tel système. Faisons correspondre à chaque élément M_i de ce système un certain sommet e_i; un ensemble de sommets forme un simplexe si l'intersection des ensembles correspondants est non vide. Le complexe abstrait ainsi obtenu s'appelle *nerf* du système d'ensembles donné.

5. Etoiles. Sous-complexes ouverts et fermés. Appelons *étoile combinatoire* d'un simplexe T du complexe K l'ensemble $O_k T$ de tous les simplexes du complexe K ayant T pour face commune propre ou impropre (i.e. coïncidant avec T).

Un sous-complexe K_0 du complexe K s'appelle *ouvert* dans K s'il contient avec tout simplexe $T \in K_0$ également toute l'étoile (combinatoire) de ce simplexe. Les sous-complexes ouverts des triangulations nous donnent l'exemple le plus important de complexes non complets.

Un sous-complexe K_0 du complexe K, dont le complément $K \setminus K_0$ est ouvert, s'appelle *fermé*; si K est un complexe complet, alors ses sous-complexes fermés sont précisément les sous-complexes complets.

On voit facilement que les étoiles combinatoires $O_K e_0, \ldots, O_K e_r$ des sommets $e_0, \ldots, e_r$ du complexe K ont une intersection non vide, si et seulement si ces sommets forment l'ensemble des sommets d'un certain simplexe du complexe K. Autrement dit, le complexe K est le nerf du système des étoiles de ses sommets.

Si K est une triangulation, nous considérerons dans la plupart des cas non pas les étoiles combinatoires du complexe K, mais leurs ensembles sous-jacents, que nous appellerons *étoiles ouvertes* et désignerons par OT; les étoiles ouvertes des sommets seront appelées *étoiles principales* (de la triangulation donnée). L'intersection des ensembles sous-jacents de certains sous-complexes d'une triangulation K est l'ensemble sous-jacent à l'intersection de ces sous-complexes; par conséquent, les étoiles ouvertes $Oe_0, \ldots, Oe_r$ des

sommets $e_0, \ldots, e_r$ de la triangulation K ont une intersection non vide si et seulement si ces sommets forment l'ensemble des sommets d'un certain simplexe du complexe K. Nous avons l'assertion fondamentale suivante.

Théorème 1. *Toute triangulation K est le nerf du système de ses étoiles principales.*

Corollaire 1. *Le système $\omega_K = \{Oe_i\}$ des étoiles ouvertes de la triangulation K du polyèdre $P = \tilde{K}$ est un recouvrement ouvert de multiplicité $n + 1$ du polyèdre P, où n est la dimension du complexe K.*

6. Applications simpliciales. Supposons que l'on fait correspondre à chaque sommet a du complexe simplicial X un sommet $b = fa$ du complexe simplicial Y, la condition suivante étant satisfaite: si les sommets $a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}$ du complexe X sont ceux d'un certain simplexe de X, alors les sommets $fa_{i_0}, \ldots, fa_{i_r}$, parmi lesquels certains peuvent coïncider, sont ceux d'un certain simplexe du complexe Y.

En vertu de cette condition, à chaque simplexe $T = | a_{i_0} \ldots a_{i_r} |$ du complexe X correspond un certain simplexe $T' = fT$ du complexe Y, et nous obtenons une application f du complexe X dans le complexe Y; l'application $f: X \to Y$ ainsi définie s'appelle *application simpliciale* du complexe X dans le complexe Y.

Si l'application simpliciale du complexe X sur le complexe Y est bijective, on l'appelle *application isomorphe* ou *isomorphisme*, et les complexes X et Y sont dits *isomorphes* entre eux. On démontre facilement le

Théorème 2. *Tout complexe simplicial complet fini de dimension n est isomorphe à une certaine triangulation Q située dans R^m pour chaque $m \geqslant 2n + 1$.*

En effet, supposons que $a_1, \ldots, a_s$ est l'ensemble de tous les sommets du complexe P. Choisissons des points quelconques $b_1, \ldots, b_s$ en position générale dans R^m, i.e. de manière à ce qu'aucun ensemble de $m + 1$ points choisis parmi eux ne soit situé dans un plan de dimension $m - 1$ de l'espace R^m. Définissons un simplexe qui a pour sommets $b_{i_0}, \ldots, b_{i_r}$, $r \leqslant n$, dans R^m si et seulement si les points $a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}$ sont les sommets d'un simplexe du complexe P. Les points $b_{i_0}, \ldots, b_{i_r}$ sont géométriquement indépendants dans R^m, de sorte que le simplexe $| b_{i_0} \ldots b_{i_r} | \subset R^m$ existe. Les simplexes obtenus de la manière indiquée dans R^m sont disjoints; en effet, considérons les simplexes

$$| b_{i_0} \ldots b_{i_h} | \subset R^m \quad \text{et} \quad | b_{j_0} \ldots b_{j_k} | \subset R^m$$

correspondant à des simplexes $|a_{i_0} \ldots a_{i_h}|$ et $|a_{j_0} \ldots a_{j_k}|$ distincts du complexe P. Puisque la dimension du complexe X est égale à n, on a $h \leqslant n$ et $k \leqslant n$; par conséquent, la réunion des sommets des simplexes $|b_{i_0} \ldots b_{i_h}|$ et $|b_{j_0} \ldots b_{j_k}|$ consiste d'au-moins $(h+1)+(k+1) \leqslant (n+1)+(n+1) = 2n+2 \leqslant \leqslant m+1$ points et donc, étant un ensemble de points géométriquement indépendants dans R^m, est l'ensemble des sommets d'un certain simplexe (de l'espace R^m) qui possède pour face $|b_{j_0} \ldots b_{j_k}|$ aussi bien que $|b_{i_0}, \ldots, b_{i_h}|$; ces simplexes sont donc disjoints.

Ainsi, les simplexes construits dans R^m forment une triangulation Q, qui est évidemment isomorphe au complexe P.

Pour $m \geqslant n$, démontrer le théorème 2 c'est démontrer l'assertion suivante.

Théorème 2'. *Chaque complexe simplicial fini de dimension n est isomorphe, pour $m \geqslant n$, à un certain complexe Q constitué de simplexes de l'espace R^m.*

Chaque tel complexe Q s'appelle *réalisation géométrique* dans R^m du complexe (abstrait) P. Dans le cas général, Q ne sera pas une triangulation, car ses simplexes peuvent se couper.

La notion de réalisation géométrique Q d'un complexe abstrait donné P nous sera surtout nécessaire dans le cas où P est le nerf d'un certain système d'ensembles, en particulier, d'un certain recouvrement α d'un espace X. Notons, en particulier, le cas où $\alpha = \{M_1, \ldots, M_s\}$ est le recouvrement d'un espace X, qui est lui-même un sous-ensemble de l'espace R^m.

Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que les sommets $b_1, \ldots, b_s$ du complexe Q sont choisis dans R^m de manière à ce que $\rho(M_i, b_i) < \varepsilon$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$. Alors le complexe Q s'appelle *réalisation* du nerf P du recouvrement α, choisi « auprès » (plus exactement dans un « ε-voisinage ») du recouvrement α.

Un recouvrement α', inscrit dans α, est dit *inscrit combinatoirement* si la relation d'inclusion engendre un isomorphisme des nerfs $|\alpha'| \to |\alpha|$.

7. Subdivision. La triangulation K' suit la triangulation K si chaque simplexe $T' \in K'$ est contenu dans un certain simplexe (évidemment unique) $T \in K$; le simplexe $T \in K$ s'appelle *support* du simplexe $T' \in K'$ dans la triangulation K.

Si K' suit K, alors évidemment on a $\widetilde{K}' \subseteq \widetilde{K}$; si en même temps $\widetilde{K}' = \widetilde{K}$, c'est-à-dire si chaque simplexe $T \in K$ est la somme des simplexes $T' \in K'$ (de la triangulation K') qu'il contient, alors K' s'appelle *subdivision* de la triangulation K.

Si X est un complexe complet abstrait, on appelle *cône* de sommet o sur X le complexe abstrait oX qui a pour simplexes le som-

met o lui-même, tous les simplexes de la forme $t = |ot'| = |oa^1 \ldots a^r|$, où $t' = |a^1, \ldots, a^r| \in X$, et toutes leurs faces. Définissons par récurrence la *subdivision baricentrique* d'un complexe : la subdivision baricentrique d'un sommet est le sommet lui-même ; si l'on a défini la subdivision baricentrique de tous les simplexes de dimension $\leqslant k - 1$, alors la subdivision baricentrique d'un simplexe de dimension k est le cône sur le complexe obtenu en prenant la réunion de toutes les subdivisions baricentriques des faces du simplexe donné.

Dans le cas d'un complexe géométrique, on choisit en qualité de sommets les centres de gravité des simplexes correspondants ; on obtient alors à nouveau un complexe géométrique dont l'ensemble sous-jacent coïncide avec celui du complexe donné. On démontre aisément qu'en répétant la subdivision baricentrique d'un simplexe géométrique, on fera tendre vers zéro les diamètres de tous les simplexes.

§ 3. Applications barycentriques et canoniques ; théorème d'approximation

1. Par la suite, nous entendrons par recouvrement de l'espace X (sauf mention du contraire) un recouvrement fini ouvert. Un recouvrement ouvert (resp. fermé) est dit correct si ses éléments sont des ensembles de type F_σ (resp. G_δ). On démontre facilement qu'il est possible d'inscrire combinatoirement un recouvrement correct (ouvert aussi bien que fermé) dans tout recouvrement d'un espace normal.

Supposons que la triangulation $N = N_\omega$ est la réalisation géométrique dans R^m du nerf du recouvrement $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ de l'espace X. Désignons par e_i le sommet (du nerf N) qui correspond à l'élément O_i du recouvrement ω.

L'application f de l'espace X dans le polyèdre $\widetilde{N}$ est dite *canonique* (relativement au recouvrement ω), si l'image inverse $f^{-1}Oe_i$ de chaque étoile Oe_i est contenue dans O_i. Nous dirons que l'application $f: X \to \widetilde{N}$ du simplexe $T \in N$ le recouvre *essentiellement*, si l'application $f: f^{-1}\overline{T} \to \overline{T}$ est essentielle (voir définition au § 5) ; et alors, comme toujours, $\overline{T}$ est un simplexe fermé possédant les mêmes sommets que T.

Théorème des applications canoniques. *Supposons que* $\omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ *est un recouvrement quelconque de l'espace* X *de nerf* N *réalisé sous forme de triangulation ; on peut trouver un tel sous-complexe* N' *du nerf* N *et une telle application* $f: X \to \widetilde{N}$, *canonique relativement à* ω, *que l'image* fX *est un polyèdre* $\widetilde{N}' \subseteq \widetilde{N}$ *et*

chaque simplexe principal *) *du complexe N' est recouvert essentiellement.*

Démonstration. Première étape. Construction de l'application baricentrique. Soit N une réalisation géométrique du nerf du recouvrement ω. Prenons un recouvrement correct $\omega' = \{O'_1, \ldots, O'_s\}$ inscrit combinatoirement dans ω ; pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$ construisons sur X une fonction continue f_i, nulle sur $X \setminus O'_i$ et positive sur tous les points $x \in O'_i$; si X est un espace métrique, alors chaque recouvrement ω est correct et nous posons simplement $f_i(x) = \min\{1, \rho(x, X \setminus O_i)\}$. Lorsque les fonctions f_i ont été définies, nous construisons l'application f de l'espace X dans le polyèdre $\widetilde{N}$, appelée baricentrique. Pour chaque point $x \in X$ nous considérons tous les éléments O'_i du recouvrement ω' qui contiennent ce point ; supposons que ce sont $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$; alors, parmi les fonctions $f_i(x)$ seules les fonctions $f_{i_0}, \ldots, f_{i_r}$ sont positives au point x, les autres y étant nulles. Par conséquent, en plaçant dans les sommets du nerf $e_1, \ldots, e_s$ respectivement les masses $f_1(x), \ldots, f_s(x)$, nous obtiendrons des masses positives seulement dans les sommets $e_{i_0}, \ldots, e_{i_r}$ qui correspondent aux éléments $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$ qui contiennent le point x. Le centre de gravité de ces masses, c'est-à-dire le point aux coordonnées baricentriques

$$\frac{f_{i_k}(x)}{\sum\limits_{j=1}^{r} f_{i_j}(x)} = \frac{f_{i_k}(x)}{\sum\limits_{i=1}^{s} f_i(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots, r,$$

dans le système de coordonnées baricentriques basé sur les points e_{i_k}, $k = 0, 1, \ldots, r$, est un point du simplexe (ouvert) $|e_{i_0}, \ldots, e_{i_r}| \in N$ (ce simplexe existe, puisque $O'_{i_0} \cap \ldots \cap O'_{i_r} \ni x$). Ce point y sera défini comme étant l'image $f(x)$ du point x par l'application f. Ainsi, si $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$ sont tous les éléments du recouvrement ω qui contiennent le point x, alors $f(x) \in |e_{i_0} \ldots e_{i_r}|$. Puisque la fonction $f_i(x)$ est continue, le point $f(x)$ varie continûment en fonction du point x, c'est-à-dire que l'application $f: X \to \widetilde{N}$ est continue.

Deuxième étape. Nous supposons maintenant que le nerf N est réalisé sous forme de triangulation.

Démontrons l'inclusion

$$f^{-1}Oe_i \subseteq O_i.$$

---

*) Le simplexe T est dit *principal* s'il n'existe pas de $T' \in K$, $T' > T$.

Soit $x \in f^{-1}Oe_i$ et soit T l'unique simplexe (de la triangulation N) qui contient le point fx. Alors on a nécessairement $e_i < T$, et donc $f_i(x) \neq 0$, $x \in O'_i \subseteq O_i$. L'inclusion $f^{-1}Oe_i \subseteq O'_i \subseteq O_i$ est démontrée.

On démontre tout aussi facilement que l'on a même l'égalité

$$f^{-1}Oe_i = O'_i. \tag{1}$$

En effet, si $fx \in T$, alors parmi les fonctions f_i seules les fonctions $f_{i_0}, \ldots, f_{i_r}$ seront non nulles au point x, ce qui signifie que parmi les ensembles O'_i seuls les ensembles $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$ contiennent le point x. Autrement dit, $f^{-1}T$ coïncide avec l'ensemble $E_{i_0 \ldots i_r}$ de tous les points $x \in X$ qui appartiennent à la fois à tous les ensembles $O'_{i_0}, \ldots, O'_{i_r}$, $O'_i \in \omega'$, et à eux seuls,

$$f^{-1}|e_{i_0} \ldots e_{i_r}| = (O'_{i_0} \cap \ldots \cap O'_{i_r}) \setminus \bigcup_{j \neq i_0, \ldots, i_r} O'_j = E_{i_0 \ldots i_r}. \tag{2}$$

L'étoile Oe_i est la somme de simplexes disjoints de la forme $|e_i e_{j_1} \ldots e_{j_r}|$ qui possèdent e_i en guise de sommet (pour $r = 0$ nous obtenons le sommet $e_i \in Oe_i$ lui-même). L'ensemble O'_i est la somme d'ensembles disjoints de la forme $E_{ij_1 \ldots j_r}$ (pour $r = 0$ nous obtenons l'ensemble E_i qui consiste de tous les points x appartenant à l'ensemble O'_i et à aucun autre $O'_j \in \omega'$). Il est bien entendu que certains termes de cette somme peuvent s'avérer vides. Mais d'après l'égalité (2)

$$f^{-1}|e_i e_{j_1} \ldots e_{j_r}| = E_{ij_1 \ldots j_r};$$

ou, en prenant la somme (pour i fixe) de toutes les égalités de cette forme (sur tous les $j_1, \ldots, j_r$), nous obtenons à gauche $f^{-1}Oe_i$, et à droite O'_i, c'est-à-dire l'égalité cherchée (1).

Troisième étape. Lemmes de descente. Supposons données les applications $f: X \to \tilde{N}$ et $f_1: X \to \tilde{N}_1$, où N_1 est un sous-complexe du complexe N. Nous dirons que l'application f_1 s'obtient de f par *descente* (ou par *balayage*) si $f(x) \in T \in N$ et $f_1(x) \in T_1$ implique toujours $T_1 \leqslant T$.

Lemme 1. *Si f_1 s'obtient de f par descente, alors $f_1^{-1}Oe \subseteq f^{-1}Oe$ pour tout sommet $e \in N$.*

En effet, soit $f_1(x) \in T_1 \subseteq Oe$, c'est-à-dire $f_1(x) \in T_1 \geqslant e$. Alors $f(x) \in T \geqslant T_1 \geqslant e$ ou $f(x) \in T \subseteq Oe$, ce qui démontre notre assertion.

Le lemme 1 implique immédiatement l'assertion fondamentale suivante :

Lemme 2. *Si f est une application canonique de l'espace X dans l'espace sous-jacent au nerf N_ω et f_1 s'obtient de f par descente, alors f_1 est également une application canonique $f_1: X \to \tilde{N}_\omega$.*

Lemme 3. *Supposons que l'application $f: X \to \widetilde{K}$ de l'espace X dans un polyèdre triangulé $\widetilde{K}$ est telle qu'il existe un simplexe principal $T \in K$ qui n'est pas recouvert essentiellement. Il existe alors un sous-complexe fermé (propre) $K_1 = (K \setminus T) \subset K$ et une application $f_1: X \to \widetilde{K}_1$ obtenue de f par descente.*

Démonstration. Supposons que $T \in K$ est le simplexe principal qui n'est pas recouvert essentiellement. Posons $\Theta = f^{-1}T$. Désignons, comme toujours, par $S = \bar{T} \setminus T$ la frontière du simplexe T et considérons l'application $f_1: \Theta \to S$ qui coïncide sur $f^{-1}S$ avec l'application f. On peut trouver une telle f_1 puisque par hypothèse l'application $f: \Theta \to \bar{T}$ n'est pas essentielle. Puisque sur $f^{-1}(\widetilde{K} \setminus T) \cap f^{-1}T = f^{-1}S$ les applications f et f_1 coïncident, on a, en posant $f_1x = fx$ pour $x \in f^{-1}(\widetilde{K} \setminus T)$, une application continue $f_1: X \to \widetilde{K}$ qui diffère de f seulement par le fait que les points $x \in X$ qui s'appliquaient par f sur le simplexe T sont maintenant appliqués sur la frontière de ce simplexe. Autrement dit, f_1 s'obtient de f par descente. Le lemme 3 est démontré.

Fin de la démonstration du théorème. Supposons qu'un certain simplexe principal T_1 du complexe N n'est pas recouvert essentiellement par l'application f. Nous pouvons alors appliquer le lemme 3 et transformer par descente l'application $f: X \to \widetilde{N}$ dans l'application $f_1: X \to \widetilde{N}_1$, où le polyèdre $\widetilde{N}_1$ est l'ensemble sous-jacent au complexe $N_1 = N \setminus T_1 \subset N$.

Puisque le complexe N est fini, on peut, en itérant la procédure de « descente » obtenir une application $f_k: X \to \widetilde{N}_k$ de l'espace X dans l'espace $\widetilde{N}_k$ sous-jacent au sous-complexe N_k du nerf N, de sorte que tous les simplexes principaux du complexe N_k soient recouverts essentiellement, or, l'application f_k est obtenue de f par descente et donc (voir lemme 2) est canonique (relativement à ω). Le théorème est démontré.

Remarque 1. Si l'application $f: X \to \widetilde{K}$ recouvre essentiellement tous les simplexes principaux du complexe K, alors elle est une surjection sur le polyèdre $\widetilde{K}$.

En effet, supposons que l'application $f: X \to \widetilde{K}$ n'est pas surjective et $y \in \widetilde{K} \setminus fX$. Soit $T_y \in K$ le support du point y dans le complexe K et $T \geqslant T_y$ un simplexe principal. Alors le simplexe $\bar{T}$ ne peut être recouvert essentiellement par l'application f.

Premier théorème d'approximation. Soit φ *une application continue d'un espace normal de dimension n dans un cube $Q^m \subset R^m$, $m \geqslant n$. Pour chaque ε il existe une application d'approximation f de l'espace X dans un polyèdre $\widetilde{N} \subset Q^m$ de dimension n qui diffère de*

φ de moins que ε dans le sens suivant

(1) $$\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Si l'on a $m \geqslant 2n + 1$ et l'on se donne un recouvrement quelconque ω de l'espace X, on peut en outre supposer que f est une ω-application canonique dans $\widetilde{N} = \widetilde{N}_\omega$ (et il existe un sous-complexe N' du nerf N tel que $fX = \widetilde{N}'$).

D'autre part, supposons toujours que $m \geqslant 2n + 1$, et choisissons un plan R_1^n dans R^m. On peut alors exiger, en plus, que l'approximation f soit telle que la distance entre l'ensemble $[fX]$ et le plan R_1^n soit positive.

Démonstration. Recouvrons le cube Q^m par un nombre fini de boules $\{V_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, de diamètre $< \frac{\varepsilon}{2}$. Les images inverses $\varphi^{-1}V_j = U_j$ de ces boules forment un recouvrement $\omega_1 = \{U_j\}$ de l'espace X. Prenons un recouvrement correct de l'espace X

$$\omega_0 = \{O_1, \ldots, O_s\}$$

de multiplicité $n + 1$, plus fin que ω_1 (et que ω si c'est celui-ci qui est donné). Choisissons pour chaque $i = 1, \ldots, s$ un point $p_i \in O_i \in \omega_0$ et prenons des points $e_1, \ldots, e_s$ à l'intérieur du cube Q^m et en position générale dans $R^m \supset Q^m$, de sorte que

(2) $$\rho(e_i, \varphi p_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si l'on a en outre $m \geqslant 2n + 1$ et un plan R_1^n est donné dans R^m, nous assujettissons le choix des points $e_1, \ldots, e_s$ à la condition supplémentaire suivante: aucun plan de dimension n, contenant $n + 1$ points choisis parmi les points $e_1, \ldots, e_s$, ne coupe le plan R_1^n (ce que l'on peut faire en vertu de la remarque 1 du § 1). Prenons les points $e_1, \ldots, e_s$ en guise de sommets du nerf N du recouvrement ω_0. Puisque $\dim \widetilde{N} = n$ et $m \geqslant n$, tout ensemble de sommets d'un des simplexes du nerf N consiste de points géométriquement indépendants dans R^m (car nous avions choisi les points $e_1, \ldots, e_s$ en position générale); les simplexes du nerf N sont donc des simplexes géométriques (ouverts), qui peuvent toutefois se couper si l'on exige seulement $m \geqslant n$; mais si $m \geqslant 2n + 1$, ces simplexes sont disjoints et le nerf N est une triangulation.

En outre, si $m \geqslant 2n + 1$ et un plan R_1^n a été choisi dans R^m, la condition supplémentaire, à laquelle nous avons soumis le choix des points $e_1, \ldots, e_s$, implique que l'adhérence d'aucun des simplexes du nerf N ne coupe le plan R_1^n, de sorte que l'ensemble sous-jacent $\widetilde{N}$ du nerf N, étant un compact sans points communs avec R_1^n, est situé à une distance positive de ce plan: $\rho(\widetilde{N}, R_1^n) > 0$.

Construisons maintenant l'application baricentrique $f\colon X \to \widetilde{N}$; dans le cas particulier où $m \geqslant 2n+1$ et N est une triangulation, l'application f est canonique; elle est donc une ω_0-application. D'après le théorème et la remarque 1, on peut supposer que $fX = \widetilde{N}'$ pour un certain sous-complexe N' du nerf N.

Pour un plan R_1^n choisi dans R^m, on a par construction $\rho(\widetilde{N}, R_1^n) > 0$, et donc $\rho([fX], R_1^n) > 0$. Il reste à démontrer, dans le cas d'un $m \geqslant n$ quelconque, l'inégalité (1). Soit x un point quelconque de l'espace X; désignons par $O_{i_0}, \ldots, O_{i_r}$ tous les éléments du recouvrement ω_0 qui contiennent ce point. Alors (si f est une application baricentrique), parmi les nombres $f_i(x)$ seuls les nombres $f_{i_0}(x), \ldots, f_{i_r}(x)$ sont positifs, de sorte que $f(x)$ est contenu dans le simplexe $|e_{i_0} \ldots e_{i_r}) \in N$. Dans le cas où f s'obtient d'une application baricentrique par descente (quand $m \geqslant 2n+1$), on a $fx \in \overline{e_{i_0} \ldots e_{i_r}}$. D'autre part, chaque O_i est contenu dans un certain $U_j = \varphi^{-1}V_j$, de sorte que

$$\operatorname{diam} \varphi O_i \leqslant \operatorname{diam} \varphi U_j < \varepsilon/2.$$

Par conséquent, en se souvenant que $p_i \in O_i$, $\rho(\varphi p_i, e_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient $\rho(\varphi x, \varphi p_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(\varphi x, e_i) < \varepsilon$ pour $i = i_0, \ldots, i_r$.

Tous les points $e_{i_0}, \ldots, e_{i_r}$ sont donc situés dans la boule $O(\varphi x, \varepsilon)$, qui contient ainsi tout le simplexe $\overline{e_{i_0} \ldots e_{i_r}}$ avec le point fx. L'inégalité (1) est démontrée, ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 4. Théorèmes des ε- et ω-applications

Dans ce paragraphe, le mot « espace » signifie « espace topologique normal ». Une application continue f de l'ensemble X sur l'ensemble Y, situé dans un même espace métrique R, s'appelle *ε-déplacement* si, pour le nombre positif donné ε, on a, quel que soit le point $x \in X$, l'inégalité $\rho(x, fx) < \varepsilon$.

Appelons l'application continue f de l'espace métrique X dans un espace Y *ε-application* si l'image inverse $f^{-1}y$ de chaque point $y \in Y$ par cette application est de diamètre $<\varepsilon$. Soient ω un recouvrement ouvert de l'espace X et $f\colon X \to Y$, une application continue de l'espace X dans l'espace topologique Y. L'application f s'appelle *ω-application*, si chaque point $y \in Y$ possède un voisinage Oy dont l'image inverse $f^{-1}Oy$ est contenue dans au moins un élément du recouvrement ω.

Théorème des ω-applications. *Si* $\dim X = n$, *alors pour chaque recouvrement ouvert fini* ω, *il existe une* ω*-application de l'espace* X *sur un polyèdre de dimension* n; *d'autre part, il existe un recouvrement ouvert fini* ω, *qui n'admet aucune* ω*-application* $f: X \to P$ *dans un polyèdre* P *de dimension* $<n$.

La démonstration sera donnée plus loin. Le lecteur démontrera facilement l'assertion suivante.

Proposition 1. *Pour qu'un compact* X *admette, pour tout* $\varepsilon > 0$, *une* ε*-application dans (sur) un compact* Y *appartenant à une classe donnée* $\mathfrak{K}$ *(par exemple, dans un polyèdre de dimension* n*), il faut et il suffit que, pour chaque recouvrement fini ouvert* ω *du compact* X, *il existe une* ω*-application* $f: X \to Y$ *dans (sur) le compact* Y *de cette classe.*

De cette proposition et du théorème précédent on déduit immédiatement le

Théorème des ε-applications (Alexandrov, 1926). *Chaque compact* X *de dimension* n *admet pour tout* $\varepsilon > 0$ *une* ε*-application sur un certain polyèdre de dimension* n; *d'autre part, il existe un tel* $\varepsilon = \varepsilon_X$, *pour lequel on ne peut trouver aucune* ε*-application du compact donné* X *de dimension* n *sur un polyèdre (ni même dans un compact) de dimension* $< n$.

Si le compact X est donné sous forme de sous-espace d'un espace euclidien, on peut remplacer dans l'énoncé précédent les ε-applications par les ε-déplacements: le théorème des ε-applications se transforme alors dans le théorème des ε-déplacements.

Commençons la démonstration du théorème des ω-applications par sa deuxième assertion. Pour cela, démontrons une proposition plus forte:

Principe d'invariance de Brouwer. *Soit* $\dim X = n$; *il existe alors un tel recouvrement ouvert fini* ω_0 *de l'espace* X *qu'aucune* ω_0*-application de l'espace* X *dans un espace normal de dimension* $< n$ *n'est possible.*

D é m o n s t r a t i o n (par l'absurde). Supposons que pour l'espace donné X de dimension n et pour un recouvrement ω de cet espace, on a une ω-application de X dans un espace normal Y de dimension $\dim Y < n$. Obtenons une contradiction. Prenons à cette fin un recouvrement $\omega \equiv \omega_0 = \{O_1, \ldots, O_s\}$ dans lequel on ne peut inscrire aucun recouvrement de multiplicité $< n + 1$; un tel ω_0 existe, puisque $\dim X = n$. Par hypothèse, il existe pour cet ω_0 une ω_0-application $f_0: X \to Y$ de X dans un espace normal Y, $\dim Y < n$. D'après la définition d'une ω-application, chaque point $y \in Y$ possède un voisinage Oy dont l'image inverse $f_0^{-1}Oy$ est contenue dans un élément du recouvrement ω_0.

Désignons par W_i la réunion de tous les Oy pour lesquels $f_0^{-1}Oy \subseteq O_i \in \omega_0$. Alors

$$\{W_1, \ldots, W_s\}$$

est un recouvrement fini de l'espace Y. Inscrivons-y le recouvrement $\{V_1, \ldots, V_s\}$ de multiplicité $\leqslant n$. Alors $\{f_0^{-1}V_1, \ldots, f_0^{-1}V_s\}$ est un recouvrement de multiplicité $\leqslant n$ de l'espace X, inscrit dans ω_0.

La contradiction obtenue démontre le principe d'invariance de Brouwer et donc la deuxième assertion du théorème des ω-applications.

Démontrons la première assertion du théorème des ω-applications. Soit ω un recouvrement quelconque de l'espace X de dimension n; il s'agit de construire une ω-application de l'espace X sur un polyèdre de dimension n. En prenant, s'il le faut, un recouvrement plus fin que ω, nous pouvons admettre sans perte de généralité que ω est de multiplicité $n+1$ et qu'il n'existe aucune ω-application de l'espace X dans un polyèdre de dimension $< n$. Supposons que la triangulation N est le nerf du recouvrement ω. En vertu du théorème des applications canoniques, il existe un sous-complexe $N' \subseteq N$ et une application canonique f de l'espace X sur le polyèdre $\widetilde{N}'$. Puisque $\widetilde{N}' \subseteq \widetilde{N}$, on a $\dim \widetilde{N}' \leqslant n$; d'après le choix du recouvrement ω on a, d'autre part, $\dim N' \geqslant n$. Ainsi, $\dim \widetilde{N}' = n$, c.q.f.d.

§ 5. Théorème des applications essentielles

Rappelons qu'une application $f\colon X \to \overline{T}^n$ de l'espace X sur un simplexe fermé $\overline{T}^n$ de dimension n est dite *essentielle*, si toute application continue $f_1\colon X \to \overline{T}^n$ qui coïncide avec f sur tous les points de l'ensemble

$$\Phi = f^{-1}S^{n-1},$$

où S^{n-1} est la frontière de T^n, est surjective.

Théorème des applications essentielles. Il consiste de deux assertions:

a) *Tout espace X de dimension n possède une application essentielle sur un simplexe fermé $\overline{T}^n$ de dimension n.*

b) *Toute application d'un espace de dimension n dans un simplexe (ou une boule) de dimension m n'est pas essentielle lorsque $m > n$.*

Démonstration de l'assertion a). Soit $\dim X = n$; choisissons un recouvrement ω de l'espace X de sorte qu'aucune ω-application de X sur un polyèdre de dimension $< n$ n'existe.

En remplaçant éventuellement ω par un recouvrement plus fin, nous pouvons supposer que sa multiplicité est égale à $n+1$.

En vertu du théorème des applications canoniques, on peut trouver un sous-complexe N' du nerf N_ω et une application canonique f de l'espace X sur le polyèdre $\widetilde{N}'$ qui recouvre essentiellement chaque simplexe principal du complexe N'. D'après le choix du recouvrement ω, il y a un simplexe $T_0^n = |e_0 \ldots e_n|$ de dimension n parmi eux. Posons $\Xi = f^{-1}\overline{T}_0^n$; l'application $f\colon \Xi \to \overline{T}_0^n$ est alors essentielle.

Désignons par $e_{n+1}, \ldots, e_s$ les sommets du complexe N' qui ne sont pas des sommets du simplexe T_0^n. Construisons une application simpliciale g du complexe N' sur le simplexe T_0^n en posant

$$g(e_0) = e_0, \ldots, g(e_n) = e_n, \quad g(e_{n+1}) = \ldots = g(e_s) = e_0.$$

Sur le simplexe T_0^n et ses faces, l'application g est identique, et elle applique tous les autres simplexes du complexe N' sur telle ou telle face (éventuellement propre) du simplexe T_0^n. Il en résulte que l'image du polyèdre $\widetilde{N}'$ par l'application $\widetilde{g}$ est le simplexe fermé $\overline{T}_0^n$. En prenant la composition des applications $\widetilde{g}$ et f, on obtient l'application continue

$$f_1 = \widetilde{g}f\colon X \to \overline{T}_0^n$$

qui applique dans S tous les points $x \in X$ pour lesquels $fx \in \widetilde{N}' \setminus T_0^n$, i.e. tout l'ensemble $f^{-1}(\widetilde{N}' \setminus T_0^n)$ et donc (puisque $S \subseteq \widetilde{N}' \setminus T_0^n$) également l'ensemble $f^{-1}S \subset f^{-1}(\widetilde{N}' \setminus T_0^n)$. Ainsi

$$f^{-1}S \subseteq f_1^{-1}S.$$

Démontrons que l'application f_1 est une application essentielle de l'espace X sur $\overline{T}_0^n$. Dans le cas contraire, il existerait une application $\varphi\colon X \to S$ qui coïnciderait avec f_1 dans tous les points de l'ensemble $f_1^{-1}S$ et donc, à plus forte raison, dans ceux de l'ensemble $f^{-1}S$. Envisageons l'application $\varphi\colon \Xi \to S$; elle coïncide avec f sur $f^{-1}S$, contredisant l'essentialité de l'application $f\colon \Xi \to \overline{T}_0^n$. L'assertion a) est démontrée.

Ci-dessous, Q et $\overline{Q}$ désignent respectivement la boule ouverte et fermée de R^m.

Lemme fondamental. *Soit φ une application essentielle de l'espace X (de dimension arbitraire) sur une boule $\overline{Q} \subset R^m$ de dimension m. Soit $\overline{Q}_0 \subset Q$ une boule concentrique plus petite de dimension m. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que pour toute application f de l'espace X dans R^m, qui diffère de φ pas moins que ε, toute la boule $\overline{Q}_0$ est contenue dans fX.*

Supplément au lemme. *Dans les hypothèses du lemme, la boule $\overline{Q}_0$ est recouverte essentiellement par l'application f.*

Avant de démontrer ce lemme, déduisons-en l'assertion b) du théorème des applications essentielles.

Pour $n < m$ supposons donnée une application essentielle $\varphi : X \to \bar{Q}$ de l'espace X de dimension n sur la boule $\bar{Q}$ de dimension m. Choisissons le nombre $\varepsilon > 0$ et la boule $\bar{Q}_0 \subset Q$ conformément au lemme. En vertu du premier théorème d'approximation, il existe une telle application f de l'espace X sur un polyèdre $\Pi \subseteq R^m$ de dimension n que $\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon$, quel que soit $x \in X$. Puisque le polyèdre $\Pi \subseteq R^m$, étant de dimension $n < m$, est partout non dense dans l'espace R^m, il ne peut contenir la boule $\bar{Q}_0$ de dimension m, ce qui contredit l'assertion $\bar{Q}_0 \subseteq fX \subseteq \Pi$ de notre lemme.

Ainsi, il suffit de démontrer le lemme.

Soit $\bar{Q} \subset R^m$ une boule fermée de rayon r; désignons son centre par c. Soit $\bar{Q}_0$ une boule concentrique de rayon $r_0 < r$. L'application essentielle $\varphi : X \to \bar{Q}$ est donnée. Prenons ε de manière à avoir $0 < \varepsilon < \min\{r_0, r - r_0\}$. Supposons que, pour l'application $f : X \to \bar{Q}_0$, on a $\rho(fx, \varphi x) < \varepsilon$, quel que soit $x \in X$.

Admettons que l'application $f : f^{-1}\bar{Q}_0 \to \bar{Q}_0$ n'est pas essentielle. Il existe alors une application $f_1' : f^{-1}\bar{Q}_0 \to S_0$ qui coïncide avec f sur $f^{-1}S_0$. L'application f_1, qui coïncide avec f_1' sur $f^{-1}\bar{Q}_0$ et avec f sur $f^{-1}(\bar{Q} \setminus Q_0)$, est continue. Projetons maintenant, à partir de c, l'ensemble $\bar{Q} \setminus Q_0$ sur la sphère S, et désignons cette projection par π. Il est clair que l'application

$$\varphi_1 = \pi f_1 : X \to S$$

est alors continue.

Si $x \in \varphi^{-1}S$, alors $\rho(\varphi x, fx) < \varepsilon < r - r_0$. Donc $\rho(S, fx) < \varepsilon$ et $fx \in \bar{Q} \setminus Q_0$. Par conséquent $\rho(\varphi x, \varphi_1 x) = \rho(\varphi x, \pi f_1 x) = \rho(\varphi x, \pi fx) \leqslant \rho(\varphi x, fx) + \rho(fx, \pi fx) < 2\varepsilon < 2r$, i.e. φx et $\varphi_1 x$ ne peuvent être des points diamétralement opposés de la sphère S, et l'on démontre donc facilement que les applications

$$\varphi : \varphi^{-1}S \to S \quad \text{et} \quad \varphi_1 : \varphi^{-1}S \to S$$

sont homotopes. Mais alors le lemme du champignon (lemme de Borsuk) implique que l'application $\varphi_1 : X \to S \subseteq \bar{Q}$ est essentielle, ce qui est faux. La contradiction obtenue démontre le lemme ainsi que son supplément.

BIBLIOGRAPHIE

ALEXANDER J.

[1] A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), 333-351.

ALEXANDROV P. (АЛЕКСАНДРОВ П.)

[1] Uber die Dualität zwischen den zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Räumes, Nach. Ges. Wiss., 1928, H. 3, 323-329.

[2] Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen, Ann. Math. 30, 1928-1929, 101-187.

[3] Dimensionstheorie, Math. Ann. 106, 1932, 161-238.

[4] Общая теория гомологий, Уч. зап. Московского Университета 45 (1940), 3-60.
(Théorie générale de l'homologie, « Outchonye zapiski » de l'Université de Moscou 45 (1940), 3-60.)

[5] О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств, ИАН СССР, сер. матем. 6 (1942), 227-281.
(Sur les propriétés homologiques de disposition de complexes et d'ensembles fermés, « Izv. Acad. naouk » de l'U.R.S.S., sér. math. 6 (1942), 227-281.)

[6] On the dimension of normal spaces, Proc. Roy. Soc., London, ser. A, 189 (1947), 11-39.

[7] О размерности замкнутых множеств, УМН 4, n° 6 (1949), 17-89.
(Sur la dimension des ensembles fermés, « Ouspekhi math. naouk » 4, n° 6 (1949), 17-89.)

[8] Die Kontinua (V^p) — eine Verschärfung der Cantorschen Mannigfaltigkeiten, Monatsh. für Math. und Phys., 1957, Bd. 61, H. 1, 67-76.

[9] Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.
(Introduction à la théorie générale des ensembles et des fonctions, « Gostekhizdat », 1948.)

[TC] Комбинаторная топология, Москва, Гостехиздат, 1947.
(Topologie combinatoire, Moscou, « Gostekhizdat », 1947.)

[GA] Лекции по аналитической геометрии, « Наука », 1968.
(Cours sur la géométrie analytique, « Naouka », 1968.)

ALEXANDROV P., HOPF H.

[AH] Topologie I, Berlin, Verlag von J. Springer, 1935.

ALEXANDROV P., PASYNKOV B. (АЛЕКСАНДРОВ П., ПАСЫНКОВ Б.)

[AP] Введение в теорию размерности, « Наука », 1973.
(Introduction à la théorie de la dimension, « Naouka », 1973.)

BOKSTEIN M. (БОКШТЕЙН М.)

[1] О гомологических инвариантах топологических пространств, I, Труды Московского математического общества, 5 (1956), 3-80.
(Sur les invariants homologiques des espaces topologiques, I, Troudy de la soc. math. de Moscou, 5 (1956), 3-80.)

BOLTIANSKI V. (БОЛТЯНСКИЙ В.)

[1] О теореме сложения размерностей, УМН 6, n° 3 (1951), 99-129.
(Sur le théorème d'addition de dimensions, « Ouspekhi math. naouk » 6, n° 3 (1951), 99-129.)

BROUWER L.

[1] Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Ann. 70 (1911), 161-165.

HUREWICZ W., WALLMAN G.

[1] Dimension Theory, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1941.

GLEZERMAN M., PONTPIAGUINE L. (ГЛЕЗЕРМАН М., ПОНТРЯГИН Л.)

[1] Пересечения в многообразиях, УМН 2, n° 1 (1947), 58-155.
(Intersections dans les variétés, « Ouspekhi math. naouk » 2, n° 1 (1947), 58-155.

DYER E.

[1] On the dimension of products, Fundam. Math. 47, n° 2 (1959), 141-160.

KAUFMANN B.

[1] The dissection of closed sets of arbitrary dimension and generalized Brouwer-Alexandrov theorem, Proc. Cambr. Phil. Soc. 31 (1935), 525-535.
[2] On the extension of the Pflastersatz, ibidem 32 (1936), 238-247.
[3] On the extension of the Pflastersatz (part.2), ibidem 33 (1937), 13-20.
[4] On the infinitesimal properties of closed sets of arbitrary dimension, Ann. of Math. 38 (1937), 14-35.
[5] On homologies in general spaces, Proc. London Math. Soc. 43 (1937), 1-10,

KODAMA Y.

[1] Note on cohomological dimension for non-compact spaces, Journ. Math. Soc. Japan 18, n° 4 (1966), 343-359.

KOUZMINOV V. (КУЗЬМИНОВ В.)

[1] Гомологическая теория размерности, УМН 23, n° 5 (1968), 3-49.
(Théorie homologique de la dimension, « Ouspekhi math. naouk » 23, n° 5 (1968), 3-49.)

KURATOWSKI C.

[1] Topology, v. 1, New York, 1966.
[2] Topology, v. 2, New York, 1968.

LEFSCHETZ S.

[1] Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), 1-70.
[2] Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Publications, New York, 1942.

MALTSEV A. (МАЛЬЦЕВ А.)

[1] Теорема двойственности для незамкнутых множеств в многообразиях, ДАН СССР 126, n° 4 (1959), 710-713.
(Théorème de dualité pour des ensembles ouverts sur les variétés, « Doklady Acad. naouk » de l'U.R.S.S. 126, n° 4 (1959), 710-713.)

PONTRIAGUINE L.

[1] Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension. C.r. Acad. Sci. Paris 190 (1930), 1105-1106.
[2] Непрерывные группы, Москва, 1973.
(Groupes continus, Moscou, 1973).

SITNIKOV K. (СИТНИКОВ К.)

[1] Определение размерности замкнутого множества через метрические свойства дополнительного пространства, ДАН СССР 64, n° 6 (1949), 1059-1063.
(Définition de la dimension d'ensembles fermés par les propriétés métriques de l'espace complémentaire, « Doklady Acad. naouk » de l'U.R.S.S. 64, n° 6 (1949), 1059-1063.)

[2] О гомологическом опоясывании компактов в эвклидовом пространстве, ДАН СССР 82, n° 2 (1951), 153-157.
(Sur les ceintures homologiques des compacts dans l'espace euclidien, « Doklady Acad. Naouk » de l'U.R.S.S. 82, n° 2 (1951), 151-157.)

[3] Комбинаторная топология незамкнутых множеств, I, Матем. сб. 37, n° 1 (1954), 3-54.
(Topologie combinatoire d'ensembles ouverts, I, Recueil math. 37, n° 1 (1954), 3-54.)

[4] Комбинаторная топология незамкнутых множеств, II, Матем. сб. 37, n° 3 (1955), 385-434.
(Topologie combinatoire d'ensembles ouverts, II, ibidem 37, n° 3 (1955), 385-434.)

[5] Комбинаторная топология незамкнутых множеств, III, Матем. сб. 48, n° 2 (1959), 213-226.
(Topologie combinatoire d'ensembles ouverts, III, ibidem 48, n° 2 (1959), 213-226.)

SCLIARENKO E. (СКЛЯРЕНКО Е.)

[1] О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии, УМН 19, n° 6 (1964), 47-70.
(Sur quelques applications de la théorie des faisceaux à la topologie générale, « Ouspekhi math. naouk » 19, n° 6 (1964), 47-70.)

WHITNEY H.

[1] The maps of an n-complex into n-sphere, Duke Math. J. 3, (1937), 51-55.

HOPF H.

Новые исследования об n-мерных многообразиях, Матем. сб. 1 (43): 5 (1936), 695-696.
(Nouveaux résultats sur les variétés de dimension n, Recueil math. 1 (43): 5 (1936), 695-696.)

CHVÉDOV I. (ШВЕДОВ И.)

[1] Размерности и мягкие пучки
(Dimensions et faisceaux souples), Proc. of second Prague Top. Symp., Prague, 1967, 347-348.

INDEX DES NOMS

Alexander 10
Alexandrov 10

Bohl 167
Bokstein 9
Boltianski 9
Borsuk 195
Brouwer 10

Chvédov 9
Cramer 46

Dyer 9

Fragmén 222
Froum-Ketkov 12

Glezerman 208

Hopf 10
Hurewicz 30

Jordan 147

Kaufmann 206
Klein 71
Kodama 399
Kolmogorov 24
Kouzminov 9
Kronecker 46
Kuratowski 264

Lebesgue 321
Lefschetz 10
Lokoutsievski 12

Maltsev 12
Menger 236
Mœbius 71

Nöbeling 227
Nœther 294

Pasynkov 9
Poincaré 167
Pontriaguine 9

Rouché 167

Scliarenko 206
Sierpiński 268
Sitnikov 9
Sperner 94

Tucker 26

Urysohn 189

Vietoris 93

Wallman 30
Whitney 360

Zaïtsev 12

NOTATIONS COURANTES

R^n	espace affine ou euclidien
$\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$	base d'espace affine
$(o; u_1, \ldots, u_n)$	repère d'un espace affine
T^n	simplexe abstrait ou géométrique
$e_0, e_1, \ldots, e_n$	ensemble des sommets d'un simplexe
$(e_0 \ldots e_n) = t^n$	simplexe orienté
$\lvert e_0 \ldots e_n \rvert = \lvert t^n \rvert$	simplexe non orienté
$(t^n : t^{n-1})$	coefficient d'incidence
Δt^n	frontière d'un simplexe
$x^r = \sum_i a_i t_i^r$	chaîne
K	complexe
Δx^r	frontière d'une chaîne
$L^r K$	groupe des chaînes d'un complexe
$Z^r K$	groupe des cycles d'un complexe
$H^r K$	groupe des cycles homologues à zéro d'un complexe
$z^r \sim 0$	cycle homologue à zéro
$z^r \not\sim 0$	cycle non homologue à zéro
$\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$	groupe quotient
$\Delta^r K$	groupe d'homologie
∇t^r	cofrontière d'un simplexe
∇x^r	cofrontière d'une chaîne
$Z_\nabla^r K$	groupe des cocycles
$H_\nabla^r K$	groupe des cocycles cohomologues à zéro
$\nabla^r K$	groupe de cohomologie
$L^r(K, \mathfrak{A})$, $Z_\Delta^r(K, \mathfrak{A})$, $Z_\nabla^r(K, \mathfrak{A})$	groupes relatifs aux groupes de coefficients $\mathfrak{A}$

(x, y)	produit scalaire
$K \setminus A$	différence de complexes
$L^p, Z^p_\Delta, Z^p_\nabla, \ldots$	notation abrégée des groupes
J^K_C	opérateur d'intersection
E^C_K	opérateur d'inclusion
I	groupe des nombres entiers
I_m	groupe des résidus modulo m
$\mathfrak{r}_m\colon I \to I_m$	homomorphisme naturel
$h \equiv k \pmod m$	égalité modulo m des nombres entiers
$\mathfrak{R}$	groupe des nombres rationnels
R	groupe des nombres réels
$\mathfrak{R}_1$	groupe quotient du groupe $\mathfrak{R}$ par le groupe I
$\mathfrak{r}^m_1\colon I_m \to \mathfrak{R}_1$	inclusion naturelle
$\varkappa$	groupe cyclique continu (nombres réels modulo 1)
$\mathfrak{r}_1\colon \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$	projection naturelle
$\hat{U}$	adhérence par division d'un sous-groupe
$\pi^r = \pi^r K$	nombre de Betti
$\Theta^r K$	groupe de torsion
$B^r K$	groupe de Betti libre
$\Delta^r (K, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$	frontière relativement à un couple de groupes de coefficients
$[e_1, \ldots, e_n]$	treillis de rang n
δ_{ij}	symbole de Kronecker
${}^m[e_1, \ldots, e_n]$	treillis de rang n modulo m
$z^r \sim 0 \bmod m$	homologie modulo m
$Z_{\mathrm{I}} (K, \mathfrak{R})$	groupe des cycles du premier type
$\iota\colon \mathfrak{R} \to R$	inclusion naturelle
$\pi\colon R \to \varkappa$	projection naturelle
$Z^{00} (K, \mathfrak{A})$	groupe des cycles normaux
$\Delta^{00} (K, \mathfrak{A})$	groupe quotient $Z^{00} - H^0$
$[T^n]$	adhérence combinatoire d'un simplexe
oK	cône sur un complexe
ot^r	cône sur un simplexe orienté
ox^r	cône sur une chaîne
$\lvert z \rvert$	support d'une chaîne
$X \mid Y$	dualité des groupes X et Y
$N (A, Y)$	annulateur d'un sous-groupe dans un groupe

NOTATIONS COURANTES

$X \supseteq A \perp B \subseteq Y$	relation d'annulation réciproque
$\dim X$	dimension par rapport aux recouvrements
$\boxed{K_\alpha}$	agrandissement d'un complexe
s_β^α	opérateur de subdivision
σ_α^β	opérateur de déplacement canonique
Π	prisme
$z_1 \underset{\varepsilon}{\sim} z_2$	ε-homologie de cycles
$\{z_k^r\} = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots)$	cycle véritable
$Z^r X$	groupe de cycles véritables
$Z_c^r X$	groupe de cycles convergents
$\Delta_c^r X$	groupe de Brouwer-Vietoris
$\omega = \{O_1, \ldots, O_h\}$	recouvrement ouvert
N_ω	nerf d'un recouvrement
$\sigma_\omega : X \to N_\omega$	application canonique dans un nerf
$\Delta^r (K, \bmod F)$	groupe d'homologie relatif
$Z_c^r (X, \bmod \Phi)$	groupe de cycles relatif
$f_\theta (z)$	déformation d'un cycle véritable
$\varphi : X \to Y \quad \Phi \to \Psi$	application d'un couple
$\gamma (o, x_\alpha^n)$	degré avec lequel une chaîne recouvre un point
$\overline{T} = \overline{Q}$	simplexe fermé
K_Γ	complexe des sommets (des squelettes) d'un ensemble ouvert
$\Delta^r K_\Gamma$	groupe d'homologie d'un ensemble ouvert
$\tilde{x}$	support d'une chaîne d'un ensemble ouvert
$(X^\mu \times Y^\nu)$	indice d'intersection de plans orientés
$(x^\mu \times y^\nu)$	indice d'intersection de simplexes
$\mathfrak{o} (z_1^p, z_2^q)$	coefficient d'enlacement de cycles
$O (\Phi, \varepsilon)$	voisinage d'un compact
$W_\varepsilon, W_\varepsilon'$	complexes des cubes d'un espace
$\langle A \rangle = \operatorname{Int} A$	intérieur de l'ensemble A

$\pi^p\Gamma$, $\pi^p_m\Gamma$	nombres de Betti d'un ensemble ouvert
$\pi^p\Phi$, $\pi^p_m\Phi$	nombres de Betti d'un compact
$\lvert\,\omega\,\rvert$	nerf du recouvrement ω
$\lvert\,\Phi\omega\,\rvert$	sous-complexe du nerf ω relatif au sous-ensemble Φ
$\mathfrak{S}^{\omega'}_{\omega}$	projection dans un spectre
diam A	diamètre de l'ensemble A
Λ	ensemble vide
$\mathfrak{g}\Psi z$	degré avec lequel le cycle z recouvre un point fixe par l'application Ψ
$d_{\mathfrak{A}}$, $d^{(c)}_{\mathfrak{A}}$, D_n, $D^{(c)}_{\mathfrak{A}}$	dimensions homologiques
$\alpha_k\Phi$	diamètre de dimension k du compact Φ
$C\,(\Phi, R^n)$	espace des applications continues
$\rho\,(f, g)$	distance entre deux applications
μz	mesure d'essentialité d'un cycle
α^p_Γ	diamètre homologique
Fr A	frontière de l'ensemble A
$\alpha^p x$	diamètre de dimension p d'une chaîne x
∂	opérateur $J^K_A \Delta E^{AG}_K$
δ	opérateur $J^K_G \nabla E^A_K$
$\Delta\,(K, A, G)$	suite homologique
$\nabla\,(K, A, G)$	suite cohomologique
Im f	image d'un homomorphisme
Ker f	noyau d'un homomorphisme
$\Delta^r\,(A : K)$	noyau de l'homomorphisme E^A_K
$\Delta^r KA$	image de l'homomorphisme E^A_K
$\nabla^r\,(G : K)$	noyau de l'homomorphisme E^G_K
$\nabla^r KG$	image de l'homomorphisme E^G_K
$\nabla^r AK$	image de l'homomorphisme J^K_A
$\Delta^r GK$	image de l'homomorphisme J^K_G
$\nabla^r\,(A : K)$	le groupe quotient $\nabla^r A - \nabla^r AK$
$\Delta^r\,(G : K)$	le groupe quotient $\Delta^r G - \Delta^r GK$
$f_G \equiv fG$	l'homomorphisme $J^{K'}_{G'} f E^G_K$
$\bar{f}_G \equiv \overline{fG}$	homomorphisme dual à f_G
$\nabla^r X$	groupe de cohomologie d'un bicompact

$\Delta^r X$	groupe d'homologie d'un bicompact
β^{-1}	image inverse d'un recouvrement
$\alpha \wedge \beta$	produit de recouvrements
E_Y^X	opérateur d'inclusion
J_X^Y	opérateur d'intersection
$\Delta(X, \Phi, \Gamma)$	suite homologique
$\nabla(X, \Phi, \Gamma)$	suite cohomologique
ΠX	produit topologique
$S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta\}$	spectre inverse d'espaces ou de groupes
$X = \varprojlim X_\alpha$	groupe limite d'un spectre inverse
$\varpi_\alpha : X \to X_\alpha$	projection (dans un spectre)
π_β^α	projection dans un spectre direct
$S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$	spectre direct
$X = \varinjlim X_\alpha$	groupe limite d'un spectre direct
$\mathrm{cd}_{\mathfrak{A}}$	dimension cohomologique
$X^{(r)}$	ensemble des simplexes de dimension $\leqslant r$ (squelette de dimension r) d'un complexe

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Acyclicité 295
Adhérence par division 36
Agrandissement
— simple 96
— d'une triangulation 94, 96
Annulateurs 87
— d'un sous-groupe 88
Annulations 88
Application
— canonique 116, 323
— simpliciale 133
Applications
— combinatoirement proches 110
— complètement homologues 130
— homologues 130
— homotopes 318
— (Φ, Ψ)-homotopes 132
— ω-proches 318

Base
—canonique 38, 40
—d'un espace affine 13
—d'un groupe abélien libre 36
—homologique 52
—initiale d'un treillis 46
—d'un prisme 111
— —, inférieure 111
— —, supérieure 111
Bases
— duales 46
— équivalentes 13
— de même orientation 13
— de même signe 13
Bases
— d'orientation opposée 13
— de signe contraire 13
Bord
— d'un complexe 69, 265
— —, multiple 261
— du continuum 266

Caractère 86
— d'un groupe 86, 172, 200
— — entier 200
— — modulo m 200
Ceinture 283
Cellule 26
— singulière 281
Cellules
— duales 172
— incidentes 28
— opposées 26
Chaîne 22
— à coefficients dans $\mathfrak{A}$ 27
— d'un ensemble ouvert 145
— entière 26, 34
— modulo m 34
— modulo 1 35
—rationnelle 34
— singulière 281
— située dans un sous-complexe 30
Classe
— de cohomologie 85
— rationnelle modulo 1 35
— réelle modulo 1 35

Cocycle 25, 307
— d'un bicompact 307
— fondamental d'une pseudo-variété 75, 316
— prolongeable 294
Coefficient
— d'enlacement 159
— — de cycles convergents 163
— d'incidence 20, 26, 95
Cofrontière
— d'une chaîne 25
— d'un simplexe 24
Cohomologie
— de ∇-cycles 307
— à zéro 25
Collage d'un trou dans un polyèdre 362
Complexe
— de Brouwer 145
— cellulaire 26
Condition
— de confinalité 345
— de Kronecker-Hopf 188
— σ^p 256
Cône
— fermé 79
— sur une chaîne 78
— sur un simplexe orienté 178
Continuum
— U, U^p 255
— V, V^p 255
— de Urysohn 255
Cycle 23
— à coefficients variables 122
— — —, homologue à zéro 123
— — —, relatif 122
— complètement non homologue à zéro 128
— continu 132
— convergent 114
— du deuxième type 56
— entier 34
— essentiel 279
— exponentiel 122
— fondamental 139
— homologue à zéro 23
— modulo F 121
Cycle
— — — homologue à zéro 121
— modulo 1 35
— non essentiel 279
— normal 60
— d'orientation d'une pseudo-variété 139
— du premier type 56
— projectif 307
— — homologue à zéro 307
— prolongeable 294
— relatif à F 121
— véritable 114
— — associé à un cycle à coefficients variables 123
Cycles
— homologiquement dépendants 39

Décomposition
— d'un cycle 221
— des homologies 226
— de Lebesgue 247
Déformation
— d'une application 131
— continue 18
— d'un cycle véritable 131
Degré
— d'une application 81, 138, 142, 316
—, — combinatoire 317
— — modulo deux 82, 138
Dépendance linéaire modulo m 52
Déplacement
— canonique d'un complexe 242
— — d'une triangulation 107
— infiniment petit d'une chaîne véritable 185
Diamètre
— d'une chaîne 238
— homologique d'un cycle 279
— — de dimension p 279
— de Urysohn 254
Dimension
— d'une cellule 26

Dimension
— cohomologique 360
— homologique 360
Dominante d'un cycle 123
Dualité
— d'Alexander 181
— d'Alexander-Kolmogorov-Pontriaguine 339
— d'Alexander-Pontriaguine 339
— algébrique de Pontriaguine 87
— de Poincaré 295

Eléments
— correspondants de deux bases duales 46
— équivalents d'un spectre 351
Enlacement
— d'un cycle et d'un compact 223
— — —, irréductible 223
— de cycles 158, 179
— — convergents 162
— de systèmes de cycles modulo m 175
Ensemble
— dirigé 344
— partiellement ordonné 344
Etoile d'un sommet 113

Faisceau 307, 351
Figure
— K, A, G 288
— X, Φ, Γ 226
Fil de spectre 345
Formule de Sperner-Alexander 108
Frontière
— d'une chaîne 23
— — singulière 281
— d'un ensemble ouvert 145
— d'un r-simplexe orienté 23
— d'une région orientée 170

Groupe
— abélien 36
— — libre de rang n 36
— de Betti 25
Groupe
— — d'un complexe cellulaire 26
— — libre 38
— de Brouwer-Vietoris 114
— des caractères d'un groupe 86
— de chaînes 23
— des coefficients 26, 34
— — entier 34
— — rationnel 34
— — réel 34
— de cohomologie 24, 27, 307, 326
— — de dimension r 25, 307, 326
— de cycles 23
— cyclique continu 36
— de la figure K, A, G 293
— d'homologie 22, 27, 307, 326
— limite de spectre direct 351
— à nombre fini de générateurs 36
— de torsion de dimension r d'un complexe 38
Groupes duaux 87

Homologie
— de dimension r 228
— de l'ensemble ouvert 145
— entière 34
— modulo 1 35
— rationnelle 34
— réelle 34
— à zéro 24
Homomorphisme
— canonique 118
— de la figure K, A, G 288
— — X, Φ, Γ 326
— de ∇-groupes, dual à une application simpliciale 79
— d'inclusion 288, 312
— induit par une application simpliciale 77, 297
— d'intersection 288, 312
Homomorphismes duaux 47, 89, 298

Image
— d'un cycle 115
— d'un homomorphisme 290

BeatriceGloria_personal library

Indépendance
— homologique 52
— linéaire modulo m 52
Index d'un cycle 60
Indice d'intersection de chaîne 150
— — de deux simplexes orientés 149
— — de plans 148
Intersection d'une cellule et d'un polyèdre 281
Isomorphisme
— d'Alexander-Kolmogorov 295
— de spectres de groupes directs 354
— de spectres de groupes inverses 349

Lemme
— d'Alexander 108, 256
— sur le ε'-déplacement d'un ε-cycle 118
— d'enlacement, local 184
—, Grand 195
— sur les homomorphismes duaux, principal 89
— de Sperner 109
Limite
— d'applications 345, 352
— de spectre direct 351
— de spectre inverse 345

Matrice de passage 13
Mesure d'un complexe 239
Modification d'un complexe 239
Morceau
— d'une chaîne 30
— d'un complexe 265
— d'un continuum 266
— d'un cycle véritable 221
Multiplicité de recouvrement 142
Nombre de Betti 24
— — de dimension r 24, 52
— — infini 171

Noyau
— d'un homomorphisme 290
— d'un solide de dimension p 226

Obstruction
— de dimension p 238
— homotopique de dimension p 248
Opérateur
— Δ 22
— ∇ 24
— d'inclusion 30
— d'intersection 30
Ordre
— d'un élément relativement à un sous-groupe 36
— — — — ,infini 36
— faible 344
— d'un point relativement à un cycle 143, 145
Orientation
— accordée 111
— d'un espace 114
— d'une pseudo-variété 70
— — à bord 139
— —, invariante 137
Orientation
— d'un simplexe 15
— — de dimension nulle 20
— — négative 15
— — positive 15
— d'une sphère de dimension nulle 83
Orientations de simplexes, cohérentes 70

Partie
— d'une application 82
— confinale d'un ensemble dirigé 344
— — d'un spectre 349
Plan projectif 100
Point principal 225
Position générale relative de simplexes 149

Prisme 110
— sur un complexe 111
— de déplacement d'une chaîne 119
— sur un simplexe 111
Produit
— de deux recouvrements 310
— scalaire 46, 86, 357
— — de deux chaînes 27
Projection 345, 351
— d'un complexe (d'un cycle) 124
Pseudo-variété 68
— à bord 68
— combinatoire à bord de dimension n 69
— complète 68
— non orientable 70
— orientable 70, 138
— ouverte 68
— simple 74
— — de dimension nulle 74

Rang
— d'un groupe abélien 36, 52
— d'un treillis 47
Recouvrement d'un bicompact 208
— —, correct 209
Région polyédrale 170
Relation
— de dualité 172
— d'ordre 344
Repère d'un espace 14
Représentation paramétrique d'un cycle 132
Résidu 34
Ruban de Mœbius 100, 261
— — modulo m 261

Sac autour d'un compact 279
Simplexe d'un complexe 144
Solide de dimension p 226
Spectre
— direct 351
— inverse 345
— — de groupes topologiques 348
Spectres
— duaux 356
— isomorphes 349
Squelette
— d'un complexe 363
— d'un simplexe 15
— —, ordonné 15
Squelettes équivalentes 15
Subdivision barycentrique d'un complexe 363
— — d'une triangulation 105
Suite
— désorientante 74
— exacte 290
Support
— d'une chaîne 114, 145
— d'un cycle 78, 279
— d'un simplexe 97, 145
Surface
— de Klein 99
— de Pontriaguine 260

Théorème
— d'addition 222
— des annulateurs 88
— de Brouwer-Hopf 133
— des ceintures 283
— de convergence 123
— d'existence 88
— — fort 89
— — des racines 169
— de Hopf 187
— — de classification 198, 362
— — sur le prolongement des applications 361
— de Jordan-Brouwer 182
— des obstructions 245
— — homotopiques 248
— de Poincaré-Bohl 167
— de rapetissage 124
— de réciprocité 247
— de Rouchet 167
— des sacs 279

Treillis 45
— de rang n modulo m 47
Triangulation d'un tore 99

Variété cantorienne 253
— — spéciale V_P 254

$(I, \mathfrak{R})$-base 40
Δ-base 40
Δ_c-cycle 114, 122
Δ-frontière 27
Δ-groupe de dimension r 24, 121, 307, 326
Δ_c-groupe de dimension r 114
ε-chaîne 114
ε-collage 262
ε-complexe 113
ε-cycle 114
— (mod Φ) 114
—, ε'-frontière 114
—, ε'-homologue à zéro 114
ε-cycles ε'-homotopiques 114
ε-déplacement canonique 210
ε-modification d'un compact 246
— d'un complexe 240
(φ, ε)-réalisation canonique d'un nerf 209
(Φ, Ψ)-application 132
(Φ, Ψ)-approximation 133
(Φ, Ψ)-déformation d'une application 132
∇-cycle 25, 307
∇-degré d'une application simpliciale 85
∇-frontière 27
∇-groupe de dimension r 25, 326